

Gunther Cornelissen

Mathematisch Instituut  
Universiteit Utrecht  
g.cornelissen@uu.nl

Onderzoek Vici-project

# Differentiaalmeetkunde in de getaltheorie

Voor getaltheorie is geen enkel soort wiskunde te min; de koningin onder de wiskunde-disciplines heeft combinatoriek, algebra en algebraïsche meetkunde gebruikt, complexe analyse, representatietheorie, Lie-theorie, ergodentheorie, grootschalig rekenen, symbolisch rekenen, en het lijstje zou nog lang kunnen doorgaan. Getaltheorie is ook streng: de gebruikte methode moet iets voor je doen. In ieder geval had differentiaalmeetkunde nog niet veel voor getaltheorie gedaan. Gunther Cornelissen bespreekt zijn Vici-project, waar het precies om toepassingen in deze richting gaat.

Nog een slagje algemener dan differentiaalmeetkunde is niet-commutatieve meetkunde, en de feitelijke slogan van mijn Vici-project was: onderzoek of niet-commutatieve Riemannse meetkunde en getaltheorie iets voor mekaar kunnen betekenen. De sfeer is ietwat vertroebeld doordat hardcore niet-commutatieve meetkundigen overmatig enthousiast zijn over de mogelijke betekenis van hun vakgebied voor de getaltheorie, terwijl de droge *pauca sed matura*-getaltheoretici liever even de kat uit de boom kijken, of na vele jaren van niet ingeloste beloftes over de Riemann-hypothese of Hilberts 12de probleem het helemaal hebben afgeschreven. Ikzelf neem ergens een middenpositie in: ik heb een hekel aan grandioze beweringen, maar wil wel op zoek naar kruisbestuiving; de constructies en taal van het ene gebied leren en in verband brengen

met die van het andere gebied. En dan de daarbij passende beginnersfouten (mogen) maken... Dit project was mijn uitrusten van 'diamanten voor het kwantum', om het in typische Nederlandse clustertaal te zeggen.

## De basis ontbreekt?

Het beginpunt van het onderzoek was de vaststelling dat er in de niet-commutatieve meetkunde aan de kant van de 'high-brow' toepassingen heel wat gebeurt, terwijl er aan de basis best nog werk is. Er is geen 'Graduate Text' waaruit de theorie van spectrale tripels (= niet-commutatieve variëteiten) kan worden geleerd op een droge, ontbeende manier (zonder natuurkunde, zonder een heel curriculum differentiaalmeetkunde en operatoralgebra, et cetera). Er zijn ook niet genoeg voorbeelden van objecten en bijbehorende

morfismen. En erger nog, het natuurlijke begrip van isomorfisme, 'Morita-equivalentie', blijkt in deze context geen equivalentierelatie te zijn. Kan getaltheorie voorbeelden opleveren?

Een interessante bijdrage kwam met het promotie-onderzoek van Jan Jitse Venselaar, die alle niet-commutatieve  $n$ -dimensionale tori classificeerde en hun equivalenties in kaart bracht [1]. Onder andere gaf hij de eerste voorbeelden van (niet-triviale) equivalenties die ook echt omkeerbaar waren [2]. Een hoogtepunt in zijn onderzoek kwam toen hij het classificatieprobleem had herleid tot een probleem in de lineaire algebra, en dat toen niet kon oplossen; waarop hij het oorspronkelijke probleem met meetkunde oploste, en de stelling in de lineaire algebra een gevolg werd. Het resultaat is een nieuwe methode, en eindelijk ook een redelijk grote verzameling voorbeelden waarvoor de equivalenties min of meer begrepen zijn.

Bram Mesland kwam als post-doc op het project terecht. Hij had in zijn proefschrift in Bonn een notie van 'correspondentie' ingevoerd voor spectrale triples, die hij in Utrecht verder ging uitwerken [3]. Wij zijn nog steeds aan het werk om dit begrip te

### Het Vici-project in feiten

NWO project 639.033.705

From Arithmetic Geometry to Non-commutative Riemannian Geometry, and back

Looptijd: 2008–2014.

Budget: 1,25 miljoen euro.

Output: circa. 25 publicaties, 500 pp., 40 noemenswaardige stellingen.

Twee postdocs:

- Bram Mesland, ging als postdoc naar Warwick.
- Jorge Plazas, ging als postdoc naar Granada.

Vier promovendi:

- Jan Willem de Jong, *Zeta function rigidity - a view from noncommutative geometry*, 2011, ging bij Collis werken.
- Jan Jitse Venselaar, *Classification and equivalences of noncommutative tori and quantum lens spaces*, 2012, ging naar Caltech als postdoc.
- Janne Kool, *Graphs, curves and dynamics*, 2013, ging naar Bonn als postdoc.
- Sebastian Klein, *Chow groups and intersection products for tensor triangulated categories*, promoveert hopelijk in september 2014, daarna postdoc in Antwerpen.



De eerste jaren kon je enkel promoveren binnen dit project als je voornaam met 'Jan' begon, maar later werd deze regel flexibeler.

veralgemeniseren, opdat er een (Gromov–Hausdorff-achtige) metriek ontstaat op de ruimte van spectrale triples op (gesymmetriseerde) Morita-equivalentie na. Dankzij deze theorie, die hopelijk in 2015 wordt opgeschreven, kan je bijvoorbeeld zinvol praten over het limietobject van een cirkel met een groepsactie als de straal van de cirkel naar nul gaat (en zodat het limietobject nog iets van de groepsactie weet).

### Spectra, invarianten, en reconstructie

Het is de bedoeling van 'spectrale tripels' om meetkunde met spectrale invarianten te doen, en dan is het een natuurlijke vraag of er een complete set van spectrale invarianten is voor een gegeven ruimte, die hem uniek op 'isometrie' na karakteriseert. Het Laplace-spectrum zelf doet het niet altijd; dat is het probleem van de 'isospectraliteit', of, meer plastisch verwoord: "You cannot hear the shape of a drum." De spectrale invarianten worden samengepakt in zeta-functies, en daardoor voelt de getaltheoretie zich meteen aangesproken. Ik had met Matilde Marcolli al een constructie gegeven van voldoende spectrale invarianten voor het karakteriseren van Riemann-oppervlakken, door gebruik te

maken van maat-theoretische rigiditeit à la Mostow, en in het proefschrift van Jan Willem de Jong wordt het voor grafen en Riemannse variëteiten gedaan [4]. Omdat spectra diffeomorfisme-invarianten zijn, lijkt dit resultaat ook relevant voor de kwantisatie van gravitatie. Per slot van rekening is alle 'waarneming' (geluid, licht, ...) intrinsiek spectraal, dus eigenlijk is een beschrijving met behulp van spectra in plaats van coördinaten veel natuurlijker.

Dit was de inspiratie voor wat ik het leukste deel van het onderzoek vond: kan zo iets ook voor getallenlichamen? Bost en Connes hadden een kwantum-statistisch mechanisch systeem opgesteld met als partitie-functie de Riemann-zeta-functie, en Ha en Paugam schreven begin deze eeuw een variant op voor een algemeen getallenlichaam, waarvan de partitie-functie de Dedekind-zeta-functie  $\zeta_K$  van het getallenlichaam  $K$  is. Sinds oud werk van Gauss uit de jaren twintig weten we dat  $\zeta_K$  het lichaam  $K$  bepaalt als  $K$  een normale lichaamsuitbreiding is van  $\mathbb{Q}$ . De eerste voor de hand liggende vraag wordt: als de systemen van twee getallenlichamen 'isomorf' zijn, zijn de zeta-functies dan gelijk? Dit was niet al te moeilijk, en met Marcolli had

ik het binnen een week uitgewerkt. Nu werd het ambitieuzer: zijn de lichamen dan ook isomorf? Dit is filosofisch interessant, omdat de systemen enkel informatie over abelse uitbreidingen van  $K$  gebruiken, terwijl de klassieke stellingen in deze richting (van Uchida) ook niet-abelse uitbreidingen nodig hebben.

Het werd een lang reconstructie-bewijs, vol verraderlijk gladde plekken [5]. Het is dan ook nog steeds niet af: ik heb het nu in vier stukken opgehakt die in 2015 uitkomen. Ondertussen heb ik het wel voor functielichamen (krommen over eindige lichamen) bewezen, waar het veel korter kan [6]. Omdat alles ook puur getaltheoretisch te formuleren is in termen van  $L$ -reeksen (die te voorschijn komen uit de evenwichtstoestanden van het systeem) was er aanvankelijk veel enthousiasme voor het resultaat, maar ondertussen hebben de rangen zich weer gesloten, en is onze ontdekking als 'odeloos ingewikkeld' weggezet [7].

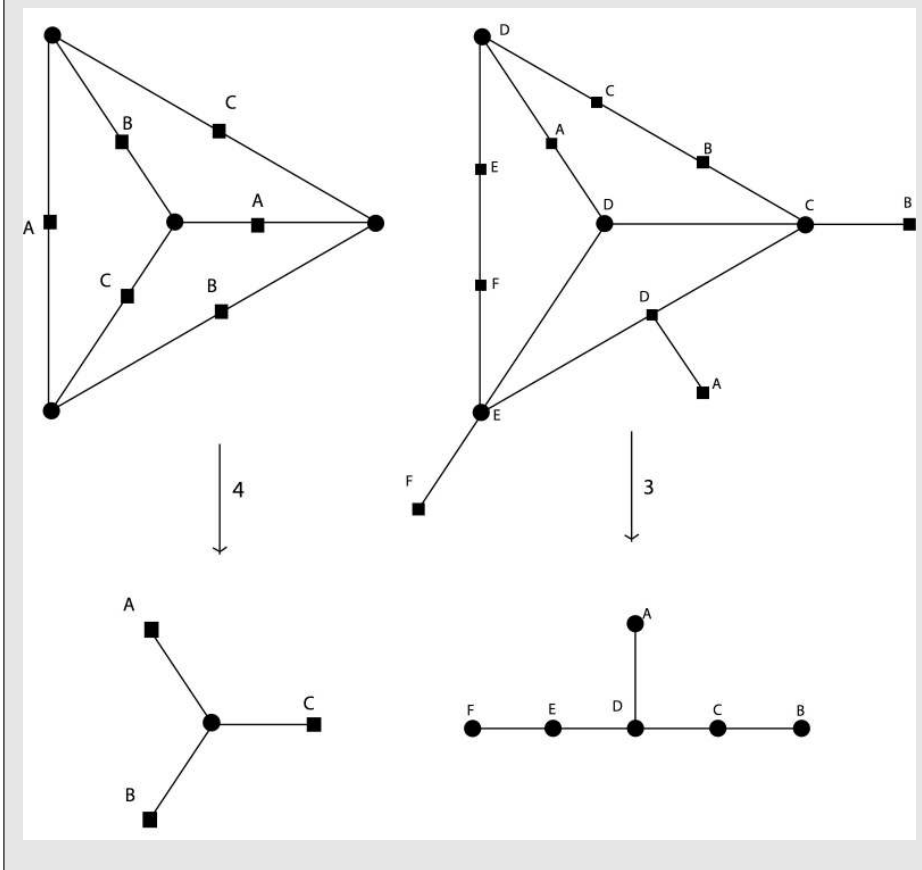
Ondertussen kwamen er, waarschijnlijk door deze combinatie van kwantumtheorie met getaltheorie, een paar natuurkundigen bij me langs met vragen over elliptische krommen, die ik ook nog eens kon oplossen, en zo komen in het Vici-project ook publicaties over membraanmodellen van het universum voor [8].

### Een $p$ -adische variant

Aldus komen we bij de  $p$ -adische variant van dit alles. Janne Kool schreef binnen het project een fascinerend proefschrift, waarin, na het invoeren van dynamica met  $p$ -adisch waardige maten, eerst maat-theoretische rigiditeit voor  $p$ -adische uniformiseerbare krommen werd bewezen [9]. Het hoogtepunt van dit deel van het onderzoek was het  $p$ -adische analogon van de Li–Yau-ongelijkheid voor gonaliteit van Riemann-oppervlakken [10]. Het oorspronkelijke resultaat, dat Li en Yau differentiaal-meetkundig bewezen in verband met de theorie van minimale oppervlakken ('zeepbellen'), geeft een ondergrens voor de minimale graad van een afbeelding van een Riemann-oppervlak  $X$  naar de Riemann-sfeer in termen van het volume en het Laplace-spectrum van  $X$ . In onze variant is het een ondergrens voor de graad van een harmonische afbeelding van een graaf (en zijn verfijningen) naar een boom in termen van invarianten van de graaf. Het bewijs lijkt in niets op het origineel, en de irregulariteit van de graaf speelt ons parten. Uiteindelijk kan je met deze 'differentiaalmeetkunde' bepaalde diophantische problemen op-

### Brill–Noether voor grafen

Stel dat  $K_4$  de complete graaf is met vier knopen. De minimale graad van een grafenmorfisme van  $K_4$  naar een boom is 4, en links in de figuur staat een voorbeeld van een dergelijke afbeelding. Voor de minimale graad van een morfisme van een Riemann-oppervlak naar een sfeer bestaat de Brill–Noether-bovengrens:  $\frac{g+3}{2}$ , waarbij  $g$  het aantal onafhankelijke lussen op het oppervlak is. Dit heeft ook zin voor grafen, en  $K_4$  heeft 3 onafhankelijke lussen, dus de bovengrens wordt 3. Maar de minimale graad was 4? De Brill–Noether-bovengrens blijkt wel degelijk ook te kloppen voor grafen, maar het grafenmorfisme mag van een *verfijning* van de graaf naar een boom gaan. Hier betekent ‘verfijnen’ het onderverdelen van kanten en het toevoegen van losse kanten. Rechts in de figuur staat een dergelijke verfijning van  $K_4$  met een morfisme van graad 3 naar een boom. In het werk van Janne Kool gaat het om het vinden van een *ondergrens* voor deze minimale graad.



lossen. Interessant is ook een verband met ‘boombreedte’, een concept uit de theoretische informatica, en zandhoopmodellen uit de stochastiek.

### Een categorische variant

Tenslotte is er een andere ‘niet-commutatieve’ kijk op meetkunde, namelijk, via categorietheorie. Het blijkt onmogelijk om een niet-commutatieve projectieve variëteit te maken door het ‘plakken’ van spectra van niet-commutatieve ringen, zoals dat commutatief gebruikelijk is. Maar een projectieve variëteit kan worden gecodeerd in de tensor-getrianguleerde categorie van zijn perfecte complexen. Je kan dus proberen niet-

commutatief rechtstreeks te werken met zulke categorieën. In de natuurkunde komt dit voor in de homologische variant van spiegelsymmetrie, als ‘intersecting  $D$ -branes’. In zijn proefschrift heeft Sebastian Klein intersectietheorie ontwikkeld voor dergelijke algemene tensor-getrianguleerde categorieën [11]. Zijn nieuwe theorie staat pas in de kinderschoenen, maar lijkt een functoriële constructie te zijn met veel potentieel — ze bevat misschien wel een goede intersectie-theorie voor singuliere variëteiten. In ieder geval heb ik nu geleerd dat een cykel *niet* een lineaire combinatie is van deelvariëteiten, maar een eindig rijtje elementen uit de  $K_0$ -groepen van quotiëntcategorieën,

en voor gladde variëteiten zijn die groepen ‘toevallig’ de gehele getallen.

### Conclusie

Hiermee is de inhoud van het project grosso modo gedekt. Het werd een interessante tocht die bij klassieke differentiaalmeetkunde begon en via meer natuurkundegeïnspireerde ideeën uitkwam bij combinatorische en categorie-theoretische beschouwingen.

Het project had veel onverwachte wendingen en euforische momenten. Ik ben echt trots op de uitkomst, ook op het excellente werk van het hele team, en in het bijzonder de promovendi, die ieder hun eigen lijn en hun eigen wiskundige persoonlijkheid hebben ontwikkeld. Om een ‘school’ te maken, zoals de meeste wetenschappers doen, past helemaal niet bij mijn eigen springerigheid. Maar ik mis mijn oud-teamgenoten nu al; misschien is dat deel van mijn ontwenningverschijnselen.

### Voor en tegen de ‘Vernieuwingsimpuls’

Mijn houding ten opzichte van het Vernieuwingsimpuls-schema is erg ambivalent. Het is een unieke kans om riskant onderzoek te financieren, uitgevoerd in een voor wiskunde ongebruikelijke vorm: met tijdelijk een redelijk grote groep onderzoekers en bijbehorende focus. NWO kon hiermee, buiten het structurele onderzoeksgeld van de universiteiten om, *extra* onderzoek gaan financieren — heerlijk. Maar de afgelopen jaren heeft er een ‘aardverschuiving’ plaatsgevonden in de financiering van wetenschap. ‘Aard’ betekent hier ‘Geld’; in bijbelse taal ook bekend als ‘Slijk’. Het vernieuwingsimpuls-budget is niet meer ‘extra’ — wat het volgens mij zou moeten zijn, om echt riskant te ‘vernieuwen’ — maar het is de ruggengraat geworden van de financiering van de wetenschap; een overlevensnoodzaak voor departementen en universiteiten. Dit heeft allerlei nare gevolgen: bevorderingen en benoemingen hangen af van het binnenhalen van deze subsidies; en gedegen aanstellingsbeleid is vervangen door het pragmatisch aantrekken van de wetenschappers die dit soort geld hebben. De combinatie met het Mattheus-effect (“wie heeft, zal meer krijgen”) en steeds meer thematisch sturen door of via NWO is erg ongelukkig, want wie weet wat ‘belangrijk’ zal worden? Is ‘weinig, groot en gestuurd’ beter dan ‘velen, klein en vrij’? (Leest allen het interview dat Higgs gaf aan *The Guardian* nadat hij de Nobelprijs ontving [12].) Natuurlijk komt kwaliteit bovendien (zie mijzelf, ha-

**Het Vici-project in stellingen en definities**

Hierbij een aantal (meer technisch geformuleerde) resultaten van het project.

**Stelling** (C). *Twee globale functielichamen  $K$  en  $L$  zijn isomorf precies als er een groepsisomorfisme  $\psi$  bestaat tussen de groepen van lineaire karakters van hun absolute Galois-groepen, zodat er identiteiten van  $L$ -reeksen zijn  $L(K, \chi) = L(L, \psi(\chi))$  voor alle  $\chi$ .*

**Stelling** (Venselaar). *Iedere  $n$ -dimensionale equivariante niet-commutatieve torus is een isospectrale deformatie van een commutatieve  $n$ -torus.*

**Stelling** (C-de Jong). *Een diffeomorfisme  $\varphi$  tussen twee Riemannse variëteiten  $X$  en  $Y$  met enkelvoudig Laplace-spectrum is een isometrie precies als  $\text{tr}(\varphi^*(a) \Delta_X^s) = \text{tr}(a \Delta_Y^s)$  voor alle functies  $a \in C^\infty(Y)$ .*

**Stelling** (C-Kato-Kool). *Als de intersectie-duale graaf  $G$  is van het stabiele model van een kromme  $X$  over een compleet niet-archimedisch lichaam  $k$   $n$  knopen heeft, dan is de gonality van  $X$  beneden begrensd door  $\lambda n / (5\lambda + 4)$ , waarbij  $\lambda$  de kleinste niet-nul eigenwaarde is van de Laplace-operator van  $G$ .*

**Definitie** (Klein). *Een functoriële definitie van Chow groep en intersectieproduct in een tensorgetrianguleerde categorie.*

**Definitie** (C-Mesland). *Een afstand in de ruimte van spectrale triples, zodat afstand nul precies Morita-equivalentie betekent.*

hal), maar het is wel altijd *hetzelfde soort kwaliteit*. Voor een omstreden project kan je bij definitie geen vijf referenten vinden die het allemaal top vinden. Een onhandige aanvrager geeft een knullig interview, wat dan? Laat ons een stapje terugzetten en vragen: is dit alles nog een impuls voor vernieuwing? Waar is het radicale, baanbrekende onderzoek?

Er rest NWO nog een vervolgprogramma op het succesvolle ‘Veni–Vidi–Vici’ te lanceren, mag ik voorstellen onder de naam *Brutus*, waarvan de winnaars tot de peer group van 1 procent voormalig meest succesvolle wetenschappers dienen te behoren, en die na het verkrijgen van tenminste vijf A++ (‘exemplary’) evaluaties door een commissie bestaande uit niet-vakgenoten definitief op een zijspoor worden gerangeerd. Ook gij, mijn maecenas? ←

**Referenties**

- 1 J.J. Venselaar, Classification of spin structures on the noncommutative  $n$ -torus, *J. Noncommut. Geom.* 7 (2013), 787–816.
- 2 J.J. Venselaar, Morita “Equivalences” of Equivariant Torus Spectral Triples, *Lett. Math. Phys.* 103 (2013), 131–144.
- 3 B. Mesland, Unbounded Bivariant  $K$ -Theory and Correspondences in Noncommutative Geometry, *J. Reine Angew. Math.* 691 (2014), 101–172.
- 4 G. Cornelissen en J.W. de Jong, The spectral length of a map between Riemannian manifolds, *J. Noncommut. Geom.* 45 (2012), 721–758.
- 5 G. Cornelissen en M. Marcolli, Quantum statistical mechanics, L-series and anabelian geometry, preprint, arXiv:1009.0736.
- 6 G. Cornelissen, Curves, dynamical systems, and weighted point counting, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 110 (2013), 9669–9673.
- 7 Vergelijk ook: M. Marcolli, *The Sombor Science (a theater play)*, beschikbaar op lulu.com (2013).
- 8 N. Akerblom en G. Cornelissen, A compact codimension two braneworld with precisely one brane, *Phys. Rev. D* 81 (2010), 124025.
- 9 G. Cornelissen en J. Kool, Measure theoretic rigidity for Mumford curves, *Ergodic Th. Dyn. Sys.* 33 (2013), 851–869.
- 10 G. Cornelissen, F. Kato and J. Kool, A combinatorial Li–Yau inequality and rational points on curves, *Math. Ann.* (2014), 50 pp., arXiv: 1211.2681.
- 11 S. Klein, *Chow Groups and Intersection Products for Tensor Triangulated Categories*, proefschrift (2014).
- 12 Peter Higgs interview: ‘I have this kind of underlying incompetence’, *The Guardian*, posted online 6 December 2013 on <http://www.theguardian.com/science/2013/dec/06/peter-higgs-interview-underlying-incompetence>.