

Vivi Rottschäfer

Mathematisch Instituut

Universiteit Leiden

vivi@math.leidenuniv.nl

Onderzoek Vidi-project

# Singulariteiten

Van 1 januari 2007 tot 1 september 2014 werkt Vivi Rottschäfer aan het Vidi-project 'Formation of singularities in natural systems'. In dit onderzoek naar singulariteiten ligt de focus op onderwerpen met concrete toepassingen. In dit artikel blik je terug op het project.

Het onderzoek van mijn Vidi-project gaat over het ontstaan van zogenaamde singulariteiten. Singulariteiten zijn structuren die continu blijven groeien in de tijd. Dit soort structuren worden bijvoorbeeld geobserveerd in optische apparaten, plasmafysica en in chemotaxis in bacteriekolonies. Uiteindelijk zal zo'n singulariteit niet plaatsvinden, maar het is wel mogelijk dat een laser hierdoor beschadigt. Daarbij geeft het voorkomen van dit soort structuren aan dat het gebruikte model niet meer correct is en dat er mogelijk een andere fase van het proces begint.

## Blowup-oplossingen

De modellen die de dynamica van de fysische, biologische of chemische processen beschrijven zijn stelsels van partiële differentiaalvergelijkingen. Voor veel van dit soort modellen bestaan er begrensde oplossingen met een specifieke structuur zoals een puls, golffront of lopende golf (zie Figuur 1).

Wanneer dergelijke oplossingen inderdaad bestaan is de stabiliteit ervan interes-

sant, dit is dus ook een veel bestudeerde vraag. Een oplossing die stabiel is, wordt namelijk ook geobserveerd, terwijl een instabiele oplossing meer een theoretisch geval is dat in het echt niet zal worden waargenomen. Een oplossing is instabiel als een kleine verstoring ervan niet uitdempt. Een volgende vraag is in dat geval dus wat er wél gebeurt met zo'n kleine verstoring. De mogelijkheid bestaat dat deze verstoringen groeien en blijven groeien waarna de oplossing, of de afgeleide ervan, in de limiet naar oneindig gaat voor een zekere eindige waarde van de tijd, zie Figuur 2 voor voorbeelden. Figuur 2 (links) is een simulatie van de zogenaamde Ginzburg-Landau-vergelijking in dimensie  $d = 3$ , [1] en Figuur 2 (rechts) een simulatie van een reactie-diffusie-model zoals bestudeerd in [2].

Deze oplossingen worden oneindig in eindige tijd, ze blazen op, en worden blowup-oplossingen genoemd. Wij bestuderen de existentie van deze blowup-oplossingen. De algemene aanpak die we daarvoor gebruiken is de methode van 'dynamische herschaling'

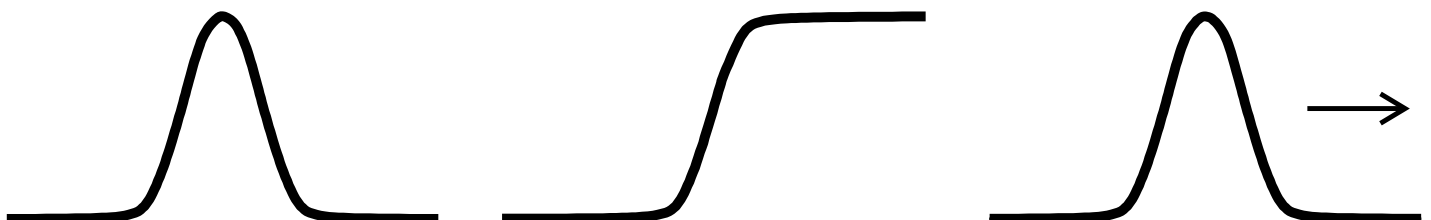
waarbij zowel de oplossing als de plaats- en de tijdvariabelen herschaald worden, waarna de resulterende vergelijking geen singuliere oplossingen meer heeft. Voor de herschaalde vergelijking zijn we geïnteresseerd in begrensde oplossingen, aangezien deze dus corresponderen met blowup oplossingen van het originele model. Ik zal deze methode illustreren aan de hand van een voorbeeld: door deze toe te passen op de *niet-lineaire Schrödingervergelijking*. Voor andere modellen is de globale aanpak soortgelijk.

## Niet-lineaire Schrödingervergelijking

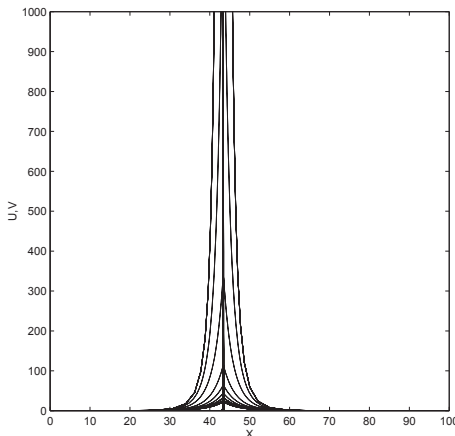
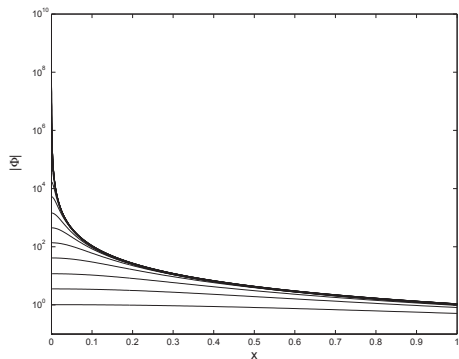
In het vervolg zal de focus liggen op oplossingen van de niet-lineaire Schrödingervergelijking (NLS)

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla^2 \Phi + |\Phi|^2 \Phi = 0,$$

die voldoen aan  $|\Phi| \rightarrow 0$  voor  $|x| \rightarrow \infty$ . Wij bestuderen deze vergelijking in algemene dimensies  $d$ , ook niet-gehele dimensies. Fysisch gezien is dat natuurlijk vreemd maar in numerieke simulaties en voor de analyse is het erg handig, zoals zo meteen zal blijken. Het is bekend dat voor de NLS alle



Figuur 1 Een puls, golffront en een lopende golf.



**Figuur 2** Een simulatie van de Ginzburg-Landau-vergelijking in dimensie  $d=3$  [1] (links), en een simulatie van een reactie-diffusie model zoals bestudeerd in [2] (rechts).

oplossingen begrensd zijn voor  $d < 2$ . Voor  $d \geq 2$  daarentegen bestaan er beginvoorwaarden waarvoor de norm van de oplossing opblaast in  $x = 0$ :

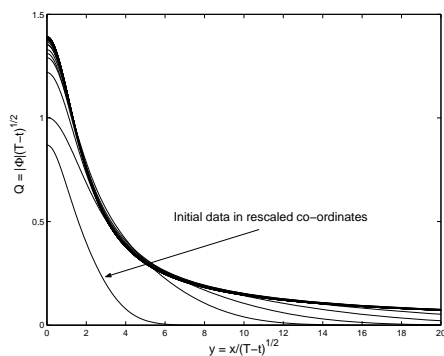
$$|\Phi(0, t)| \rightarrow \infty \text{ voor } t \rightarrow T.$$

Een numerieke simulatie van deze vergelijking geeft voor  $d = 3$  resultaten die sterk lijken op Figuur 2(links), aangezien de NLS verkregen kan worden door in de Ginzburg-Landau-vergelijking termen nul te stellen.

Om blowup-oplossingen van de NLS te bestuderen introduceren we de volgende herschaling voor  $\Phi$ :

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{L(t)} u(\xi, \tau),$$

waarbij  $L(t)$  gerelateerd is aan de norm van



**Figuur 3** Numerieke simulatie van de tijdafhankelijke uitbreiding van de  $Q$ -vergelijking (1) die correspondeert met de simulatie in Figuur 2(links).

de oplossing die opblaast en  $u$  een nieuwe *begrensde* oplossing is. We kiezen  $L(t)$  zodanig dat  $L(t) \rightarrow 0$  voor  $t \uparrow T$  waarbij  $T$  de blowup-tijd is, dit garandeert dat  $\Phi$  naar  $\infty$  gaat voor  $t \uparrow T$ . Voor de specifieke formulering van de herschaling wordt gebruik gemaakt van invarianties in het model en van het feit dat de blowup-oplossingen, in numerieke simulaties, zogenaamd *self-similar* gedrag vertonen. Hierbij hangen de oplossingen af van een (nieuwe) variabele die een functie is van zowel  $x$  als  $t$ . In de herschaling is  $\xi$  de nieuwe plaats-variabele en  $\tau$  de nieuwe tijd-variabele waarvoor geldt dat  $\tau \rightarrow \infty$  voor  $t \uparrow T$ .

Voor de NLS gaat de aandacht allereerst uit naar radieel symmetrische oplossingen waarvoor de dynamische herschaling als volgt wordt gekozen:

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{L(t)} u(\xi, \tau) \text{ met } L(t) = \sqrt{2a(T-t)}$$

en

$$\xi = \frac{|x|}{L(t)}, \quad \tau = \frac{\log(T-t)}{2a}.$$

Hierbij is  $|x|$  de radieële coördinaat en er geldt inderdaad dat  $L(t) \rightarrow 0$  voor  $t \uparrow T$ . Na substitutie van deze herschaling reduceert de NLS naar een vergelijking voor  $u$ . Uit numerieke simulaties blijkt dat de oplossing van de vergelijking voor  $u$  stationair, een vast profiel is, op een lineair groeiende fase in  $\tau$  na. Dit suggereert dat we geïnteresseerd zijn in oplossin-

gen  $u$  van de vorm  $u = e^{i\tau} Q(\xi)$ . Uiteindelijk geeft deze aanname de volgende vergelijking voor  $Q$ :

$$Q_{\xi\xi} + \frac{(d-1)}{\xi} Q_{\xi} - Q + ia(\xi Q)_{\xi} + |Q|^2 Q = 0. \tag{1}$$

Door te eisen dat

$$Q_{\xi}(0) = 0, \quad \text{Im}Q(0) = 0,$$

worden radieel symmetrische oplossingen gevonden. Numerieke simulaties suggereren bovendien dat  $a$  constant is en dat nemen we dus aan. Merk op dat de dimensie  $d$  in de vergelijking verschenen is als parameter zodat we deze continu kunnen variëren. Dit geeft dus de mogelijkheid om voor  $d$  ook een niet-gehele waarde te kiezen.

Begrensde oplossingen van (1) met de gegeven beginvoorwaarden die voldoen aan  $|Q(\xi)| \rightarrow 0$  voor  $\xi \rightarrow \infty$  corresponderen door de herschaling met oplossingen van de NLS die in eindige tijd opblazen. In Figuur 3 is de numerieke simulatie gegeven van de (tijdsafhankelijke) uitbreiding van vergelijking (1) die correspondeert met de simulatie in Figuur 2(links). Hierin gaat de oplossing  $|Q|$  als functie van  $\xi$  inderdaad naar een vast profiel.

Voor het bestuderen van oplossingen van de  $Q$ -vergelijking (1) gebruiken we een combinatie van numerieke simulaties, asymptotische methodes en meetkundige technieken. Elk van deze methodes geeft een eigen bijdrage, waardoor de combinatie ervan heel sterk is en een compleet beeld geeft van het bestaan van oplossingen die in eindige tijd oneindig worden.

**Tot slot**

Mijn Vidi-project is per 1 september 2014 beëindigd, maar het onderzoek aan singulariteiten natuurlijk niet. Ik zal daar betrokken bij blijven, maar zeker ook ander onderzoek doen naar ‘nette’ begrensde oplossingen. Hierbij zullen toepassingen nog wel steeds een, mogelijk veel grotere, rol spelen.

**Referenties**

1 C.J. Budd, V. Rottschäfer en J.F. Williams, Multi-bump, blowup, self-similar solutions of the complex Ginzburg-Landau equation, *SIAM J. Appl. Dyn. Sys.* 4 (2005), 649-678.  
 2 A. Doelman en T.J. Kaper, Semi-strong pulse interactions in a class of coupled reaction-diffusion equations, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 2 (2003), 53-96.