

Wim Caspers

Adelbert College, Wassenaar

Faculteit EWI en Lerarenopleiding, TU Delft

w.t.m.caspers@tudelft.nl

Onderwijs

Bespreking examen vwo wiskunde B 2014

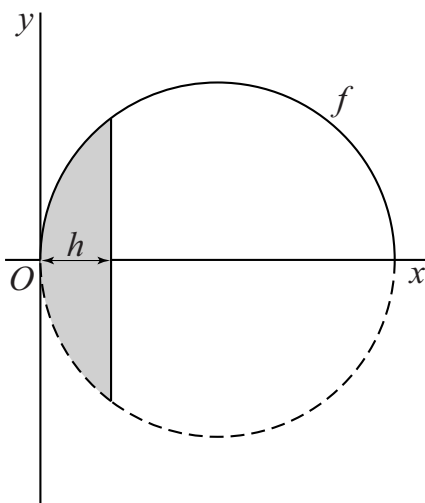
De eindexamens zijn weer achter de rug. Vele scholieren zijn inmiddels, met een diploma op zak, aan een vervolgopleiding begonnen. Daar zal men ervaren of hetgeen men geleerd heeft op de middelbare school goed aansluit bij de studie die men gekozen heeft. Met die vraag in gedachte bekijkt Wim Caspers, docent wiskunde aan het Adelbert College te Wassenaar, het examen vwo wiskunde B van 20 mei 2014. Caspers is tevens werkzaam aan de TU Delft bij de faculteit EWI en de lerarenopleiding. Daarnaast is hij lid van de onderwijscommissie van Platform Wiskunde Nederland.

In mei worden de scores die leerlingen behaald hebben voor het Centraal Examen door de examinatoren digitaal verstuurd naar bevoegde instanties. Bij dat versturen verschijnt bij wijze van enquête de vraag in beeld of het examen aansloot bij het gegeven onderwijs. Dat is een gewetensvraag, want wordt het antwoord gebruikt om het examen te kwalificeren of probeert men het gegeven onderwijs langs de meetlat te leggen? Met bevoegde instanties weet je het maar nooit. Gelukkig is er ook een knop waarmee je de enquête kunt overslaan.

Alsnog blijft de vraag: toetst het examen wat er in de wiskundeles zoal geleerd wordt op het vwo of niet? In het vervolgonderwijs bestaat al jaren het beeld dat het cijfer voor wiskunde B heel aardig het studiesucces in het eerste jaar voorspelt, maar is aan de examenopgaven af te lezen wat afnemende onderwijsinstellingen van hun eerstejaarsstudenten mogen verwachten op het gebied van de wiskunde? Met die vraag voor ogen bekijken we het examen vwo wiskunde B 2014.

Bal onder water

Het examen begint met een sympathieke opgave over een bal die zich h cm onder het wateroppervlak bevindt. Als service wordt de



Figuur 1

figuur met de doorsnede van de situatie een kwartslag gedraaid. Om het rekenwerk te vereenvoudigen, staat erbij. Eerlijk gezegd wordt het rekenwerk pas beperkt door het handig kiezen van een assenstelsel (zie Figuur 1). Draaien om de x -as is voor leerlingen iets makkelijker dan draaien om de y -as inderdaad. Het handig kiezen van een assenstelsel evenals het functievoorschrift dat de doorsnede beschrijft, is een stukje wiskunde dat wordt weggegeven, en dat is helemaal niet erg bij een openingsopgave. Waarschijnlijk zijn er wel leerlingen geweest die zich afvroegen of het werkelijk zo eenvoudig was.

Buigpunten

De tweede opgave gaat over grafieken met buigpunten (zie Figuur 2). Voor elke waarde van p met $p \neq 0$ is een functie f_p gegeven waarbij voor de tweede afgeleide geldt:

$$f_p''(x) = 12(x - p)(x + p).$$

Met primitiveren moet worden aangetoond dat er geldt:

$$f_p(x) = x^4 - 6p^2x^2 + ax + b,$$

met a en b constanten. Dat verklaart de 12 in die dubbele afgeleide waar de opstellers van het examen voor gekozen hebben. Voor de rest van de opgave wordt ervoor gekozen

Boven en onder de lijn door de buigpunten

Voor elke waarde van p met $p \neq 0$ is een functie f_p gegeven waarbij voor de tweede afgeleide geldt: $f_p''(x) = 12(x-p)(x+p)$

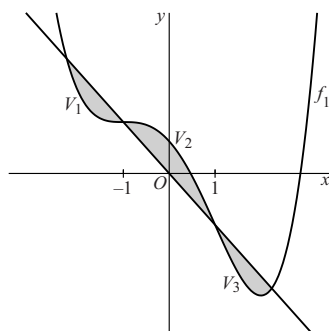
Er geldt: $f_p(x) = x^4 - 6p^2x^2 + ax + b$ met a en b constanten.

4p 3 Toon dit aan met primitiveren.

Voor $a = -8$ en $b = 5$ wordt f_1 gegeven door $f_1(x) = x^4 - 6x^2 - 8x + 5$.

In de figuur zie je de grafiek van f_1 . Deze grafiek heeft buigpunten voor $x = -1$ en $x = 1$. De lijn door deze buigpunten heeft vergelijking $y = -8x$. Deze lijn en de grafiek van f_1 begrenzen drie vlakdelen V_1 , V_2 en V_3 die om en om onder en boven de lijn liggen.

figuur



De lijn met vergelijking $y = -8x$ snijdt de grafiek van f_1 niet alleen in de twee buigpunten, maar ook in twee andere punten.

4p 4 Bereken exact de x -coördinaten van de twee andere snijpunten.

De vlakdelen V_1 en V_3 hebben gelijke oppervlakte, namelijk $3\frac{1}{5}$.

4p 5 Bewijs dat de gezamenlijke oppervlakte van V_1 en V_3 gelijk is aan de oppervlakte van V_2 .

Figuur 2

om alleen nog maar de functie f_1 te bekijken en dan ook nog met $a = -8$ en $b = 5$. Bovendien wordt er verkapt dat de grafiek buigpunten heeft voor $x = 1$ en $x = -1$ en dat de lijn door die buigpunten vergelijking $y = -8x$ heeft, en wordt de grafiek gegeven. De vragen die gesteld worden gaan over andere snijpunten van de lijn en de grafiek en over oppervlakten die worden ingesloten door lijn en grafiek. Doorsnee rekenwerk voor veel leerlingen. In een alledaagse wiskundeles mag je verwachten dat er meer van de leerlingen gevraagd wordt, bijvoorbeeld om te onderzoeken waarom alleen dat speciale geval gekozen is. Is hier sprake van een algemenere opgave op de achtergrond, vereenvoudigd om in het examen op te durven nemen? Het zou zomaar kunnen. In de les zouden de leerlingen aan de algemenere versie worden blootgesteld. Er zou dan uitgezocht worden

dat de grafiek van f_p buigpunten heeft voor $x = p$ en $x = -p$, dat de lijn door de buigpunten richtingscoëfficiënt a heeft en dat als $b = 5p^4$ gekozen wordt, dat dan die lijn vergelijking $y = ax$ heeft. De vragen die gesteld werden over andere snijpunten en oppervlakten kunnen ook in het algemene geval beantwoord worden. Op die manier wordt er meer wiskunde gedaan in de les dan op het examen gevraagd is.

Kogelstoter

Iets dergelijks geldt voor de opgave over de ideale stoothoek α van een kogelstoter (zie Figuur 3). Er wordt een keurige context geschetst van een kogelstoter die een kogel altijd met dezelfde snelheid wegstoot. Wat die snelheid is, dat blijft geheim. De afmetingen van de kogel worden verwaarloosd (over die van de kogelstoter wordt niet gerept) en voor

het geval $\cos(\alpha) = 0,6$ wordt een parametervoorstelling van de vlucht gegeven. Het blijkt een parabool te zijn:

$$\begin{cases} x(t) = 8,4t, \\ y(t) = h + 11,2t - 4,9t^2, \end{cases}$$

met afstanden in meters en tijd in seconden. Dat zelf bedenken, wordt niet van de leerling gevraagd, waarschijnlijk om leerlingen zonder natuurkunde in hun pakket niet te benadelen. Ze hoeven aanvankelijk alleen de overbrugde afstand uit te rekenen voor het geval dat $h = 1,96$. Daardoor blijft de mededeling $\cos(\alpha) = 0,6$ geheimzinnig als nutteloos gegeven in de opgave zweven. In de wiskundeles zou wel aan de orde komen dat die 0,6 uit een 3-4-5-driehoek afkomstig is, als u begrijpt wat ik bedoel, en dat de snelheid blijkbaar 14 m/s is geweest. De parametervoorstelling is dan afhankelijk van hoek α :

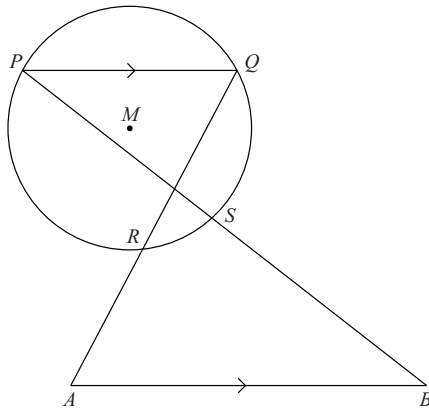
$$\begin{cases} x(t) = 14 \cos(\alpha)t, \\ y(t) = h + 14 \sin(\alpha)t - 4,9t^2, \end{cases}$$

met $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}\pi$. De examenopgave vervolgt dan met te melden hoe de horizontale afstand r die de kogel overbrugt, afhangt van α . Voor een examen voert het te ver, dat valt te begrijpen, maar in een les kan leerlingen prima gevraagd worden de formule af te leiden. Immers, in geval van ontsporing kunnen ze met een klein beetje hulp weer op weg geholpen worden. Er zou dan blijken dat het getal 14 zo handig gekozen is, omdat 14 in het kwadraat gelijk is aan 20 keer de valversnelling (afgerond op 9,8).

In de les zou het in zijn volle omvang een goede opgave zijn, maar in het examen is hij behoorlijk beperkt tot redelijk standaard rekenwerk, af en toe met rekenmachine. (De opgave kan nog algemener bekeken worden door op de plaats van 14 telkens v te schrijven, maar met 14 is het wel zo duidelijk welke rol de snelheid speelt.)

Even lang

Een opgave die een stuk lastiger voor leerlingen bleek, is de opgave 'Even lang', waarbij uitgaande van gelijkzijdige driehoeken in stappen wordt toegewerkt naar de lengte van lijnstuk EH (zie Figuur 4). Bij deze opgave werd niet de service verleend om de figuur bijvoorbeeld 120 graden of 30 graden te draaien en een handig assenstelsel aan te brengen met A of D als oorsprong. Pas in 2018 doet de



Figuur 5

de constante hoek) en gevraagd wordt te bewijzen dat een vierhoek een koordenvierhoek is (wat volgens de leerling neerkomt op het bewijzen dat de overstaande hoeken opgeteld 180 graden opleveren). En inderdaad levert die wijsheid, gecombineerd met een buitenhoek van een driehoek of een gestrekte hoek, onvermijdelijk het gevraagde bewijs. De examenmeetkunde is op deze manier een flauw spelletje geworden. Zoek relevante stellingen bij elkaar — een lijst waaruit gekozen kan worden, wordt bij het examen gegeven — en zet ze in een volgorde die een bewijs ople-

vert. In het nieuwe examenprogramma zit zoals gezegd veel meer analytische meetkunde, ten koste van deze vlakke meetkunde. Goed idee wat mij betreft. De vlakke examenmeetkunde dreigt inmiddels in het onderwijs (en het bijlesonderwijs) tot een te trainen bezigheid te verworden.

Conclusie

Niet alle opgaven uit het examen zijn hierboven aan de orde gekomen, maar het examen overziend zou je het vermoeden kunnen krijgen dat voor veel onderwerpen geldt: de wiskunde teruggebracht tot stappenplannen. Als er ‘dit’ staat moet je ‘dat’ doen en ‘zus’ moet je ‘zo’ aanpakken. Ik ben ervan overtuigd dat er in de aanloop naar het examen veel op die manier onderwezen wordt. Dat wordt ook niet ontmoedigd door het correctievoorschrift, waarin de te doorlopen stappen nauwkeurig beschreven zijn en dat in toenemende mate van detail besproken en geïnterpreteerd wordt, bijvoorbeeld op de website van de NVvW. Het doet geen recht aan verschillen tussen docenten, maar ook niet aan verschillen tussen leerlingen. De een volgt in zijn uitwerking keurig de aangeleerde stapjes, de ander zet wat grotere stappen in

zijn denken en weer een ander bedenkt ter plekke een eigen, soms wat onbeholpen opgeschreven methode. Allemaal doen ze wiskunde, maar het examen en (het gebruik van) het correctievoorschrift zijn vooral gericht op de keurig aangeleerde stapjes.

Ik ben er ook van overtuigd dat er in de jaren voor de laatste sprint naar het examen, veel meer recht gedaan wordt aan de andere aspecten van de wiskunde: onderzoeken, ontdekken, modelleren, vastlopen, opnieuw beginnen, probleemoplossen. De opgaven uit het examen over buigpunten en kogelstoter lenen zich daarvoor als ze niet zo teruggebracht waren tot rekenwerk. Nu is aan de opgaven niet direct af te lezen wat leerlingen allemaal nog meer kunnen. De beste manier om werkelijk op de hoogte te raken van wat er verwacht mag worden van eerstejaarsstudenten blijft toch om het ze gewoon eens zelf te vragen. En voor zo’n gesprek is het examen, dat ze immers allemaal gemaakt hebben, een mooi uitgangspunt. Dat dan weer wel. ←

De afgedrukte opgaven en losse figuren zijn afkomstig uit het eindexamen vwo wiskunde B, eerste tijdvak, 20 mei 2014, en zijn gebruikt met toestemming van het College voor Examens.

“Bewijs” versus “Toon aan”

Er is verschil tussen de opdracht “Bewijs” en “Toon aan”. Dat zit zo. (Voor alle regelgeving, examenprogramma’s, examenopgaven, correctievoorschriften enzovoorts, zie www.examenblad.nl.) Tijdens het examen mag de kandidaat gebruikmaken van een grafische rekenmachine; een aantal types is toegestaan. In het geheugen van die machine mag de kandidaat van alles zetten, behalve dan de app ZoomMath. Daarmee kan de rekenmachine opeens allerlei computeralgebra-achtige dingen uitvoeren en dat is niet de bedoeling. Controle tijdens het examen van alle rekenmachines is nogal een gedoe, vooral ook omdat de app gecamoufleerd kan worden.

Wordt er in de opgave om een exacte of algebraïsche uitwerking gevraagd, dan wordt er een uitwerking verwacht waarin de grafische rekenmachine geen rol speelt. (De rekenmachine kan je natuurlijk nog steeds wel op weg helpen om zo’n exacte uitwerking te vinden.) Nieuw dit jaar is het onderscheid tussen de opdrachten “Bewijs” en “Toon aan”. Als er gevraagd wordt om iets te bewijzen, dan mag de grafische rekenmachine geen rol spelen in de uitwerking. Wordt er gevraagd om iets aan te tonen, dan mag dat wel. Zo wordt

er gevraagd in opdracht 5 om iets te bewijzen over de oppervlakte van vlakdelen begrensd door een lijn en de grafiek van een functie. Het gebruik van integralen ligt voor de hand, en de berekening ervan dient zonder sporen van de grafische rekenmachine opgeschreven te worden. Anders was er wel gevraagd om het aan te tonen.

Zelfs nu dit ragfijne onderscheid is gemaakt, geeft het examen niet een volledig beeld van het gebruik van de grafische rekenmachine door aankomende studenten. Sommige opgaven waarbij toepassing van de rekenmachine is toegestaan worden door een groot deel van de leerlingen exact opgelost. Dat het niet hoeft, wil dus niet zeggen dat ze het ook niet kunnen. Ontegengesteld zijn ze wel gewend om de rekenmachine altijd ter beschikking te hebben. Ze zijn er ook erg handig mee. Daar hebben ze helaas weinig aan wanneer ze tijdens hun studie te maken krijgen met Maple of Mathematica of iets dergelijks.

Dat de grafische rekenmachine zijn langste tijd heeft gehad is een veilige voorspelling. Of en waardoor de rol wordt overgenomen is lastiger te voorspellen.