Klaas Pieter Hart
Faculteit EWI
TU Delft
k.p.hart@tudelft.nl

Ken uw klassieken

Cantors diagonaalargument

Georg Cantor, Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen, Crelles Journal für Mathematik 77 (1874), 258–262.
Georg Cantor, Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre, Jahresbericht der Deutschen Mathematischen Vereinigung 1 (1890–91), 75–78.

In deze rubriek worden klassiek geworden artikelen besproken die een blijvend stempel hebben gedrukt op de wiskunde. Dit keer bespreekt Klaas Pieter Hart twee baanbrekende bewijzen van Georg Cantor: de overaftelbaarheid van $\mathbb{R}$ en het diagonaalargument. Voor het lezen van dit artikel is enige voorkennis van afbeeldingen, injecties, surjecties en bijecties vereist.

Georg Cantor staat bekend als de vader van de verzamelingenleer. Wie zijn verzameld werk, [6], doorleest zal daar niet alleen veel klassieke resultaten over deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ terugvinden, maar ook de eerste stappen op weg naar een algemene theorie van machtigheden en orde-typen.

Twee artikelen springen er in mijn ogen uit: in [2] bewees Cantor dat de reële rechte overaftelbaar is en in [3] vinden we zijn diagonaalargument. Beide artikelen zijn vrij kort en beide zijn op hun eigen wijze baanbrekend. Het eerste toonde een essentieel verschil aan tussen $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$ en het tweede introduceerde een methode, de diagonaalmethode, die zeer vruchtbaar is gebleken.

$\mathbb{R}$ is overaftelbaar

We kunnen de ontdekking van de overaftelbaarheid van $\mathbb{R}$ vrij nauwkeurig dateren: in een brief van Cantor aan Dedekind, geschreven op 29 november 1873 (zie [11]), lezen wij de volgende vraag: "Man nehme den Inbegriff aller positiven ganzzahligen Individuen n und bezeichne ihn mit (n); ferner denke man sich etwa den Inbegriff aller positiven reellen Zahlgrössen x und bezeichne ihn mit (x); so ist die Frage einfach die, ob sich (n) dem (x) so zuordenen lasse, dass zu jedem Individuum des einen Inbegriffes ein und nur eines des andern gehört?"

In moderne termen: bestaat er een bijectie tussen $\mathbb{N}$ en de verzameling der positieve reële getallen? Uit de weergegeven brieven, en aantekeningen van Dedekind, in [11], is af te leiden dat Cantor en Dedekind wisten te bewijzen dat de verzameling van alle algebraïsche getallen wel afgeteld kan worden. Op 7 december schreef Cantor een brief met daarin een bewijs dat het open interval $(0,1)$ niet aftelbaar is. Het argument in de brief was wat gecompliceerder dan het bewijs dat uiteindelijk in [2] gepubliceerd is.

De inhoud van dat artikel is al eens samengevat in [9]: het bevat een bewijs van de aftelbaarheid van het lichaam der reële algebraïsche getallen en een bewijs dat het antwoord op de vraag van 29 november negatief is. Dat laatste bewijs verschilt nogal van het argument dat in populariseringen van de verzamelingenleer wordt gepresenteerd. Uitgaande van een rij $\langle\omega_\nu\rangle_\nu$ reële getallen en een interval (α,β) bepalen we een getal η in dat interval dat niet in de rij voorkomt, als volgt. Schrijf $\alpha_0 = \alpha$ en $\beta_0 = \beta$ en neem, gegeven α_n en β_n, de eerste twee termen van de rij die in het interval (α_n,β_n) liggen, en noem de kleinste α_{n+1} en de grootste β_{n+1}. Als dit proces voortijdig stopt, omdat er nog maar één (of geen) term van de rij in (α_n,β_n) ligt, dan is de gewenste η snel bepaald. In het andere geval krijgen we een strikt stijgende rij $\langle\alpha_n\rangle_n$ en een dalende rij $\langle\beta_n\rangle_n$ zodanig dat $\alpha_n < \beta_n$ voor alle n. Dan is elke η in het interval $[\sup_n \alpha_n, \inf_n \beta_n]$ als gewenst. Immers, de keuze van α_n en β_n garandeert dat $\omega_1,\omega_2 \notin (\alpha_1,\beta_1)$ en in het algemeen $\omega_{2n-1},\omega_{2n} \notin (\alpha_n,\beta_n)$.

In de in [11] opgenomen aantekeningen van Dedekind zien we dat deze de oorspronkelijke vraag van Cantor niet erg de moeite waard vond maar dat hij later van mening veranderde: "Die von mir ausgesprochene Meinung aber, dass die erste Frage nicht zu viel Mühe verdiene, weil sie kein besonderes praktisches Interesse habe, ist durch den von Cantor gelieferten Beweis für die Existenz transcendenter Zahlen schlagend widerlegt."

Inderdaad, als de rij $\langle\omega_\nu\rangle_\nu$ een aftelling van de verzameling der algebraïsche getallen is dan is de gevonden η transcendent. In het artikel is die aftelling geheel constructief; het bewijs van de niet-aftelbaarheid van $\mathbb{R}$ is in dat geval ook een constructief bewijs van het bestaan van transcendente getallen.

Het diagonaalargument

Het bovenstaande bewijs van de overaftelbaarheid van $\mathbb{R}$ gebruikt alleen de ordestructuur en dan met name de orde-dichtheid — tussen elk tweetal punten ligt nog een punt, en de (zwakke) orde-volledigheid — elke nietlege en naar boven begrensde verzameling heeft een supremum. Elke lineair geordende verzameling met deze twee eigenschappen is dus overaftelbaar.

In veel populariseringen van de verzamelingenleer ziet men een bewijs van de overaftelbaarheid van $\mathbb{R}$ dat, op de achtergrond, veel meer inspanning vergt. Men schrijft van elk reëel getal in de rij de decimale ontwikkeling op en creëert door middel van een diagonaalprocedure een getal dat niet in de rij voorkomt. Vaak verwijst men dan naar het artikel [3] dat Cantor in het eerste deel van *Jahresbericht der Deutschen Mathematischen Vereinigung* publiceerde. Cantor was nauw betrokken bij de oprichting van die vereniging en hij presenteerde zijn argument op de eerste bijeenkomst.

Lezing van het artikel leert dat het er Cantor niet om ging nogmaals te bewijzen dat $\mathbb{R}$ overaftelbaar is; de inleiding is hier duidelijk over: "In dem Aufsatze, betitelt: *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen* ([2]), findet sich wohl zum ersten Male ein Beweis für den Satz, daß es unendliche Mannigfaltigkeiten gibt, die sich nicht gegenseitig eindeutig auf die Gesamtheit aller endlichen ganzen Zahlen $1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$ beziehen lassen, oder, wie ich mich ausdrucken pflege, die nicht die Mächtigkeit der Zahlenreihe $1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$ haben. Aus dem in § 2 Bewiesenen folgt nämlich ohne weiteres, daß beispielweise die Gesamtheit aller reeller Zahlen eines beliebigen Intervalles $(\alpha \ldots \beta)$ sich *nicht* in der Reihenform

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots$$

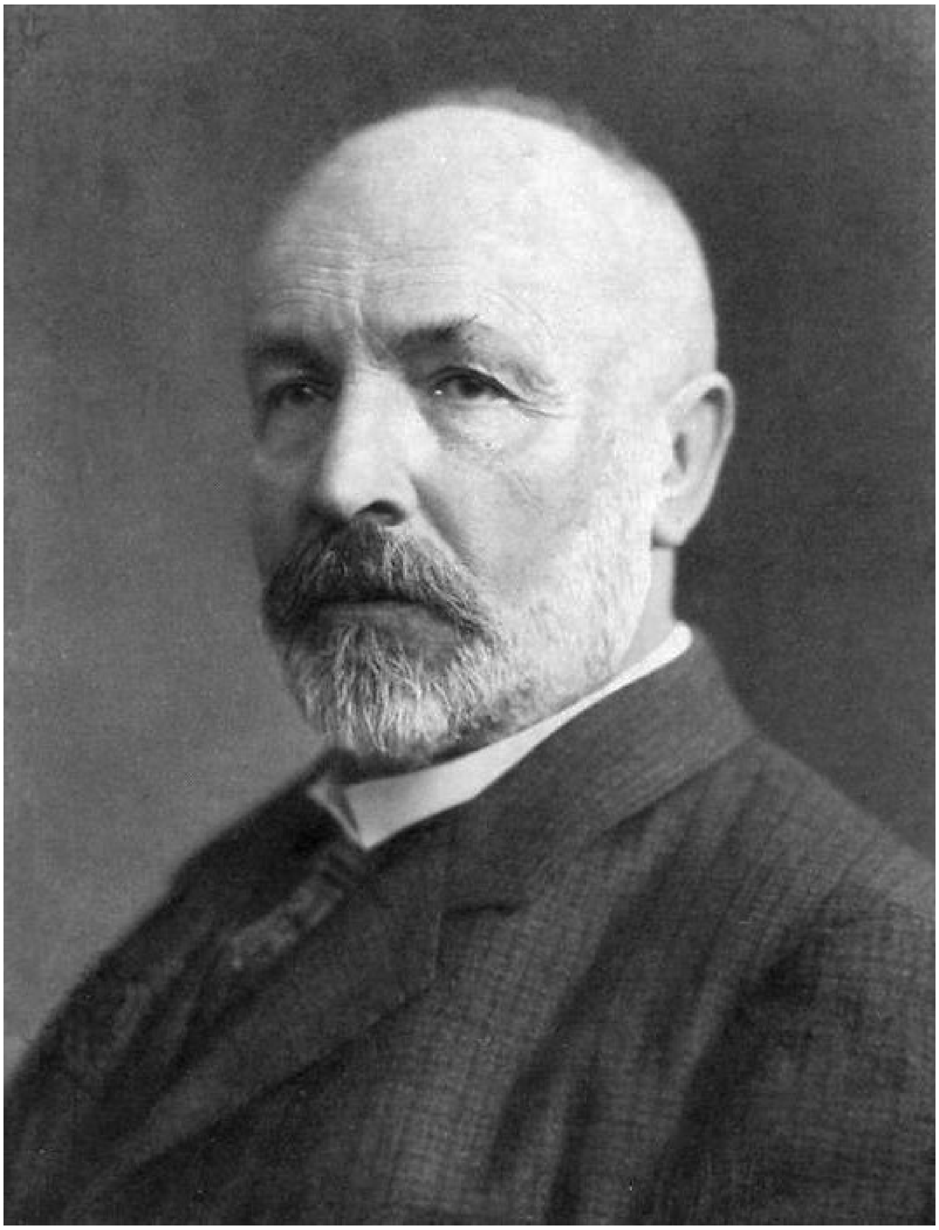
darstellen läßt. Es läßt sich aber von jenem Satze ein viel einfacherer Bewies lieferen, der unabhängig von der Betrachtung der Irrationalzahlen ist."

Wat Cantor kennelijk voor ogen stond was een nieuw, en veel eenvoudiger, bewijs te geven van het bestaan van overaftelbare verzamelingen, *onafhankelijk* van de irrationale getallen.

Dat nieuwe bewijs begint met "zwei einander ausschließende Charaktere" m en w, en beschouwt dan de verzameling M van alle elementen

$$E = (x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ldots)$$

met oneindig veel coördinaten $x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ldots$, die alle gelijk zijn aan m of w. Deze verzameling heeft meer elementen dan $\mathbb{N}$. Laat



Georg Cantor

namelijk $E_1, E_2, \ldots, E_\mu, \ldots$ een rij elementen van M zijn, waarbij

$$E_\mu = (a_{\mu,1}, a_{\mu,2}, \ldots, a_{\mu,\nu}, \ldots).$$

Nu definiëren we een rij $b_1, b_2, \ldots, b_\nu, \ldots$ waarin elke b_ν gelijk is aan m of w maar ongelijk aan $a_{\nu,\nu}$. Dus, als $a_{\nu,\nu} = m$ dan $b_\nu = w$ en als $a_{\nu,\nu} = w$ dan $b_\nu = m$.

Het element

$$E_0 = (b_1, b_2, \ldots, b_\nu, \ldots)$$

van M is ongelijk aan elke E_μ; immers, de μ-de coördinaat van E_0 is ongelijk aan de μ-de coördinaat van E_μ.

Dit laat zien dat geen enkele afbeelding van $\mathbb{N}$ naar M surjectief is, laat staan bijectief. Daarnaast is de afbeelding van $\mathbb{N}$ naar M die het getal n naar de rij met een w in de n-de coördinaat en een m in alle andere stuurt injectief.

Conclusie: M heeft strikt meer elementen dan $\mathbb{N}$.

Cantor merkte op dat dit bewijs, ofschoon eenvoudig, breder toepasbaar was: voor elke gegeven verzameling L kan men op dezelfde wijze een verzameling M construeren met strikt meer elementen dan L. Als voorbeeld nam hij $L = [0,1]$ en voor M de verzameling van $\{0,1\}$-waardige functies op L. Gegeven een functie $f : L \to M$, definiëren we een functie $\varphi : [0,1]^2 \to \{0,1\}$ door $\varphi(s,t) = f(s)(t)$. Dan definieert $t \mapsto 1 - \varphi(t,t)$, een functie die ongelijk is aan alle $f(s)$.

Latere ontwikkelingen

Wat niet in [3] staat maar wat Cantor zich realiseerde was dat dit bewijs een paradox in zich bergde. Cantor had een ruime opvatting van wat een verzameling was, zie [4]: "Unter einer 'Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objecten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die 'Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen."

Het diagonaalproces toegepast op het 'geheel', V, van *alle* verzamelingen leidt tot een verzameling die strikt *meer* elementen bevat dan V zelf en tegelijk een deel van V is, *tenzij* V zelf natuurlijk geen verzameling is. Dit bracht Cantor er toe onderscheid te maken tussen 'eigenlijke' en 'oneigenlijke' verzamelingen, hetgeen zijn theorie er niet mooier op maakte.

Nu lijkt deze paradox niet echt erg omdat de erbij betrokken verzamelingen onvoorstelbaar groot zijn, veel groter dan de 'normale' verzamelingen die we in de praktijk tegenkomen, zoals $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$. Echter, in [12] gebruikte Russell Cantors bewijs om een veel eenvoudigere paradox in de verzamelingenleer bloot te leggen. Hij begon met een herformulering van het argument (NB: het woord 'class' in onderstaande citaten van Russell is synoniem met 'verzameling'): "Let u be any class, and R a one-one correlation of all the members of u to some (or all) of the classes contained in u. There are such correlations, since one of them is obtained by correlating each member of u with the class whose only term is that member. Consider now the following norm: "x is a member of u, but is not a member of the class with which R correlates it." Suppose this norm defines a class w. Then w is omitted from the correlation; for, if w were correlated with x, then, if x is any member of w, it follows from the definition of w that x is not a member of its correlate, i.e., is not a member of w; while, conversely, if x is not a member of w, it is a member of its correlate, i.e., of w. Hence the supposition that w is the correlate of x leads to a contradiction. Hence, in any one-one correlation of all the terms of u with classes contained in u, at least one class contained in u is omitted. Therefore, whatever class u may be, there are more classes contained in u than there are members of u."

Wat efficiënter: als $R : u \to \mathcal{P}(u)$ een (injectieve) afbeelding is, dan is $w = \{x \in u : x \notin R(x)\}$ geen element van het beeld van R. Immers, als $w = R(x)$ dan volgt "$x \in w$ dan en slechts dan als $x \notin w$", hetgeen een duidelijke tegenspraak oplevert.

De hierboven gebezigde term 'norm' slaat op wat wij nu een (welgevormde) formule zouden noemen: een uitspraak/beschrijving waar objecten al dan niet aan kunnen voldoen — zie verderop voor de definitie. Elke verzameling, X, bepaalt een norm, namelijk "x behoort tot X". Het omgekeerde, dat elke norm een verzameling bepaalt, zou men kunnen zien als een formalisering van Cantors opvatting van het begrip verzameling.

Wat Russell zich realiseerde was dat deze opvatting tot tegenspraken moet leiden: "We may test this conclusion, in the case of the class of all entities, by constructing, according to the method of the proof of the Schröder-Bernstein theorem, an actual one-one correlation of all terms with all classes, and then considering the class which Cantor shows to be omitted. This process leads us to the consideration of the norm: "x is not a class which is a member of itself." If this norm defines a class w, then the class w is omitted from our correlation. But it is easy to see that this norm does not define a class at all. For, if it defined a class w, we should find that, if w is a member of itself, then it is not a member of itself, and vice versa. Hence there is no such class as w. Essentially the same argument may be stated as follows:—If u be any class, then, when $x = u$, the statement "x is not an x" is equivalent to "x is not a u." Hence, whatever class u may be, there is one value of x—namely, u—for which "x is not an x" is equivalent to "x is not a w"; thus there is no class w such that "x is not an x" is always equivalent to "x is a w." Hence, again, this norm does not define a class." En dit leidt tot een onverbiddelijke conclusie: "We thus find that, quite apart from any view as to the nature of cardinals, and without any considerations belonging to arithmetic, we can prove that at least one perfectly determinate norm does not define a class."

Dat was niet zo mooi maar aan de andere kant wel nuttig, want het dwong de wiskundigen zich er op te bezinnen wat nu wel en niet geoorloofd was binnen de verzamelingenleer. Eén van de eersten die die koe bij de horens vatte was Zermelo, die in [16] een axiomatisering van de verzamelingenleer opstelde. Het volgende axioma (Axiom der Aussonderung) maakt de paradox van Russell onschadelijk door, als het ware, alleen toe te laten dat eigenschappen gebruikt worden om verzamelingen uit voorgegeven verzamelingen af te zonderen:

"**Axiom III.** Ist die Klassenaussage $\mathbf{E}(x)$ definit für alle Elemente einer Menge M, so besitzt M immer eine Untermenge $M_{\mathbf{E}}$, welche alle diejenigen Elemente x von M, für welche $\mathbf{E}(x)$ wahr ist, und nur solche als Elemente enthält."

Wat Zermelo precies met een 'Klassenaussage' en 'definit' bedoelde was nog niet geheel duidelijk; Skolem zorgde in [13] voor klaarheid door in feite het begrip 'welgevormde formule' te definiëren: alle formules die door herhaalde conjunctie, disjunctie, negatie en kwantificatie uit atomaire formules van de vorm $x \in y$ en $x = y$ opgebouwd kunnen worden en alleen deze. Hiermee was alle ambiguïteit uit de verzamelingenleer weggewerkt.

Overigens wordt Cantors onderscheid tussen 'eigenlijke' en 'oneigenlijke' verzamelingen in de verzamelingenleer op informele wijze nog wel gehanteerd, alleen spreekt men liever van verzamelingen en (echte) klassen. De uitspraak "de klasse der ordinaalgetallen is welgeordend" bekt iets lekkerder dan de formele versie: "voor elke welgevormde formule $\psi(x)$ met x als vrije variabele en met de eigenschap dat er een ordinaalgetal α is dat aan ψ voldoet, is er een kleinste ordinaalgetal dat aan ψ voldoet".

Andere toepassingen

De diagonaalmethode is op vele problemen toepasbaar.

De bekendste onmogelijkheidsbewijzen uit de mathematische logica maken alle gebruik van een versie van Cantors idee om op een diagonaal alle elementen om te klappen. De eerste onvolledigheidsstelling van Gödel, Turings oplossing van het beslissingsprobleem en Tarski's stelling ([14]) over de ondefinieerbaarheid van waarheid in $\mathbb{N}$. Telkens wordt er een welgedefinieerde lijst gemaakt met een welgedefinieerde diagonaal en een geschikte omklapprocedure leidt tot de gewenste onmogelijkheid.

Tarski's stelling is van de drie wellicht de minst bekende, daarom hier een korte beschrijving. Zoals Gödel liet zien in het bewijs van zijn onvolledigheidsstellingen kunnen we aan elke (welgevormde) formule, ϕ, in de taal van de rekenkunde een nummer, $\#\phi$, toekennen, en wel zo dat van elk natuurlijk getal mechanisch vastgesteld kan worden of het een nummer van zo'n formule is. Laat F de verzameling van de nummers van formules zijn en T de deelverzameling van F die bestaat uit de nummers van de formules die waar zijn in $\mathbb{N}$. Van het nummer van de formule die de grote stelling van Fermat uitdrukt weten we dat dit tot T behoort; van de formalisering van het vermoeden van Goldbach weten we dat nog niet. De stelling van Tarski zegt nu dat T *niet* definieerbaar is, in de zin dat er *geen* formule, φ, in de taal der rekenkunde is met één vrije variabele en die voldoet aan $T = \{n : \varphi(n)\}$. Op de diagonaal die hier tot de tegenspraak leidt staat voor elke formule ψ een gesloten formule ψ' met de eigenschap dat $\psi' \leftrightarrow \psi(\#\psi')$ bewijsbaar is in de elementaire rekenkunde en dus waar in $\mathbb{N}$. Toepassing op de negatie van φ levert een formule θ met de eigenschap dat $\theta \leftrightarrow \neg\varphi(\#\theta)$ waar is.

Het idee van diagonaliseren vinden we al eerder bij Paul du Bois-Reymond in [1]: gegeven een rij positieve en stijgende functies $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \lambda_3(x), \ldots$ op het interval $[0, \infty)$ die voldoen aan

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\lambda_n(x)}{\lambda_{n+1}(x)} = \infty$$

voor alle n, bestaat er een stijgende positieve functie ψ die voldoet aan $\lim_{x\to\infty} \psi(x) = \infty$ en voor alle n aan

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\lambda_n(x)}{\psi(x)} = \infty.$$

De constructie is redelijk recht-door-zee: neem een stijgende rij $x_1, x_2, x_3, \ldots$ met de eigenschap dat

$$\lambda_1(x) > \cdots > \lambda_n(x) \geq n$$

als $x \geq x_n$ en laat ψ de stuksgewijs lineaire functie zijn die voldoet aan $\psi(0) = 0$ en $\psi(x_n) = n$ voor alle n.

Het verschil met de methode van Cantor is de keuzevrijheid die men op de n-de stap nog heeft en dit maakt deze techniek heel flexibel. Du Bois-Reymond zelf gebruikte hem bij zijn onderzoek naar het groeigedrag van reële functies en ook bij classificaties van positieve convergente en divergente reeksen.

Het andere diagonaalargument

Zoals hierboven al genoemd zien we in populariseringen vaak het volgende argument voor de overaftelbaarheid van $\mathbb{R}$. Neem een aftelling, zeg $x_1, x_2, x_3, \ldots$ van het interval $(0, 1)$ en schrijf van iedere x_n de decimale ontwikkeling op:

$$x_n = 0.d_{n,1}d_{n,2}d_{n,3}\ldots$$

(met voorkeur voor de ontwikkeling die in negens eindigt). Maak vervolgens een rij cijfers $d_1, d_2, d_3, \ldots$ die voldoende veel afwijkt van $d_{1,1}, d_{2,2}, d_{3,3}, \ldots$, namelijk zó dat het getal $0.d_1d_2d_3, \ldots$ ongelijk is aan alle x_n. Daar zijn tientallen recepten voor, bijvoorbeeld $d_i = d_{i,i} + 3$ modulo 10.

Het is dit argument waar veel mensen een probleem mee hebben. De logicus Wilfred Hodges schreef een lezenswaardig artikel, [10], over de vele artikelen die hij als referee of redacteur onder ogen kreeg en waarin de auteurs hun bezwaren tegen, en weerlegging van, het diagonaalargument hadden neergeschreven.

Op het web vindt men regelmatig discussies over het diagonaalargument waarbij wiskundige redeneringen het al gauw af moeten leggen tegen ad-hominemargumenten. In de hoogtijdagen van de usenetnieuwsgroepen staken dit soort discussies regelmatig de kop op. Op http://groups.google.com kunt U zien hoe het er vroeger in groepen als sci.math en sci.math.logic aan toe ging. Het is op Reddit (www.reddit.com/r/math) al niet veel beter; de zoekterm 'cantor diagonal' levert genoeg materiaal voor een regenachtige middag leeswerk.

Wie echter de moeite neemt het verzameld werk van Cantor, [6], door te ploegen zal dit bewijs niet tegenkomen. Ook Joseph Dauben noemt dit bewijs niet in zijn biografie van Cantor [7].

De vroegste plek waar ik dit bewijs heb kunnen vinden is op pagina 43 in [15] en daar wordt het als "Cantor's second proof" aangemerkt, nota bene onder verwijzing naar [3].

Wat mij betreft mag dit bewijs de prullenmand in. Het kan niet in de schaduw staan van het bewijs uit 1874, dat zonder verdere aritmetisering laat zien dat een lijn in het vlak overaftelbaar is, en ook niet in die van het bewijs uit 1890/91, dat zonder gevalsonderscheiding of wat dan ook recht op het doel af gaat.

Ten slotte: Cantors stellingen en bewijzen zijn direct, niet uit het ongerijmde. De meeste presentaties beginnen met "Stel f is een bijectie ..." en roepen aan het eind "Tegenspraak!", zonder dat in het bewijs ooit gebruikt is dat f bijectief verondersteld is. Typisch een geval van wat Leonard Gillman in [8] een "spurious contradiction" noemde.

Referenties

1 Paul du Bois-Reymond, Ueber asymptotische Werthe, infinitäre Approximationen und infinitäre Auflösung von Gleichungen. Nachträge, *Mathematische Annalen*, 8 (1875), 363–414.

2 Georg Cantor, Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen, *Crelles Journal für Mathematik* 77 (1874), 258–262.

3 Georg Cantor, Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre, *Jahresbericht der Deutschen Mathematischen Vereinigung* 1 (1890–91), 75–78.

4 Georg Cantor, Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre (Erster Artikel), *Mathematische Annalen*, 46 (1895), 491–512.

5 Georg Cantor, Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre (Zweiter Artikel), *Mathematische Annalen*, 49 (1897), 207–246.

6 Georg Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, Springer, Berlin, 1980.

7 Joseph Warren Dauben, *Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990.

8 Leonard Gillman, *Writing Mathematics Well: a Manual for Authors*, Mathematical Association of America, 1987.

9 Klaas Pieter Hart, De Continuümhypothese, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5/10 (2009), 33–39.

10 Wilfred Hodges, An editor recalls some hopeless papers, *Bulletin of Symbolic Logic* 4 (1998), 1–16.

11 E. Noether en J. Cavallès, *Briefwechsel Cantor–Dedekind*, Actualités Scientifiques et Industrielles No. 518, Hermann, Parijs, 1937, 61 p.

12 Bertrand Russell, On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types, *Proceedings of the London Mathematical Society* s2–4 (1907), 29–53, doi: 10.1112/plms/s2-4.1.29.

13 Thoralf Skolem, Einige Bemerkungen zur Axiomatischen Begründung der Mengenlehre, *Matematikerkongressen i Helsingfors den 4–7 Juli 1922*, Den femte skandinaviska matematikerkongressen, Redegörelse, Akademiska Bokhandeln, Helsinki, 1923, pp. 217–232.

14 Alfred Tarski, Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen, *Studia Philosophica* 1 (1936), 261–405.

15 William Henry Young en Grace Chisholm Young, *The Theory of Sets of Points*, Cambridge University Press (1906); herdruk in Cambridge Library Collection — Mathematics (2009).

16 Ernst Zermelo, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, *Mathematische Annalen* 65 (1908), 261–281.