

Rob van Oord

Waddinxveen

robvanoord@tiscali.nl

Evenement 21ste Nationale Wiskunde Dagen

Een Pi-shirt, beter laat dan nooit!

Op vrijdag 30 januari en zaterdag 31 januari vonden in Noordwijkerhout voor de 21ste keer de Nationale Wiskunde Dagen plaats. Twee dagen waarop wiskundeleraren en andere belangstellenden naar wiskunde kijken en luisteren, maar er vooral ook zelf mee aan de slag gaan. Een persoonlijke impressie van Rob van Oord, afgezwaaide docent maar inmiddels weer actief als invalkracht.

Wat te doen als je met pensioen bent? Gewoon weer naar de NWD? Natuurlijk, want je treft er zoveel bevriende wiskundecollega's. Inspiratie opdoen voor je lessen die je gewoon nog geeft, of als invaller. Verdieping van je wiskundekennis, je laten verrassen door bijzondere aspecten van je favoriete vak, op de hoogte blijven van de rol van wiskundigen in de nieuwste ontwikkelingen in de maatschappij. Dat zijn de ingrediënten van de NWD en maken een bezoek aan dit tweedaagse evenement meer dan waard.

Vier plenaire lezingen en veertig workshops geven voldoende stof om gelukkig van te worden. In dit verslag komen slechts enkele workshops voor. Als deelnemer kun je er zelf maar vier bijwonen. Op de site van de NWD kun je hand-outs en presentaties van vrijwel alle lezingen en workshops vinden [1].

Cycloïde

Hoe bijzonder een cycloïde is werd door Michiel Doorman mooi geïllustreerd. Aan de hand van een ventielkromme, zijn muze, liet hij twintig jaar NWD de revue passeren. Om de kromme zichtbaar te maken bevestigde hij een lampje op het ventiel van de voorband van zijn fiets en nam in het schemerdonker (met een lange sluitertijd) een foto van de baan ervan. Zo krijg je goed zicht op de baan van het lampje. Je zou nu ook met speels gemak leerlingen met hun smartphone een foto

of een filmpje ervan kunnen laten maken. Is er een formule van de baan? Hoe lang is de baan bij een omwenteling van het wiel? Iets verder gezocht: hoe groot is de oppervlakte van het vlakdeel dat tussen de grond en een omwenteling wordt ingesloten? Met wat integraalrekening kun je dan voor de lengte van één periode van de cycloïde op 8 komen en voor de oppervlakte onder één periode tot 3π . Michiel liet met filmpjes zien dat de (halve, omgekeerde) cycloïde de brachistochroon is, de snelste glijbaan van een punt A boven de grond naar een punt B op de grond. Daarbij maakt het niet uit welk deel van de (halve) cycloïde je neemt. Vanaf elk willekeurig punt op de baan ben je even snel in het eindpunt. Een andere wereldvondst was die van Huygens bij een slingeruurwerk. Als je een massa

aan het eind van een draadje een uitwijking geeft en loslaat zodat hij gaat slingeren, dan is de slingertijd bij grotere uitwijkingen niet gelijk aan die bij kleinere uitwijkingen. Huygens construeerde zogenaamde wangen in het uurwerk waardoor de massa tijdens het slingeren precies op de baan van een cycloïde ligt, met als effect dat de slingertijd constant blijft [2]. Zie ook het artikel van Jan Aarts en Henk Broer [3].

Straling

Na deze terugblik op mooie wiskunde in de voorgaande twintig edities van de NWD en de conclusie dat wij zelf de muzen van de wiskunde zijn, kwam Fieke Dekkers. Zij is als wiskundige verbonden aan het RIVM en doet onderzoek naar de invloed van alledaagse straling op de gezondheid, op het risico om kanker te krijgen. De modellen die voor grote hoeveelheden straling zijn opgesteld voor het risico op kanker berusten op tellingen van kankergevallen bij kernrampen. De vraag is of deze lineaire modellen een-op-een kunnen wor-



Figuur 1 Swier Garst in zijn oloïde.



Figuur 2 Peter Kop in de oloïde.

den voortgezet naar risico's op kanker bij zeer kleine hoeveelheden straling, zoals bij het personeel in ziekenhuizen bij röntgenlabs. Ze maakte met een alcoholverstuiver de straling zichtbaar die in de zaal ook aanwezig is. Lopen we daarmee een hoger risico? Fieke liet in een duidelijk verhaal doorschemeren dat er eigenlijk nog geen zinnig woord gezegd kan worden over de risico's op kanker bij het blootstaan aan zeer kleine straling.

Oloïde

Na de lezing zag ik Swier Garst, de huidige voorzitter van de NVvW, in zijn oloïde rondraaien over de vloer van het Atrium. Een oloïde bestaat uit aaneengelaste stalen buizen die de contouren van twee dwars in elkaar geschoven bierviltjes vormen. Middenin zitten een paar buizen waartegen je de voeten kunt schrap zetten. Dan erin hangen en na een zetje rollend over de vloer bewegen. Ook Peter Kop, opleider van wiskundedocenten aan het ICLON, deed een poging maar de steuntjes zijn op Swiers maat (1,72 m) gemaakt en Peter is 1,96 m.

Archimedes

De lezing van Martin Kindt ging over methoden die Archimedes al gebruikte om de inhoud van een bol te bepalen. Rechts hangt de cilinder met zwaartepunt op afstand r rechts van het ophangpunt, en links hangen de bol met straal r en een kegel met straal bodem $2r$ en hoogte $2r$ op een afstand $2r$ van het ophangpunt, zie links in Figuur 3. In de rechterfiguur zie je een dwarsdoorsnede van de cilinder; in deze figuur zijn de bol en kegel tweemaal getekend. Hierin is te zien dat de horizontale doorsnede van de bol op afstand x van boven gelijk is aan $\pi \cdot y^2$ en dat tegelijkertijd de doorsnede van de ke-

gel op afstand x onder de top gelijk is aan $\pi \cdot x^2$. Het moment van deze twee schijfjes is $2r \cdot (\pi \cdot x^2 + \pi \cdot y^2)$.

In de rechthoek van de figuur doorsnijdt de bol het vlak van het papier in een cirkel met straal r . Uit de vergelijking van deze cirkel $y^2 + (r - x)^2 = r^2$ (ook voor $x > r$) volgt met enig rekenen $2r \cdot (\pi y^2 + \pi x^2) = x \cdot \pi \cdot (2r)^2$. Dit laatste is precies het moment van een cirkel met straal $2r$ op afstand x van het ophangpunt. Als je nu x van 0 tot $2r$ laat lopen dan hangen steeds een cirkel van de bol en een beetje van de kegel op afstand $2r$ beide op afstand x van boven, in evenwicht met een grote cirkel met straal $2r$ op afstand x (rechts). Hieruit concludeert Archimedes dat de hele bol en de hele kegel op afstand $2r$ in evenwicht hangen met de cilinder. Wegens symmetrie zit het zwaartepunt van de cilinder op afstand r rechts van het ophangpunt.

Archimedes concludeert hieruit dat

$$2r \cdot (\text{Inhoud bol} + \text{Inhoud kegel}) = r \cdot (\text{Inhoud cilinder}).$$

Er van uitgaande dat

$$\text{Inhoud kegel} = \frac{1}{3} \cdot \text{Inhoud cilinder},$$

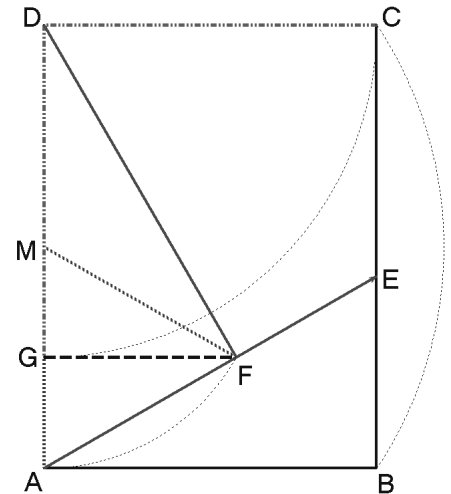
komt er

$$2 \cdot I_{\text{bol}} = \frac{1}{3} \cdot I_{\text{cilinder}} = \frac{1}{3} \pi \cdot 8r^3,$$

dus

$$I_{\text{bol}} = \frac{4}{3} \pi r^3. \quad \text{Q.E.D.}$$

Van Martin was een boekje te koop met een verzameling van al zijn 'Wat te bewijzen is...' uit de jaargangen van de *Nieuwe Wiskrant*. Wie wilde kon een gesigneerd exemplaar be-



Figuur 4 Rechthoek verdelen.

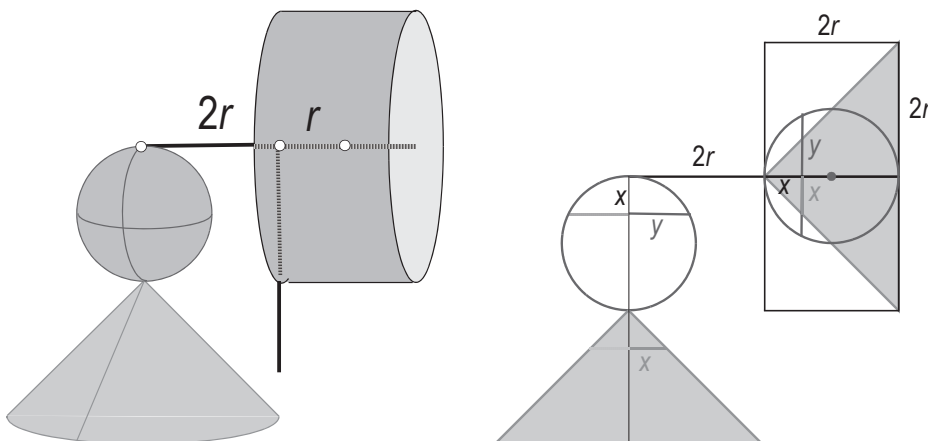
machtingen. In de pauze na de eerste lezing snel naar B15 om alles in gereedheid te brengen voor mijn eigen workshop.

Klassikaal vouwen

Samen met Marjan Botke moesten gekleurde papieren, kartonnen neusisstroken, geodriehoeken, linialen, markeerstiften, schaaftjes, werkbladen en een blad met voorkennis die nodig is, op de tafels worden gelegd. Na een korte introductie, waarbij iedereen op een of andere manier een gegeven hoek in drie gelijke hoeken moest delen, werd vervolgens met behulp van 'klassikaal' vouwen (een geodriehoek en een passer heeft een leerling doorgaans ook niet bij zich) stap voor stap naar twee lijnen in een rechthoekig stuk papier (een A4'tje) toegewerkt. De langs die lijnen in stukken geknipte delen van de rechthoek zouden na wat schuiven tot een vierkant gelegd kunnen worden. In een PowerPoint werden de mogelijke keuzes voor de deelnemers voorbereid. Daarna ging ieder in groepjes aan de slag met de trisectie van een hoek of verdelen van een rechthoek naar een vierkant of een vierkant naar een gelijkzijdige driehoek.

Er werd eerst een instructie gegeven die tot een bepaald resultaat leidde. Daarna moest er worden nagedacht of het wel exact klopte en over een betere methode. Daarna moest er gezocht worden naar een bewijs. In de rechthoek ABCD (met $AD > AB$) passen we $DG = AB$ af, en we construeren F als snijpunt van de loodlijn door G op AD en de cirkel met middellijn AD. Dan trekken we DF, en we verlengen AF tot hij BC in punt E doorsnijdt.

Met de drie stukken ABE, AFD en FECD kan een vierkant gelegd worden; schuif ABE omhoog totdat AB op DC past en schuif ADF naar rechts zodat A op E terecht komt en AD op EC en het verlengde daarvan. We dagen de



Figuur 3



Figuur 5 Mini-strandbeest.

lezer uit om te bewijzen dat je nu inderdaad een vierkant krijgt!

In de workshop waagden de deelnemers zich ook aan de neusismethode om een gegeven hoek in drie even grote hoeken te delen. Met het richten (het Griekse *neuein* betekent 'gericht zijn naar') van de strook vanuit het hoekpunt moet een vast lijnstukje worden afgepast tussen een cirkelboog en een lijn (die parallel loopt met een van de benen van de gegeven hoek). Voor het bewijs worden Z-hoeken, de hoekensom van een driehoek en gelijkbenige driehoeken (met twee stralen van de cirkel) gebruikt. Voor de constructie met de trisector was te weinig tijd. Wel waagden een aantal deelnemers zich aan de trisectie door origami. In bewijs daarvan wordt veelvuldig gebruik gemaakt van het feit dat een vouw eigenlijk een spiegeling is. Daarmee ontdek je allerlei eigenschappen van driehoeken, zoals gelijkbenigheid en bissec-

trices. Uiteindelijk kun je daarmee de trisectie bewijzen. Bij de stands van de NVvW en van Epsilon Uitgaven zag ik dat er ook een Zebra-boekje verschenen is over de driedeling van een hoek, deel 41, *Met passer, liniaal en neusislat* van Ad Meskens en Paul Tytgat.

Strandbeest

Het cadeau dat de sprekers dit jaar van de organisatie kregen was erg origineel. Een bouw pakket van een *mini*-strandbeest van Theo Jansen. Enkele jaren geleden kwam hij nog met zijn pvc-beesten op het dak van zijn auto ons vertellen hoe hij ze heeft ontworpen en liet ze ook door de zaal lopen. Na een avondje knutselen zat hij in elkaar. En hij doet het! Blazen tegen de propellers of draaien met de aandrijfas zorgt ervoor dat het beest gaat lopen. Dank voor dit stukje vernuft. Zie Figuur 5.

Het gat van Escher

De avondlezing over het gat in de prent van Escher, een galerij met een prentententoonstelling aan de haven van Malta, was spectaculair ondanks het feit dat Hendrik Lenstra hem naar zijn zeggen al enkele honderden malen gegeven had. Zie Figuur 6. Er werd uitgelegd hoe wiskundigen de transformatie van een normaal ruitjespapier kunnen overzetten in een golvend patroon. Zie Figuur 6 (rechts). Je ziet hoe de man die naar een prent staat te kijken in een gale-

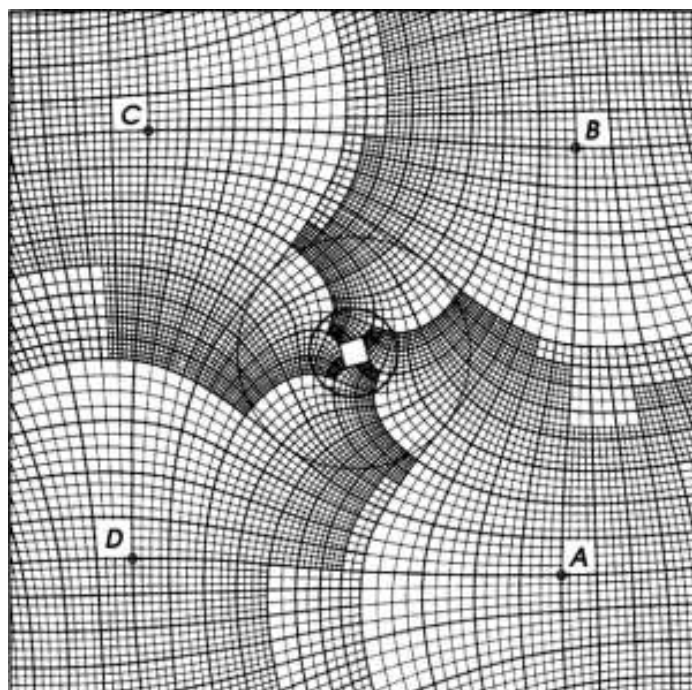
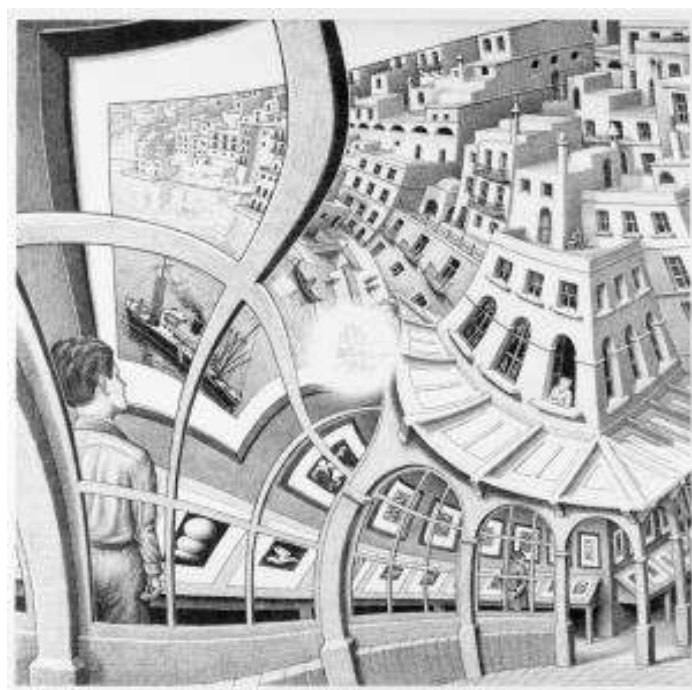
rij waar hij zelf op staat in feite een soort Droste-mannetje is dat bij inzoomen telkens weer terugkeert. Dit inzoomen werd in prachtige filmpjes gedemonstreerd. Leuk voor een familieavond om te laten zien. Het vierkant *ABCD* wordt gedraaid en sterk verkleind herhaald op het witte vierkantje. Daarin zit dan ook weer een nog kleiner wit vierkantje, enzovoorts.

Spelen, dansen en rennen

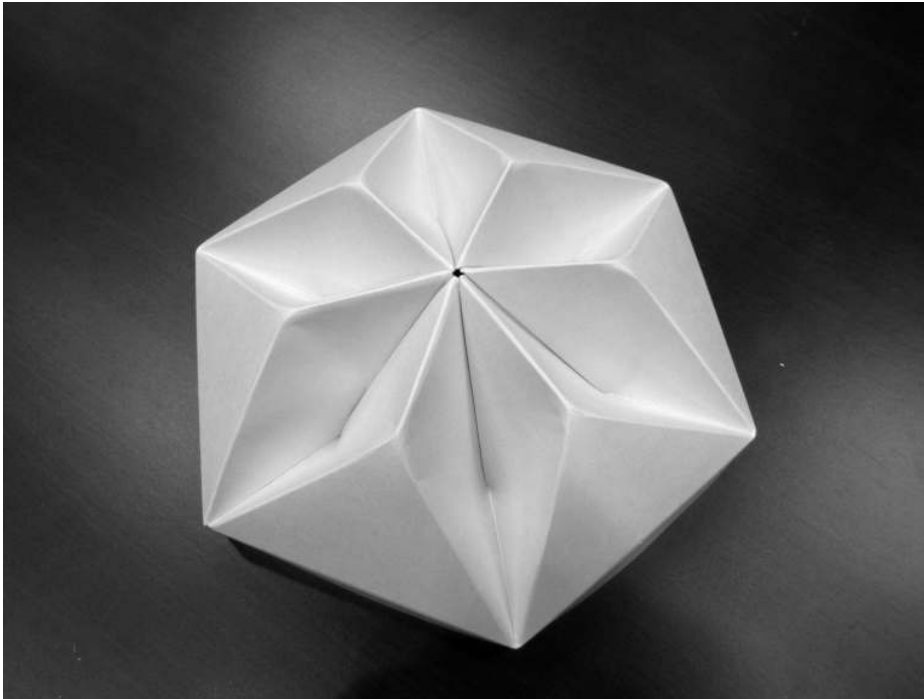
Na de lezing was het tijd voor spelletjes. Samen met Jörgen nam ik plaats aan een tafel met twee dames om met z'n vieren het spel RoboRama te spelen. Een ingewikkelde Halma-variant waarbij je jouw vier robots met door kaartjes bepaalde zetten naar de hoek diagonaal tegenover de starhoek moet delegeren. De dames gingen beter en eentje won. Een spel met meer levels. Maar voor mij op dat moment dus een Rob-o-Drama. Na de spelletjes tijd voor de dansvloer. De band 'De Buren' vond ik een succes. Lekker dansmuziek tot in de kleine uurtjes. Vroeg op voor de Funrun. Zes kilometer hardlopen in kou, wind en regen. Maar wat een deceptie toen bij de finish bleek dat er géén Pi-shirts waren. We hoorden dat het T-shirt in het teken van het π -jaar is bedrukt. Maar ze lagen nog in Utrecht.

Origami

Na het ontbijt ging ik naar een workshop over origami. Vorig jaar april las ik in het



Figuur 6 Links: Prentententoonstelling, rechts: Wiskundig patroon.



Figuur 7 Plafondkapje van Snowpuppe.

AD over een klein bedrijfje Snowpuppe in Den Haag dat origami in hun ontwerpen gebruikt. Toen ik informeerde of ze een workshop over hun werkwijze en producten wilden geven reageerden ze meteen erg enthousiast. Na overleg met de programmacommissie werd plaats gemaakt voor hun workshop op de NWD. Kenneth en zijn vrouw Nellianna zijn afgestudeerd in Delft op industriële vormgeving. Kenneth gaf ons een kijkje in zijn keuken. Hij liet zien hoe hij door de gulden snede geïnspireerd is. In zijn ontwerpen komt deze verhouding telkens terug. Hij showde zijn speciale paraplu, maar zijn bedrijf maakt vooral lampenkapjes (de 'Chestnut') en afdekkapjes tegen het plafond. De deelnemers gingen daarna onder hun leiding aan de slag met het vouwen van een plafondkapje uit een voorgeritst stuk karton. Het was een zeer geanimeerde bedrijvigheid. De in elkaar geflanste kapjes mochten mee naar huis genomen worden. Hij legde tot slot uit hoe hij zijn Chestnut-lampkap had ontworpen door allerlei lijnen over een cirkelring te tekenen. Eerst acht middellijnen en dan diagonalen die steeds één punt verschillen met het diametraal punt. Het is mooi om te horen dat je van een dergelijk concept ook kunt leven.

Pi

Omdat dit jaar 14 maart geschreven kan worden als 3-14-15, ligt het voor de hand om 2015 internationaal uit te roepen tot 'Pi-jaar'. In dat licht gezien werd de slotlezing verzorgd door

Frits Beukers, auteur van het Zebra-boekje *Pi*, deel 6 uit de reeks.

De eerste benaderingen van π zijn gevonden door het benaderen van de omtrek via ingesloten en omgeschreven regelmatige veelhoeken bij een cirkel. Archimedes kwam op die manier al tot enkele decimalen van π . Ludolph van Ceulen was zo'n beetje de laatste die op die manier π nog (zonder rekenapparaat) in 35 decimalen wist te benaderen. Door het onderzoek aan reeksen in de zeventiende eeuw kwamen veel snellere methodes op de markt. De reeksontwikkeling

$$\arctan(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

geeft bij

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

echter nog een weinig snel convergerende reeks. De echte winst werd geboekt toen men met complexe getallen ging werken. Men gebruikt daarbij de regel dat het argument van het product van twee complexe getallen gelijk is aan de som van de argumenten van de twee getallen, eventueel + of -2π .

Machin vond dat $(1+i)(5-i)^4 \cdot (239+i)$ gelijk is aan het reële getal 228488, dus het heeft argument 0. Met de regel voor het argument van het product vinden we $\pi/4 - 4 \arctan(1/5) + \arctan(1/239) = 0$.

Dit levert de formule

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

Hiermee kun je in weinig stappen relatief veel decimalen van π vinden.

De geniale Indiër Ramanujan vond

$$\pi \approx \frac{12}{\sqrt{190}} \log\left((2\sqrt{2} + \sqrt{10})(3 + \sqrt{10})\right).$$

Ik heb zijn benadering even op mijn GR ingetoetst en vond $\pi \approx 3,141592654$. Met de opkomst van de computer ging het snel met het aantal decimalen van π . Interessant is dat de Oekraïense broers Chudnovsky een computer bouwden die hun hele appartement in beslag nam. Er zijn filmpjes van hen op YouTube te vinden.

Koud en warm

De slotlezing van de NWD werd verzorgd door Peter Grünwald. Hij liet zien dat de wetenschap vervuild is met hypothesen die zogenaamd 'bewezen' zijn door statistische toetsen, en hoe we met eenvoudige statistiek zulke toetsen kunnen ontkrachten. Enigszins in verwarring verlaten we de zaal om de lunch te nuttigen. We praten nog wat na met deze en gene. Dan komen de collega's die met me zijn meegereden mij ophalen. Of ik ze weer veilig thuis wil brengen. Natuurlijk, maar pas nadat we onderweg de bekende drie bossen tulpen voor vijf euro hebben opgepikt voor onze 'vriendinnetjes'. Het waren ondanks het koude weer een paar warme dagen waaraan ik met plezier terugdenk. ←

Referenties

- 1 <http://www.fisme.science.uu.nl/nwd>.
- 2 K.P. Hart, De cycloïde, *Pythagoras* 39 (2000), 30–31.
- 3 J.M. Aarts en H.W. Broer, Schoolmeetkunde in het Horologium Oscillatorium van Christiaan Huygens, preprint, Rijksuniversiteit Groningen, 2010, www.math.rug.nl/~broer/pdf/aarts.