Jan van Neerven
Faculteit EWI/DIAM
TU Delft
j.m.a.m.vanneerven@tudelft.nl

Onderzoek Vidi- en Vici-project

Stochastische integratie in Banachruimten

Jan van Neerven ontving in 2002 een Vidi-subsidie voor het project 'Stochastic Integration in Banach Spaces and Applications to Stochastic Evolutions' en in 2007 een Vici-subsidie voor het project 'Infinite-Dimensional Stochastic Analysis and Harmonic Analysis'. In dit artikel blikt hij terug op twaalf jaar Vernieuwingsimpuls.

Al weer een jaar of twaalf geleden zat ik eens te puzzelen aan een probleem toen er aan mijn deur werd geklopt: een onverwacht bezoekje van de toenmalige decaan. Ik was net UHD geworden en de decaan zag daarin een goede aanleiding om een aanvraag in te dienen voor een Vidi-subsidie. Onderzoeksgeld aanvragen was iets dat ik nog associeerde met het postdoc-bestaan dat ik juist achter mij had gelaten, en ik had mij nog niet georiënteerd op de Vernieuwingsimpuls die toen net van start was gegaan. Nu was ik net samenwerking met Lutz Weis uit Karlsruhe aangegaan om een theorie van stochastische integratie in Banachruimten te ontwikkelen. Zoiets heb je nodig om stochastische partiële differentiaalvergelijkingen op functionaalanalytische wijze te behandelen, met name als je daarvoor L^p-theorie wilt ontwikkelen (daarover zo dadelijk meer). Zo'n theorie was er nog niet, en sterker nog, veel collega's in het vakgebied dachten dat zoiets helemaal niet kon. Een uitdagend en risicodragend project dus, dat goed leek te passen in de strategie van de Vernieuwingsimpuls.

De referentenrapporten waren prima en ik werd uitgenodigd voor een interview. De begeleiding van projectaanvragen indienen was in die tijd nog niet zo geprofessionaliseerd, dus oefende ik mijn presentatie nogal informeel in het bijzijn van de decaan en een hoogleraar. Wat ik mij vooral herinner is de tip om een overheadsheet (het presenteren met beamers was nog niet de standaard) toe te voegen over 'positionering', iets waar ik nog nooit over had nagedacht.

Als wiskundige verwacht je in een interview met een panel dat deels bestaat uit niet-wiskundigen veel vragen over mogelijke toepassingen van het voorgestelde onderzoek. Maar dit onderwerp kwam nauwelijks ter sprake. De meest onverwachte vraag kwam van een van de niet-wiskundige panelleden die met een brede grijns te kennen gaf het voorstel weliswaar 'erg geleerd' te vinden, maar of ik hem ook kon uitleggen wat een stochastische integraal nou eigenlijk is? Ik kan mij niet meer precies herinneren wat ik toen gezegd heb, maar kennelijk was de commissie tevreden want niet lang daarna ontving ik het heugelijke nieuws dat de aanvraag was gehonoreerd.

Stochastische integratie: het discrete geval

Nu zou ik de bovengenoemde vraag beantwoorden met de socratische constatering dat iedereen, misschien zonder het te weten, weet wat stochastische integratie is. Stel we zetten 10 euro in op de uitkomst $r_1 = \pm 1$ van een worp met een eerlijke munt (de 'r' staat voor 'Rademacher variabele'). De *winst* is de inzet $\times$ de uitkomst van de worp en bedraagt $10r_1$; in geval $r_1 = -1$ is de 'winst' negatief. Voorafgaand aan de volgende worp, die het toevalsgetal $r_2 = \pm 1$ oplevert, zetten we opnieuw een bedrag in, zeg 20 euro, en de winst bedraagt dit keer $20r_2$. Zo gaan we verder.

We kunnen dit als volgt formaliseren. Na de worpen $r_1, \ldots, r_{n-1}$ bepalen we de inzet f_{n-1} voor de $n$de worp. Na N worpen bedraagt de cumulatieve winst

$$\sum_{n=1}^{N} f_{n-1} r_n.$$

Belangrijk is dat de worpen onafhankelijk zijn en dat we niet in de toekomst kunnen kijken, wat er wiskundig op neerkomt dat de inzet f_{n-1} alleen mag afhangen van de uitkomsten $r_1, \ldots, r_{n-1}$, maar niet van $r_n, \ldots, r_N$ (we kunnen bijvoorbeeld de inzet verdubbelen na ieder verliespotje en stoppen na de eerste keer winst).

Het herhaald werpen van een eerlijke munt kunnen we beschrijven als een random walk. Zetten we

$$w_n := \sum_{j=1}^{n} r_j,$$

dan is het increment $w_n - w_{n-1} = r_n$ precies de uitkomst van de $n$de worp en kunnen we de cumulatieve winst $\sum_{n=1}^{N} f_{n-1} r_n$ schrijven als een 'random Stieltjes-integraal' over de indexverzameling $I = \{1, \ldots, N\}$:

$$\int_I f \, \mathrm{d}w = \sum_{n \in I} f_{n-1}(w_n - w_{n-1}).$$

Ziehier de eerste stochastische integraal!

Stochastische integratie: het continue geval

Vervangen we de (discrete) random walk w door een (continue) Brownse beweging W, dan kunnen we voor een interval I de stochastische integraal

$$\int_I f \, \mathrm{d}W$$

interpreteren als de cumulatieve winst bij het in real-time gokken op het verloop van de Brownse beweging. De functie f beschrijft de inzet als functie van de tijd; we maken winst als de Brownse beweging "dezelfde kant op gaat" als het voorteken van de inzet. Kansrekenaars zullen hier protesteren, want Brownse bewegingen zijn zo grillig dat ze met kans 1 nooit even één kant opgaan; maar dat terzijde.

Het voorgaande kan als volgt worden geformaliseerd. We beschouwen een Brownse beweging, die we beschrijven als een meetbare functie $W : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$; hierbij is Ω de onderliggende kansruimte, voorzien van een kansmaat die we met $\mathbb{P}$ zullen aanduiden. Onder een *random stapfunctie* verstaan we een functie f op $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ van de vorm

$$f(t,\omega) = \sum_{n=1}^{N} 1_{(t_{n-1},t_n]}(t) g_{n-1}(\omega),$$

waarbij alle g_{n-1} simpele functies zijn op Ω. Voor zulke f definiëren we

$$\int_0^\infty f \, \mathrm{d}W := \sum_{n=1}^{N} g_{n-1}\Big(W(t_{n-1}) - W(t_n)\Big).$$

Beide zijden geven een reëelwaardige toevalsvariable gedefinieerd op Ω; aan de rechterzijde gebruiken we de notatie $W(t) : \omega \mapsto W(t,\omega)$. We hebben nog niet uitgesloten dat we op geen enkel moment informatie uit de toekomst tot onze beschikking krijgen; deze impliciete veronderstelling omzetten, kunnen we vertalen naar de wiskundige aanname dat voor iedere $r \in \mathbb{R}_+$ de toevalsvariable $f(t) : \omega \to f(t,\omega)$ meetbaar is in de σ-algebra $\mathcal{F}_t$ gegenereerd door een Brownse beweging tot aan tijdstip t. We noemen het inzetproces f dan *aangepast* aan de Brownse beweging W.

Nu geldt de volgende fundamentele stelling van Itô uit de jaren veertig van de vorige eeuw, die het startpunt vormde van de theorie van stochastische differentiaalvergelijkingen:

Stelling 1 (Itô's isometrie). *Zij $f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ een aangepaste random stapfunctie. Dan geldt*

$$\int_\Omega \left| \int_0^\infty f \, \mathrm{d}W \right|^2 \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_\Omega \int_0^\infty |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Dankzij deze isometrie kunnen we de stochastische integraal uitbreiden naar willekeurige aangepaste kwadratisch integreerbare processen $f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ middels approximatie (dat de hierboven beschouwde klasse van random stapfuncties dicht ligt in de L^2-norm moet natuurlijk netjes bewezen worden, maar dat is niet zo moeilijk) en de Itô-isometrie geldt ook voor deze grotere klasse van processen. Voorts kunnen we, voor een deelinterval I van $\mathbb{R}_+$, definiëren

$$\int_I f \, \mathrm{d}W := \int_0^\infty 1_I f \, \mathrm{d}W.$$

De bovenstaande procedure is analoog aan de constructie van de Fourier–Plancherel-transformatie in $L^2(\mathbb{R})$: daar bewijst men de Plancherel-isometrie

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty \left| \int_{-\infty}^\infty e^{-2\pi i x y} f(y) \, \mathrm{d}y \right|^2 \mathrm{d}x \\ = \int_{-\infty}^\infty |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x\end{aligned} \tag{1}$$

eerst voor de Fourier-transformatie van functies in $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ en gebruikt deze isometrie vervolgens om de Fourier-transformatie uit te breiden naar een isometrie voor willekeurige $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Stochastische integratie in Banachruimten I

Vanaf nu zullen we integralen $\int_\Omega \xi \, \mathrm{d}\mathbb{P}$ afkorten tot $\mathbb{E}\xi$ en interpreteren als de verwachtingswaarde ('expectatie') van ξ. Met deze notatie neemt Itô's isometrie de vorm

$$\mathbb{E}\left| \int_0^\infty f \, \mathrm{d}W \right|^2 = \mathbb{E}\int_0^\infty |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t$$

aan. De vraag die we willen beschouwen is of (een versie van) de Itô-isometrie geldig is voor aangepaste processen $f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to X$, waarbij X een Banachruimte is. Voordat we ons hierop werpen, laten we ons eerst inspireren door de Fourier–Plancherel-isometrie. Geldt die ook voor functies $f \in L^2(\mathbb{R}; X)$, dat wil zeggen functies $f : \mathbb{R} \to X$ waarvoor $\int_{-\infty}^\infty \| f(t) \|_X^2 \, \mathrm{d}t < \infty$?

Voor *Hilbertruimten* X is het antwoord bevestigend; de enige verandering is dat het product xy in (1) nu geïnterpreteerd dient te worden als het inwendig product $\langle x, y \rangle$ in X en absolute waarden vervangen dienen te worden door normen in X. Met deze aanpassingen werkt het bewijs *mutatis mutandis*.

Veel dieper ligt de volgende stelling van Kwapień, die zegt dat als de Fourier–Plancherel-transformatie uitbreidt naar een begrensde lineaire transformatie op $L^2(\mathbb{R}; X)$, dan is X isomorf met een Hilbertruimte. Met andere woorden: zelfs als we 'isometrisch' afzwakken tot 'begrensd' is er alleen een vectorwaardige uitbreiding naar *Hilbert*ruimten X!

Met deze waarschuwing in gedachten kijken we nu naar vectorwaardige uitbreidingen van de Itô-isometrie. Ook deze breidt *mutatis mutandis* uit naar Hilbert-waardige processen. Karakteriseert dit feit wederom Hilbertruimten te midden van alle Banachruimten? Het antwoord is 'ja' en 'nee'. Als we alleen een begrensde uitbreiding wensen, dan is het antwoord 'nee'; als we een isometrische uitbreiding wensen is het antwoord 'ja'. Dit is interessant genoeg om even langer bij stil te staan.

Als we het bewijs van de Itô-isometrie analyseren (wat we hier niet zullen doen), blijkt dat het met enige handigheid (zie [9]) herleid kan worden op de 'isometrie'

$$\mathbb{E}\left| \sum_{n=1}^N d_n \right|^2 = \mathbb{E}\sum_{n=1}^N |d_n|^2 \tag{2}$$

voor zekere reëelwaardige toevalsvariabelen d_n die een zogenaamde martingaal-differentierij blijken te vormen. Voor het opzetten van een stochastische integraal via approximatie met random stapfuncties volstaat een ongelijkheid in (2) in plaats van gelijkheid. Dit motiveert de volgende definitie. Een Banachruimte X heeft *martingaal-type* 2 als er een constante C bestaat zodanig dat

$$\mathbb{E}\left\| \sum_{n=1}^N d_n \right\|_X^2 \le C^2 \mathbb{E}\sum_{n=1}^N \|d_n\|_X^2$$

voor iedere eindige martingaal-differentierij $(d_n)_{n=1}^N$ met waarden in X.

Kiyoshi Itô

We kunnen het bewijs van Stelling 1 nu overdoen voor aangepaste random stapfuncties f met waarden in X. Het resultaat is de volgende Itô-*ongelijkheid* voor Banachruimten X met martingaal-type 2:

$$\mathbb{E}\left\| \int_0^\infty f\,\mathrm{d}W \right\|_X^2 \le C^2 \mathbb{E} \int_0^\infty \|f(t)\|_X^2\,\mathrm{d}t. \quad (3)$$

Het is een 'back of the envelope'-oefening om na te gaan dat Hilbertruimten martingaal-type 2 hebben (met constante $C = 1$). Maar Hilbertruimten zijn geenszins het enige voorbeeld: de Lebesgue-ruimten $L^p(M,\mu)$, met (M,μ) een willekeurige maatruimte, hebben martingaal-type 2 voor iedere $p \in [2,\infty)$. In het bijzonder geldt de Itô-ongelijkheid (3) in $L^p(M,\mu)$ en kunnen we stochastische analyse bedrijven in deze ruimten. Deze observatie gaat terug op het werk van Hoffmann-Jørgensen en Pisier, Dettweiler en Neidhardt uit de jaren tachtig en is voor het eerst toegepast op stochastische PDV's door Belopol'skaya, Daletskiĭ en Brzeźniak.

Geldt ook een omgekeerde ongelijkheid in (3), dat wil zeggen is de Itô-ongelijkheid in feite een Itô-*isomorfisme*? Het blijkt dat de omgekeerde ongelijkheid

$$\mathbb{E} \int_0^\infty \|f(t)\|_X^2\,\mathrm{d}t \le C^2 \mathbb{E}\left\| \int_0^\infty f\,\mathrm{d}W \right\|_X^2 \quad (4)$$

geldt onder de 'duale' eigenschap *martingaal-cotype 2*. Voorbeelden van zulke ruimten zijn Hilbertruimten en de Lebesgue-ruimten $L^p(M,\mu)$ met $p \in [1,2]$.

Met behulp van een diepe stelling uit de Banachruimtetheorie, wederom van Kwapień, kan men nu bewijzen dat een Banachruimte X waarvoor (3) en (4) gelden isomorf is met een Hilbertruimte. Met andere woorden, de geldigheid van een Itô-isomorfisme

$$\mathbb{E}\left\| \int_0^\infty f\,\mathrm{d}W \right\|_X^2 \eqsim \mathbb{E} \int_0^\infty \|f(t)\|_X^2\,\mathrm{d}t$$

karakteriseert Hilbertruimten (met $\eqsim$ bedoelen we dat ongelijkheid in beide richtingen geldt met constanten onafhankelijk van f).

Slecht nieuws

Laten we even samenvatten wat we tot dusverre hebben gevonden. In Banachruimten X met martingaal-type 2 kunnen we ieder aangepast stochastisch proces $f \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega; X)$ stochastisch integreren tegen een Brownse beweging en de ongelijkheid (3) geldt. Anders gezegd, de stochastische integraal $f \mapsto \int_0^\infty f\,\mathrm{d}W$ is begrensd van $L^2_{\mathrm{a}}(\mathbb{R}_+ \times \Omega; X)$ naar $L^2(\Omega; X)$ (de 'a' staat voor de gesloten deelruimte van alle aangepaste processen). Via restrictie zien we dat, meer algemeen, voor ieder deelinterval I van $\mathbb{R}_+$ de afbeelding $f \mapsto \int_I f\,\mathrm{d}W$ begrensd is van $L^2_{\mathrm{a}}(I \times \Omega; X)$ naar $L^2(\Omega; X)$. We hebben eveneens gezien dat de ruimten $X = L^p(M,\mu)$ met $p \in [2,\infty)$ martingaal-type 2 hebben.

Hoe zit het met exponenten $p \in [1,2)$? Het blijkt dat voor $X = \ell^p$ ($= L^p(\mathbb{N},\tau)$ met τ de telmaat op $\mathbb{N}$) met $p \in [1,2)$ de afbeelding $f \mapsto \int_0^1 f\,\mathrm{d}W$, die dankzij de Itô-isometrie goed gedefinieerd is als lineaire afbeelding van $C[0,1] \otimes \ell^p$ naar $L^2(\Omega; \ell^p)$, geen uitbreiding heeft tot een begrensde lineaire afbeelding van $C([0,1]; \ell^p)$ naar $L^2(\Omega; \ell^p)$. Hier is $C[0,1] \otimes \ell^p$ het algebraïsch tensorproduct van $C[0,1]$ en ℓ^p, dat willen zeggen de vectorruimte opgespannen door alle functies van de vorm $t \mapsto g(t)x$ met $g \in C[0,1]$ en $x \in \ell^p$. Met andere woorden:

Yors observatie. *Voor $p \in [1,2)$ bestaan er continue functies $f : [0,1] \to \ell^p$ die niet stochastisch integreerbaar zijn tegen een Brownse beweging.*

Deze observatie van Yor [15] lijkt de doodssteek voor iedere poging tot stochastische integratie in algemene Banachruimten.

Laten we Yors observatie eens nader bekijken. We beschouwen in ℓ^p de standaardbasis $(e_n)_{n=1}^\infty$:

$$e_n = (0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{\text{(plaats } n)}, 0, 0, \ldots).$$

We equipartitioneren $[0,1]$ in N deeltintervallen $I_n = (t_{n-1}, t_n]$ van lengte $1/N$ en merken op dat de geschaalde incrementen

$$\gamma_n := \sqrt{N}(W(t_n) - W(t_{n-1}))$$

standaard normaal verdeeld en onafhankelijk zijn; dit volgt uit de definiërende eigenschappen van een Brownse beweging. We zetten nu

$$f_N := \sum_{n=1}^N 1_{(t_{n-1}, t_n]} \otimes e_n$$

en vinden

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left\| \int_0^1 f_N\,\mathrm{d}W \right\|_{\ell^p}^p &= \mathbb{E}\left\| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N \gamma_n e_n \right\|_{\ell^p}^p \\ &= \frac{1}{N^{p/2}} \sum_{n=1}^N \mathbb{E}|\gamma_n|^p \\ &= m_p N^{1-p/2} \end{aligned}$$

Marc Yor

met

$$\begin{aligned} m_p := \mathbb{E}|\gamma_n|^p &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty |x|^p e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2^{p/2}}{\sqrt{\pi}} \Gamma((p+1)/2). \end{aligned}$$

Hier is $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt$ de Euler-gammafunctie. Wegens $p \in [1,2)$ geldt $\lim_{N\to\infty} N^{1-p/2} = \infty$, terwijl de integranden evident voldoen aan

$$\sup_{N \ge 1} \Big(\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|f_N(t)\|_{\ell^p} \Big) = 1.$$

We zijn er bijna, ware het niet dat we de L^p-norm van de stochastische integralen hebben berekend in plaats van hun L^2-norm en dat we stapfuncties gebruikt hebben in plaats van continue functies.

Om het eerste defect weg te werken, gebruiken we een belangrijke stelling van Kahane, die een Banach-waardige uitbreiding is van een klassiek resultaat van Khintchine. Deze stelling zegt dat voor iedere $p \in [1,\infty)$ een constante $1 \le K_p < \infty$ bestaat met de volgende eigenschap: voor iedere Banachruimte X en iedere Gaussische toevalsvariabele $\xi : \Omega \to X$ (dat wil zeggen $x^* \circ \xi : \Omega \to \mathbb{R}$ is Gaussisch verdeeld voor iedere begrensde lineaire functionaal x^* in X^*, de duale ruimte van X), geldt

$$\begin{aligned} \frac{1}{K_p} (\mathbb{E}\|\xi\|_X^2)^{1/2} &\le (\mathbb{E}\|\xi\|_X^p)^{1/p} \\ &\le K_p (\mathbb{E}\|\xi\|_X^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Merk op dat één van beide ongelijkheden volgt uit Hölders ongelijkheid (met constante 1); wat Kahanes stelling zegt is dat we de omgekeerde ongelijkheid er gratis bij krijgen voor *Gaussisch verdeelde* ξ, met een universele constante die enkel van p afhangt.

Combineren we Kahanes stelling met het eerder bewezene, dan zien we dat ook de L^2-normen van de stochastische integralen van de functies f_N divergeren voor $N \to \infty$. Tot slot kunnen we de indicatorfuncties in de definitie van f_N vervangen door continue benaderingen zonder de normen van de stochastische integralen noemenswaardig te veranderen. Daarmee is Yors resultaat bewezen.

PDV's en SPDV's

We hebben nog niets gezegd over de beweegredenen om stochastisch te willen integreren in Banachruimten. Die komen uit de hoek van de stochastische partiële differentiaalvergelijkingen. Om dit uit te leggen bekijken we eerst een klasse van deterministische partiële differentiaalvergelijkingen van de vorm

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,\xi) = \Delta u(t,\xi) + f(t,u(t,\xi)) \qquad (5)$$

op een open deelverzameling D van $\mathbb{R}^d$, voorzien van beginvoorwaarden en randvoorwaarden. Functionaalanalytisch kan men deze vergelijking in de abstracte vorm

$$u'(t) = Au(t) + f(t,u(t)) \qquad (6)$$

brengen. Deze vergelijking beschouwt men in een Banachruimte X van functies op D, bijvoorbeeld $X = L^p(D)$. De operator A is dan de Laplace-operator Δ; de randvoorwaarden op D zijn verwerkt in de keuze van het domein van definitie van A. Verder schrijven we, voor $x \in L^p(D)$ en $\xi \in D$, $(f(t,x))(\xi) := f(t,x(\xi))$. Een *milde oplossing* wordt gedefinieerd als een functie $u : \mathbb{R}_+ \to L^p(D)$ die voldoet aan de vergelijking

$$u(t) = e^{tA}u(0) + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s,u(s))\,\mathrm{d}s. \qquad (7)$$

Hier is $(e^{tA})_{t\geq 0}$ de warmtehalfgroep voortgebracht door A. De idee achter deze definitie is dat formele differentiatie van (6) (onder gebruikmaking van $(e^{tA})' = Ae^{tA}$) de oorspronkelijke vergelijking (6) teruggeeft, maar in tegenstelling tot (6) wordt in (6) geen *a priori* differentieerbaarheid van u verlangd. Het mag duidelijk zijn dat we hier nogal wat details onder het tapijt schuiven, maar alles kan helemaal precies worden gemaakt.

Laten we nu eens het volgende stochastische analogon van (5) beschouwen:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,\xi) = \Delta u(t,\xi) + g(t,u(t,\xi))\,W'(t), \qquad (8)$$

met W een Brownse beweging. Deze vergelijking kunnen we abstract schrijven als

$$\mathrm{d}u(t) = Au(t)\,\mathrm{d}t + g(t,u(t))\,\mathrm{d}W(t). \qquad (9)$$

De heuristiek is dat op het interval $[t, t+\Delta t]$ het ($L^p(D)$-waardige) increment van u bij benadering gegeven wordt door

$$\Delta u(t) \approx Au(t)\Delta t + g(t,u(t))\Delta W(t).$$

Met andere woorden, bovenop het lineaire deel van de vergelijking wordt op infinitesimale tijdsschaal met een 'Gaussische dobbelsteen' geworpen die de oplossing op toevallige wijze beïnvloedt. Deze interpretatie verklaart waarom we in (8) de 'ruis' met de tijdsafgeleide van een Brownse beweging modelleren. Er is echter een klein probleem: met kans 1 zijn de paden van een Brownse beweging nergens differentieerbaar.

Naar analogie van (7) zou men een *milde oplossing* nu willen definiëren als een $L^p(D)$-waardig proces u dat voldoet aan

$$u(t) = e^{tA}u(0) + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s,u(s))\,\mathrm{d}W(s). \qquad (10)$$

Om een en ander precies te maken zijn we genoodzaakt de integraal aan de rechterzijde te interpreteren als een stochastische integraal in de Banachruimte $X = L^p(D)$. Niet alleen hebben we in deze milde formulering geen *a priori* differentieerbaarheid van u nodig, we omzeilen tegelijkertijd het probleem van de nergens-differentieerbaarheid van W.

De reden dat we niet tevreden zijn met stochastische integratie in de Hilbertruimte $L^2(D)$ is tweeledig:

(a) voor veel (S)PDV's is $L^2(D)$ niet de 'natuurlijke' toestandsruimte;
(b) door te werken in $L^p(D)$ verkrijgt men betere regulariteitseigenschappen voor de oplossing.

Wat betreft punt (a) kunnen we bijvoorbeeld opmerken dat de warmtevergelijking in $L^1(D)$ een natuurlijke interpretatie heeft: de L^1-norm geeft de totale warmte-inhoud. Wat betreft punt (b) is het in de meeste gevallen zo dat betere regulariteit wordt verkregen naarmate p groter gekozen wordt (de achterliggende reden is dat Sobolev-inbeddingen een betere Hölder-exponent opleveren voor grotere p).

Stochastische integratie in Banachruimten II

Wat betreft punt (b) hebben we goed nieuws, want de ruimten $L^p(D)$ hebben martingaal-type 2 voor grote waarden van p. Dit betekent dat we de vergelijking (9) kunnen bestuderen met de hierboven beschreven theorie van stochastische integratie in martingaal-type 2 ruimten. Maar we hebben ook gezien dat die theorie ruimten zoals $L^1(D)$ uitsluit, en dit is onbevredigend wat betreft punt (a): 'in het echt' evolueren warmteprofielen immers ook in de aanwezigheid van ruis, daarbij niet gehinderd door enige mathematische tegenwerpingen vanuit de universiteiten.

Een tweede tegenwerping tegen de martingaal-type 2-theorie is subtieler. We hebben gezien dat in de aanwezigheid van martingaal-type 2 de Itô-isometrie een Itô-*ongelijkheid* wordt. Is deze scherp, of verliezen we belangrijke informatie?

Om hier antwoord op te krijgen kunnen we kijken naar de kritieke Sobolev-exponent van de regulariteit van de oplossingen. Hieraan is in de afgelopen een à twee decennia intensief onderzoek verricht. Daar is uitgekomen dat een ruime klasse van vergelijkingen van het type (6) oplossingen in $L^p(D)$ hebben met Sobolev-regulariteit bij de kritieke exponent (we spreken dan van *maximale regulariteit*). Pogingen om eenzelfde resultaat te bewijzen voor de stochastische vergelijkingen (9) in ruimten met martingaal-type 2 hebben daarentegen nooit iets opgeleverd: met behulp van deze theorie krijgt men alleen Sobolev-regulariteit voor exponenten strikt kleiner dan de kritieke exponent.

Dit was ongeveer de situatie toen ik het Vidi-project indiende. Belangrijke vragen die open lagen waren:

(i) Is het mogelijk een bevredigende theorie van stochastische integratie op te zetten voor een grotere klasse van Banachruimten dan alleen de martingaal-type 2-ruimten?
(ii) Is het mogelijk een Itô-isomorfisme voor de stochastische integraal te bewijzen?

en zo ja, in het verlengde daarvan:

(iii) Is het mogelijk stochastische maximale regulariteit te bewijzen voor een interessante klasse stochastische vergelijkingen?

Uit Yors resultaat valt af te leiden dat we op (i) en (ii) alleen een positief antwoord kunnen hebben als we bereid zijn $L^2_{\mathrm{a}}(\mathbb{R}_+ \times \Omega; X)$ op te offeren als de 'correcte' ruimte waarop stochastische integratie gedefinieerd kan worden.

Om een idee te krijgen wat dan wel de correcte ruimte is, gaan we terug naar het begin en beschouwen de allereenvoudigste situatie van een deterministische X-waardige stapfunctie als integrand. Zo'n functie kunnen we schrijven als

$$f = \sum_{n=1}^{N} \frac{1_{(t_{n-1},t_n]}}{\sqrt{t_n - t_{n-1}}} \otimes x_n \tag{11}$$

met $x_n \in X$ voor $n = 1, \ldots, N$. De normalisering is zo gekozen dat de toevalsvariabelen

$$\gamma_n := \frac{W(t_{n-1}) - W(t_n)}{\sqrt{t_n - t_{n-1}}}$$

standaard normaal verdeeld zijn. Ze zijn tevens onafhankelijk, en met bovenstaande notatie krijgen we

$$\int_0^\infty f \, \mathrm{d}W = \sum_{n=1}^{N} \gamma_n x_n. \tag{12}$$

Nu kunnen we f algebraïsch opvatten als een element in $L^2(\mathbb{R}_+) \otimes X$, en de vraag hoe we de L^2-norm van de stochastische integraal kunnen afschatten kunnen we herformuleren als een vraag over het afschatten van Banachwaardige Gaussische sommen. Nu komt de cruciale observatie: als H een Hilbertruimte is, dan definieert op $H \otimes X$,

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} h_n \otimes x_n \Big\|_{H \otimes X}^2 := \mathbb{E} \Big\| \sum_{n=1}^{N} \gamma_n x_n \Big\|_X^2 \tag{13}$$

een norm mits we $h_1, \ldots, h_N$ orthonormaal in H kiezen. Dit laatste kan altijd via een Gram–Schmidt-argument worden bereikt. Merk ook op dat de functies $h_n := 1_{(t_{n-1},t_n]}/\sqrt{t_n - t_{n-1}}$ in (11) inderdaad orthonormaal zijn in de Hilbertruimte $H = L^2(\mathbb{R}_+)$.

Het bewijs dat de norm (13) welgedefinieerd is, berust op het feit dat het beeld van een standaard normaal verdeelde toevalsvariabele met waarden in $\mathbb{R}^N$ (hier nemen we $(\gamma_n)_{n=1}^N$) onder een orthogonale transformatie op $\mathbb{R}^N$ wederom standaard normaal verdeeld is. Onder de norm (13) is de afbeelding $f \mapsto \int_0^\infty f \, \mathrm{d}W$ *isometrisch*:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \Big\| \int_0^\infty f \, \mathrm{d}W \Big\|^2 &= \mathbb{E} \Big\| \sum_{n=1}^{N} \gamma_n x_n \Big\|_X^2 \\ &= \Big\| \sum_{n=1}^{N} h_n \otimes x_n \Big\|_{L^2(\mathbb{R}_+) \otimes X}^2 \\ &= \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+) \otimes X}^2. \end{aligned}$$

De completering van $H \otimes X$ met betrekking tot de norm in (13) noteren we als $\gamma(H, X)$. Voor $H = L^2(\mathbb{R}_+)$ kunnen we de elementen van deze ruimte opvatten als 'gegeneraliseerde' X-waardige functies in een Gaussische zin van het woord. Maar er is een alternatieve manier om de elementen van $\gamma(H, X)$ te beschrijven die werkt voor algemene Hilbertruimten H. Hiertoe merken we op dat het algebraïsch tensorproduct $H \otimes X$ op natuurlijke wijze geïdentificeerd kan worden met de vectorruimte van alle eindigerangoperatoren van H naar X: de tensor $h \otimes x$ identificeren we daartoe met de rang 1-operator

$$h' \mapsto \langle h, h' \rangle x.$$

Nu is het niet lastig om in te zien dat de identiteitsafbeelding op $H \otimes X$ een continue voortzetting heeft tot een begrensde injectieve afbeelding

$$\gamma(H, X) \subseteq \mathcal{L}(H, X),$$

waarbij $\mathcal{L}(H, X)$ de ruimte van alle begrensde lineaire operatoren van H naar X voorstelt. De elementen in $\gamma(H, X)$ kunnen dus 'een-op-een worden geïdentificeerd met zekere begrensde operatoren van H naar X. In het speciale geval $H = L^2(\mathbb{R}_+)$ neemt deze identificatie de volgende vorm aan: een functie $f \in L^2(\mathbb{R}_+) \otimes X$ correspondeert met de integraaloperator van $L^2(\mathbb{R}_+)$ naar X gegeven door

$$g \mapsto \int_0^\infty f(t) g(t) \, \mathrm{d}t.$$

Terugkerend naar de stochastische integraal hebben we bewezen:

Stelling 2 (Itô-isometrie voor deterministische integranden in X). *Voor alle stapfuncties $f : \mathbb{R}_+ \to X$ geldt*

$$\mathbb{E} \Big\| \int_0^\infty f \, \mathrm{d}W \Big\|_X^2 = \|f\|_{\gamma(L^2(\mathbb{R}_+), X)}^2.$$

Eigenlijk hebben we helemaal niets bewezen, want de isometrie geldt per definitie van de $\gamma(L^2(\mathbb{R}_+), X)$-norm. Toch is er meer aan de hand. Ten eerste kunnen we de $\gamma(H, X)$-norm voor aan aantal belangrijke ruimten expliciet uitrekenen.

Voorbeeld 1. Zij X een Hilbertruimte, Dan geldt

$$\gamma(H, X) = \mathcal{C}^2(H, X)$$

met gelijke normen. Hier is $\mathcal{C}^2(H, X)$ de ruimte van alle Hilbert–Schmidt-operatoren van H naar X. Dit volgt vrijwel direct uit de definitie van een Hilbert–Schmidt-operator.

Voorbeeld 2. Zij $X = L^p(M, \mu)$ met $1 \le p < \infty$. Dan geldt

$$\gamma(H, L^p(M, \mu)) = L^p(M, \mu; H)$$

met equivalente normen. De identificatie geschiedt door tensor $h \otimes f$ enerzijds op te vatten als functies $\xi \mapsto f(\xi) h$ en anderzijds als operatoren $h' \mapsto \langle h, h' \rangle f$. Het bewijs is een eenvoudig gevolg van de eerder genoemde Khintchine-ongelijkheid.

Ten tweede heeft de ruimte $\gamma(H, X)$ allerlei bijzondere eigenschappen. De belangrijkste is dat het een tweezijdig 'ideaal' is, in de volgende zin: Als $S : \tilde{H} \to H$ een begrensde operator is tussen de Hilbertruimten $\tilde{H}$ en H en $U : X \to \tilde{X}$ een begrensde operator tussen de Banachruimten X en $\tilde{X}$, dan geldt voor iedere $T \in \gamma(H, X)$ dat $U \circ T \circ S \in \gamma(\tilde{H}, \tilde{X})$ en

$$\begin{aligned} &\|U \circ T \circ S\|_{\gamma(\tilde{H}, \tilde{X})} \\ &\quad \le \|U\|_{\mathcal{L}(X, \tilde{X})} \|T\|_{\gamma(H, X)} \|S\|_{\mathcal{L}(\tilde{H}, H)}. \end{aligned}$$

Ten derde geldt een dominatiestelling: als $T : H \to X$ en $\tilde{T} : \tilde{H} \to X$ begrensde operatoren zijn waarvan de geadjungeerden voldoen aan $\|\tilde{T}^* x^*\|_{\tilde{H}} \le \|T^* x^*\|_H$ voor alle begrensde lineaire functionalen $x^* \in X^*$, dan impliceert $T \in \gamma(H, X)$ dat $\tilde{T} \in \gamma(\tilde{H}, X)$ en

$$\|\tilde{T}\|_{\gamma(\tilde{H}, X)} \le \|T\|_{\gamma(H, X)}.$$

Deze resultaten kan men vervolgens gebruiken om allerlei krachtige approximatiestellingen te bewijzen voor de $\gamma(H, X)$-norm. Al met al blijkt dus dat we prima met de $\gamma(H, X)$-norm kunnen omgaan.

De opmerkzame lezer heeft inmiddels echter gezien dat we nog niet veel hebben bereikt. We kunnen weliswaar omgaan met deterministische integranden in willekeurige Banachruimten, maar voor toepassingen op realistische stochastische PDV's moeten we random integranden kunnen integreren. En als we proberen het bovenstaande te generaliseren naar zulke integranden lopen we onmiddellijk vast: de stochastische integraal van een *random* stapfunctie is geen Gaussische som. Het gaat meteen al mis bij de identiteit (12)!

Op momenten dat alles hopeloos lijkt, gebeurt er soms een klein wonder. Dat wonder overkwam de wiskundige Garling, die in een geheel andere context, namelijk de geometrie van Banachruimten, keek naar Banachwaardige stochastische integralen en zich het volgende realiseerde. Als men een Brownse beweging W 'randomiseert' door op gezette tijden t_n een muntje te gooien en bij '$+1$' niets doen, maar bij '-1' de bewegingsrichting van de Brownse beweging vanaf t_n 'om te klappen', dan krijgt men wederom een Brownse beweging. Als men nu de partitiepunten t_n steeds fijner kiest, krijgt men in de verdelingslimiet een Brownse beweging $\tilde{W}$ *die onafhankelijk is* van de oorspronkelijke Brownse beweging W (we veronderstellen uiteraard dat het werpen van de munt onafhankelijk is van W). Deze procedure van randomiseren suggereert een link met een Banachruimte-eigenschap, de zogenaamde UMD-eigenschap (de afkorting staat voor 'unconditinal martingale differences'), die eveneens gedefinieerd is in termen van omklappen van incrementen.

Een Banachruimte heeft de *UMD-eigenschap* als er een exponent $1 < p < \infty$ bestaat, alsmede een constante B, zodanig dat voor iedere X-waardige martingaal-differentierij $(d_n)_{n=1}^N$ en voor iedere rij $(\varepsilon_n)_{n=1}^N \in \{-1,+1\}^N$ de volgende afschatting geldt:

$$\mathbb{E}\Big\|\sum_{n=1}^N \varepsilon_n d_n\Big\|_X^p \le B^p\mathbb{E}\Big\|\sum_{n=1}^N d_n\Big\|_X^p.$$

Deze eigenschap is komen bovendrijven in het grensverleggende werk van Burkholder in de jaren tachtig en negentig op het gebied van Banach-waardige martingaaltheorie en blijkt onafhankelijk te zijn van de exponent $1 < p < \infty$. Hilbertruimten zijn UMD (neem $p = 2$) en L^p-ruimten zijn UMD voor $1 < p < \infty$ (neem exponent p en pas Fubini toe).

Garling bewees nu het volgende [4]. Als X een UMD-Banachruimte is, dan geldt voor alle aangepaste random stapfuncties $f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to X$ de tweezijdige ongelijkheid

$$\mathbb{E}\Big\|\int_0^\infty f\,\mathrm{d}W\Big\|_X^p \eqsim \mathbb{E}\Big\|\int_0^\infty f\,\mathrm{d}\tilde{W}\Big\|_X^p. \quad (14)$$

Met andere woorden, als we de L^p-norm van de stochastische integraal $\int_0^\infty f\,\mathrm{d}W$ willen afschatten mogen we W door de onafhankelijke kopie $\tilde{W}$ vervangen! Dankzij een standaardargument in de kansrekening mogen we vervolgens ook veronderstellen dat W en $\tilde{W}$ op verschillende kansruimten $(\Omega, \mathbb{P})$ en $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathbb{P}})$ leven; de integraal $\int_0^\infty f\,\mathrm{d}\tilde{W}$ is dan een toevalsvariabele op het product $(\Omega \times \tilde{\Omega}, \mathbb{P} \times \tilde{\mathbb{P}})$. Maar dat betekent dat we die integraal padsgewijs (dat willen zeggen per $\omega \in \Omega$) kunnen afschatten met behulp van de theorie voor deterministische integranden. Door Stelling 2 toe te passen op de functie $t \mapsto f(t,\omega)$ en Kahanes versie van de Khintchine-ongelijkheid te gebruiken om de L^2-norm te vervangen door de L^p-norm vinden we

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{E}}\Big\|\int_0^\infty f(\cdot,\omega)\,\mathrm{d}\tilde{W}\Big\|_X^p \\ \eqsim \|f(\cdot,\omega)\|_{\gamma(L^2(\mathbb{R}_+),X)}^p.\end{aligned} \quad (15)$$

In combinatie met Garlings equivalentie (14) hebben we dan het volgende gevonden:

Stelling 3 (Itô-isomorfisme voor random integranden in UMD-ruimten X). *Zij X een UMD-Banachruimte en zij $1 < p < \infty$. Er bestaat een constante B zodanig dat voor alle aangepaste random stapfuncties $f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to X$ de volgende tweezijdige afschatting geldt:*

$$\mathbb{E}\Big\|\int_0^\infty f\,\mathrm{d}W\Big\|_X^p \eqsim \mathbb{E}\|f\|_{\gamma(L^2(\mathbb{R}_+),X)}^p.$$

Deze stelling, die bewezen wordt in een gezamenlijk artikel met promovendus Mark Veraar en Lutz Weis [10], is een van de hoofdresultaten van het Vidi-project en bouwt voort op een eerder resultaat van McConnell [7], die echter geen L^p-afschattingen gaf en veel indirectere argumenten gebruikte. De stelling zegt dat, constanten in beide richtingen daargelaten, de L^p-norm van stochastische integralen in UMD-ruimten X *precies gegeven wordt* door de norm van de integrand als element in $L^p(\Omega;\gamma(L^2(\mathbb{R}_+),X))$. Daarmee voorziet Stelling 3 in een volledig antwoord op de vragen (i) en (ii) die eerder zijn opgeworpen.

Het is interessant het resultaat van Stelling 3 te vergelijken met het eerdere resultaat voor martingaal-type 2-ruimten X. Voor zulke ruimten konden we de L^2-norm van de integraal afschatten door de $L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega; X)$-norm van de integrand. Met behulp van een slim stoptijdargument kan deze afschatting worden 'opgewerkt' tot een afschatting voor de L^p-norm van de stochastische integraal door de $L^p(\Omega; L^2(\mathbb{R}_+; X))$-norm van de integrand. In deze vorm, om precies te zijn

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big\|\int_0^\infty f\,\mathrm{d}W\Big\|_X^p \\ \le C^p\mathbb{E}\Big(\int_0^\infty \|f(t)\|_X^2\,\mathrm{d}t\Big)^{p/2},\end{aligned} \quad (16)$$

staat de afschatting bekend als (de martingaal-type 2-versie van) *Burkholders ongelijkheid*. Deze terminologie, alhoewel ingeburgerd, is eigenlijk niet correct, omdat de scalaire Burkholder-ongelijkheid een tweezijdige afschatting voor de L^p-norm van de stochastische integraal geeft. Dit is precies wat Stelling 3 doet voor UMD-ruimten X, en inderdaad reduceert deze stelling in het scalaire geval precies tot de tweezijdige Burkholder-ongelijkheid.

De bovenstaande theorie hebben we in het vervolgartikel [11] toegepast op een klasse van semilineaire beginwaardeproblemen die vergelijkingen van het type (9) als speciaal geval bevat. Voor zulke vergelijkingen kan men Stelling 3 gebruiken om een dekpuntargument toe te passen op (de corresponderende generalisatie van) de identiteit (10) en zo existentie, uniciteit en Hölder-regulariteit te bewijzen. De numerieke analyse van semilineaire stochastische PDV's is in vervolgwerk met Sonja Cox uitgewerkt [1].

Voordat we onze aandacht richten op maximale regulariteit wil ik één resultaat niet onvermeld laten: promovendus Sjoerd Dirksen heeft Stelling 3 uitgebreid, voor ruimten $X = L^q(M,\mu)$ met $1 < q < \infty$, naar Poisson-stochastische integralen [3]. Het verrassende resultaat is dat de L^p-norm van de integraal dan gekarakteriseerd wordt door *zes* verschillende normen, afhankelijk van de onderlinge positie van de exponenten 2, p, en q. Het is vooralsnog een open probleem om dit resultaat uit te breiden naar willekeurige UMD-Banachruimten X.

Stochastische maximale regulariteit

Het einde van het Vidi-project begon intussen in zicht te komen en daarmee kom je, zeker bij het management, in de kijker als kandidaat voor het indienen van een Vici-aanvraag. Zelf had ik om eerlijk te zijn nogal het gevoel weinig kans te maken: NWO zou toch niet twee beurzen achtereen aan dezelfde persoon toekennen? Hoe dan ook, vraag (iii) stond nog wijd open en de oplossing ervan leek inmiddels binnen bereik te komen, dus dat leverde een goed onderwerp op.

Inmiddels schrijven we 2006, en er was veel veranderd. Iedere universiteit had inmiddels een hele infrastructuur rondom het binnenhalen van subsidies in de lucht. Communicatiedeskundigen, voorlichtingsmiddagen, schrijfcursussen en panels, allemaal om het beste uit een aanvraag te halen. Zo ook de TU Delft. Dit keer ging mijn aanvraag niet meteen naar NWO, maar eerst naar een universiteitsbreed panel van (niet-wiskundige) experts die er gehakt van maakten en een panel van communicatiedeskundigen dat verzuchtte dat het voorstel “wellicht zelfs voor een doorgewinterde redacteur niet of nauwelijks te redigeren” was. Daar schrok ik nogal van, want ik dacht dat je een onderzoeksvoorstel zelf moest schijven. Niet goed wetend wat ik met dit ‘advies’ moest aanvangen, heb ik het voorstel maar gewoon ingediend zonder er inhoudelijk nog iets aan te veranderen. Gelukkig bleken de referenten bij NWO zeer wel met mijn hiërogliefen uit de voeten te kunnen. Het daaropvolgende interview was, net als bij Vidi, vooral inhoudelijk (de meest onverwachte vraag was deze keer of ik wel eens iets aan het populariseren van mijn vak deed?) en uiteindelijk werd de aanvraag gehonoreerd.

U begrijpt, een leuke anekdote voor mijn afscheidsrede heb ik al. Anno nu is de begeleiding overigens veel beter geworden en ook PWN organiseert sinds kort succesvolle presentatietrainingen.

We pakken de draad van het verhaal weer op. Één van de belangrijkste stellingen aangaande de UMD-eigenschap is de stelling van Burkholder en Bourgain, volgens welke een Banachruimte X de UMD-eigenschap heeft dan en slechts dan als de Hilbert-transformatie

$$Hf(x) := \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{x-y}\,\mathrm{d}y,$$

die begrensd is op $L^p(\mathbb{R})$ voor $1 < p < \infty$ (dit is een klassieke stelling van Riesz), een voortzetting heeft tot een begrensde operator op $L^p(\mathbb{R};X)$. Deze stelling legt een diep verband met Harmonische Analyse, waar de Hilbert-transformatie het prototype van een singuliere integraaloperator is en de aanzet vormt tot de Calderón–Zygmund-theorie van singuliere integraaloperatoren.

Nu wil het geval dat het probleem van stochastische maximale regulariteit voor deterministische vergelijkingen gereduceerd kan worden tot een probleem over X-waardige singuliere integralen. Om stochastische maximale regulariteit te bewijzen voor vergelijkingen van het type (9) blijkt dat we X-waardige singuliere stochastische integralen moeten bestuderen. Om precies te zijn dient men te bewijzen dat voor aangepaste $f \in L^p(\mathbb{R}_+ \times \Omega; X)$ het stochastische convolutieproces

$$t \mapsto \int_0^t (-A)^{1/2} e^{(t-s)A} f(s)\,\mathrm{d}W(s) \qquad (17)$$

welgedefinieerd is en wederom in $L^p(\mathbb{R}_+ \times \Omega; X)$ ligt. Deze stochastische integraal is ‘singulier’ vanwege het feit dat de norm van $(-A)^{1/2}e^{tA}$ in het algemeen schaalt als $1/\sqrt{t}$, hetgeen zich via Itô vertaalt in een $1/t$ singulariteit ten opzichte van de Lebesgue-maat $\mathrm{d}t$.

Waarom is stochastische maximale regulariteit zo belangrijk? De convergentie van de stochastische integraal in (17) is equivalent met de uitspraak dat de milde oplossing van de vergelijking

$$\mathrm{d}u(t) = Au(t)\,\mathrm{d}t + f(t)\,\mathrm{d}w(t)$$

waarden aanneemt in het fractionele domein $\mathcal{D}((-A)^{1/2})$. Voor typische operatoren zoals $A = \Delta$ in $L^p(D)$ is dat fractionele domein gelijk aan een Sobolevruimte $H^{1,p}(D)$. Dit betekent dat de gradiënt van de oplossing, $\nabla u(t)$, goed gedefinieerd is. Als we alleen regulariteit *tot* (en niet tot en met) de kritieke exponent $1/2$ hadden, dan zou dit niet het geval zijn.

Met de genoemde L^p-afschatting voor (17) in de hand gaat de deur open naar een reeks belangrijke toepassingen: niet alleen kan men de niet-lineariteiten in de vergelijking ook van ∇u laten afhangen (een voorbeeld bespreken we hierbeneden), men kan de afschatting ook gebruiken om tijdsafhankelijke problemen te reduceren tot tijdsonafhankelijke problemen.

Het bewijzen van de convergentie van singuliere integralen is meestal in hoge mate niet-triviaal en vereist delicate technieken uit de harmonische analyse. Het was dan ook verre van duidelijk hoe je de convergentie van (en L^p-afschattingen voor) de stochastische convoluties van het type (17) zou moeten bewijzen.

Voor $p = 2$ en Hilbertruimten X was stochastische maximale regulariteit al in de jaren negentig bewezen door Da Prato en Zabczyk [2] onder een aanname op A die equivalent is aan het hebben van een zogenaamde begrensde H^∞-calculus. Dit is een spectrale calculus, die in Banachruimten een goed substituut geeft voor de Borel-calculus voor zelfgeadjungeerde operatoren. Deze calculus is in de jaren tachtig en negentig ontwikkeld door Alan McIntosh, die er een aantal bekende open problemen in de spectraaltheorie mee heeft opgelost. Voorbeelden van operatoren met een H^∞-calculus zijn de Laplace-operator, elliptische operatoren, en de Stokes-operator.

Vervolgens bewees Krylov dat voor $2 < p < \infty$ de Laplace-operator, en algemener veel tweede-orde-elliptische operatoren, stochastische maximale regulariteit hebben op $L^q(\mathbb{R}^d)$ met $q \in [2, \infty)$ [5].

Het al dan niet begrensd zijn van de H^∞-calculus van een gegeven operator is equivalent met het al dan niet convergeren van een zekere singuliere integraal geassocieerd met de operator. Dat bracht ons op het idee om H^∞-calculus in te zetten bij de behandeling van stochastische maximale regulariteit via (17). Dat klinkt makkelijker gezegd dan gedaan, maar uiteindelijk bleek het idee te werken. In het artikel [13] konden Mark Veraar, Lutz Weis en ik stochastische maximale regulariteit voor $2 < p < \infty$ bewijzen voor willekeurige operatoren A met een H^∞-calculus op $L^q(\mathbb{R}^d)$ met $2 \le q < \infty$ (en voor $2 \le p < \infty$ als $q = 2$). Het bewijs maakt op essentiële wijze gebruik van de precieze tweezijdige afschatting van Stelling 3 alsmede de Fefferman–Stein-stelling uit de harmonische analyse. Het is interessant om op te merken dat ons bewijs met de zwakkere martingaaltype 2-afschatting (16) niet zou werken.

In het vervolgartikel [12] hebben we het resultaat toegepast op een aantal stochastische PDV’s, waaronder de incompressibele stochastische Navier–Stokes-vergelijking

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - (u \cdot \nabla)u - \nabla p + g(u, \nabla u)\dot{W}$$

met Dirichlet-randvoorwaarden op een begrensd gebied D in $\mathbb{R}^d$. We laten zien dat deze vergelijking een oplossing heeft in de Sobolevruimte $(H^{1,q}(D))^d$ voor alle $q \in [2, \infty)$. Voor $D = \mathbb{R}^d$ was dit al eerder bewezen door Mikulevicius en Rozovskiĭ, die gebruik maakten van geheel andere technieken. Het feit dat de niet-lineaire term g ook van ∇u mag afhangen (we spreken dan ook wel van ‘gradient type noise’) wordt door fysici gebruikt om turbulentie te modelleren. Het is precies de stochastische maximale regulariteit die ons toestaat om de gradiënt ∇u mee te nemen in de ruisterm.

In het onlangs afgesloten Veni-project van Mark Veraar is het thema stochastische maximale regulariteit verder uitgediept en toegepast.

Malliavin-calculus

Een tweede hoofdresultaat van het Vici-project is eveneens een soort maximale regulariteitsstelling. Deze stelling, die promovendus Jan Maas en ik bewezen hebben in [6], geeft een nodige en voldoende voorwaarde, in termen van het bestaan van een H^∞-calculus, voor de geldigheid van een oneindig-dimensionale generalisatie van Meyers ongelijkheid.

Meyers ongelijkheid is de centrale L^p-ongelijkheid in de Malliavin-calculus, een differentiaalcalculus waarbij de rol van de

Lebesgue-maat vervangen wordt door een Gauss-maat γ; dit heeft als voordeel dat ook in oneindig veel dimensies gewerkt kan worden. Om te begrijpen wat Meyers ongelijkheid zegt, kijken we naar een van de eenvoudigste stochastische differentiaalvergelijkingen, de zogenaamde *Langevin-vergelijking*

$$\mathrm{d}u(t) = -u(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}W(t).$$

De oplossing van deze vergelijking heet het *Ornstein–Uhlenbeck-proces*. Dit is een Markov-proces; de generator van de bijbehorende Markov-halfgroep noemen we L. Een interessant terzijde is dat deze operator in de kwantumoptica bekend staat als de 'number operator' die het aantal fotonen telt. Meyers ongelijkheid zegt nu dat voor alle $1 < p < \infty$,

$$\|(-L)^{1/2} f\|_p \eqsim \|Df\|_p \tag{18}$$

met constanten die alleen van p afhangen. Hier is D de Malliavin-afgeleide, het Gaussische substituut voor de gradiënt.

De stelling van Jan Maas en mijzelf geeft een analogon van (18) voor een algemene klasse van lineaire stochastische *partiële* differentiaalvergelijkingen. In zijn proefschrift heeft Jan bovendien een begin gemaakt met een systematische UMD-waardige Malliavincalculus, een waar mijnenveld waar al meerdere bekende wiskundigen onjuiste resultaten bleken te hebben gepubliceerd. Promovendus Matthijs Pronk heeft deze theorie verder uitgewerkt [14].

Internet seminar

Qua onderwijs was een van de hoogtepunten het Internet Seminar 'Stochastic Evolution Equations' dat ik in het academisch jaar 2007/08 heb aangeboden. Het Internet Seminar (ISem) [16] is een jaarlijks online college voor promovendi dat bestaat sinds de jaren negentig (een 'OOC' *avant la lettre*, met gemiddeld een honderdtal deelnemers nog net geen MOOC) en rouleert tussen Europese universiteiten.

Een ISem bestaat uit een aantal wekelijkse lezingen die via Internet verspreid worden, gevolgd door een projectfase waarin deelnemende studenten in kleine internationale groepjes aan projecten werken en een afsluitende workshop.

Dit was een goede gelegenheid de belangrijkste resultaten uit het Vidi-project te ordenen en toegankelijk te maken op graduate niveau. De ISem Lecture Notes [8] waren het begin van een omvangrijk boekproject met Tuomas Hytönen, Mark Veraar en Lutz Weis over analyse in Banachruimten, dat momenteel in volle gang is. Nu dat de drukke VI-jaren achter de rug zijn hoop ik daar weer meer tijd voor te kunnen vrijmaken.

Tot slot

Er is tegenwoordig veel te doen over de financiering van het vrije onderzoek. Door de topsectoren is er steeds minder budget voor vrij onderzoek, waardoor slaagkansen laag zijn en veel onderzoekstijd in rook opgaat bij het schrijven van voorstellen die niet gehonoreerd worden.

In dit alles is de Vernieuwingsimpuls een redelijk constante succesfactor. Zeker voor wiskundigen die geen lab hoeven te runnen, zijn de subsidies in de VI enorm hoog. Velen, waaronder ikzelf, zijn van mening dat die best iets kleiner zouden kunnen, om zo meer voorstellen te kunnen honoreren (zie in dat verband mijn column in het maartnummer van dit blad en de bijdrage van Klaas Landsman in het afgelopen juninummer). Veel excellente voorstellen halen het nu niet en de scheidslijn tussen wel en geen succes is dun: doordat de aanvragen door een gemengd panel van wiskundigen, informatici en astronomen worden beoordeeld, bevat de uitslag onvermijdelijke ruis.

Dat gezegd hebbende blik ik terug op een intensieve en zeer productieve periode. In het begin moest ik erg wennen aan de vele ogen die ik opeens op me gericht voelde: persberichten, nieuwsitems en een interview in het universiteitsblad scheppen immers hoge verwachtingen en een navenante (zelfopgelegde) prestatiedruk. Maar al snel komen de positieve aspecten bovendrijven: met zoveel middelen krijg je de kans om echt iets op te bouwen. Omringd door de vele promovendi en postdocs (aan het werk van de laatstgenoemden heb ik in dit bestek helaas geen recht kunnen doen) waren er wel eens momenten dat ik mij een wetenschapsmanager voelde, maar het was altijd geweldig om met deze jonge mensen samen te werken en wetenschappelijk is er veel bereikt. En tot slot: met de onlangs toegekende Vidi van Mark Veraar krijgt het onderzoek aan stochastische PDV's in Nederland een uitstekend vervolg.

Referenties

1 S.G. Cox en J.M.A.M. van Neerven, Pathwise Hölder convergence of the implicit Euler scheme for semi-linear SPDEs with multiplicative noise, *Numerische Mathematik* 125 (2013), 259–345.

2 G. Da Prato en J. Zabczyk, Stochastic Equations in Infinite Dimensions, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications* 44, 2e editie, Cambridge University Press, 2014.

3 S. Dirksen, Itô isomorphisms for L^p-valued Poisson stochastic integrals, te verschijnen in *Ann. Probab.*, arXiv:1208.3885.

4 D.J.H. Garling, Brownian motion and UMD-spaces, in *Probability and Banach spaces (Zaragoza, 1985)*, Springer Lecture Notes in Math. 1221, 1986, pp. 36–49.

5 N.V. Krylov, On the foundation of the L_p-theory of stochastic partial differential equations, in *Stochastic partial differential equations and applications-VII*, Lect. Notes Pure Appl. Math. 245, Chapman & Hall/CRC, 2006, pp. 179–191.

6 J. Maas en J.M.A.M. van Neerven, Boundedness of Riesz transforms for elliptic operators on abstract Wiener spaces, *J. Funct. Anal.* 257 (2009), 2410–2475.

7 T.R. McConnell, Decoupling and stochastic integration in UMD Banach spaces, *Probab. Math. Statist.* 10 (1989), 283–295.

8 J.M.A.M. van Neerven, Stochastic Evolution Equations, Lecture Notes van het 2007/08 Internet Seminar, repository.tudelft.nl.

9 J.M.A.M. van Neerven, M.C. Veraar en L.W. Weis, Stochastic integration in Banach spaces – a survey, te verschijnen in *Proceedings of the 2012 EPFL Semester on Stochastic Analysis and Applications*, arXiv:1304.7575.

10 J.M.A.M. van Neerven, M.C. Veraar en L.W. Weis, Stochastic integration in UMD Banach spaces, *Ann. Probab.* 35 (2007), 1438–1478.

11 J.M.A.M. van Neerven, M.C. Veraar en L.W. Weis, Stochastic evolution equations in UMD Banach spaces, *J. Funct. Anal.* 255 (2008), 940–993.

12 J.M.A.M. van Neerven, M.C. Veraar en L.W. Weis, Maximal L^p-regularity for stochastic evolution equations, *SIAM J. Math. Anal.* 44 (2012), 1372–1414.

13 J.M.A.M. van Neerven, M.C. Veraar en L.W. Weis, Stochastic maximal L^p-regularity. *Ann. Probab.* 40 (2012), 788–812.

14 M. Pronk en M.C. Veraar, Tools for Malliavin calculus in UMD Banach spaces, *Potent. Anal.* 40(2014), 307–344.

15 M. Yor, Sur les intégrales stochastiques à valeurs dans un espace de Banach, *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B (N.S.)*, 10 (1974), 31–36.

16 isem17.unisa.it/w/index.php/17th_Internet_Seminar