Sonja Cox
Seminar für Angewandte Mathematik
Departement Mathematik
ETH, Zürich
sonja.cox@sam.math.ethz.ch

Onderzoek Stieltjesprijs 2013

Stochastische partiële differentiaalvergelijkingen

Op de WONDER-lezingenmiddag van 13 december 2013 is de Stieltjesprijs 2012 uitgereikt aan Sonja Cox. Deze jaarlijkse prijs eert het beste wiskundig proefschrift verdedigd aan een Nederlandse universiteit in het desbetreffende jaar. Sonja promoveerde in Delft op het proefschrift *Stochastic Differential Equations in Banach Spaces: Decoupling, Delay Equations and Approximations in Space and Time* **bij promotor Jan van Neerven. Naar aanleiding van deze prijs vertelt zij hier over haar onderzoeksgebied; in het bijzonder wordt uitgelegd wat een stochastische partiële differentiaalvergelijking is en hoe men die numeriek kan simuleren.**

Stel u wilt de oplossing van een stochastische partiële differentiaalvergelijking (SPDV) simuleren... Waarschijnlijk komen er nu meteen enkele vragen bij u op, zoals:

- Wat is een stochastische partiële differentiaalvergelijking ook alweer?
- Waarom zou ik een simulatie van de oplossing willen?
- Hoe wordt een dergelijke simulatie gemaakt?
- Waarom word ik met ‘u’ aangesproken?

Doel van dit artikel is deze vier vragen te beantwoorden, beginnende bij de laatste (en makkelijkste): de gehanteerde beleefdheidsvorm is het gevolg van mijn verblijf in het Duitstalig gebied.

Enkele interessante SPDV’s

Een stochastische partiële differentiaalvergelijking is een partiële differentiaalvergelijking met een ruisterm, die toevallige invloeden beoogt te beschrijven. Men kan denken aan onzekerheden in de parameters van het model, externe of interne ruisbronnen zoals thermische ruis en afrondingsfouten bij simulaties. Slechts bij hoge uitzondering is het mogelijk de oplossing van een SPDV in gesloten vorm op te schrijven. Om toch enig inzicht te krijgen in de aard van de oplossing kan men die simuleren op een computer.

De bekendste voorbeelden van SPDV’s komen uit de natuurkunde, bijvoorbeeld de stochastische Navier–Stokes-vergelijking en de Kardar–Parisi–Zhang-vergelijking (KPZ-vergelijking) — die laatste wordt onder andere gebruikt als een model voor random grensvlakken. Het probleem van deze vergelijkingen is dat ze in hoge mate niet-lineair zijn en dat men bovendien in het algemeen geïnteresseerd is in ruis die nogal ‘wild’ van aard is, de zogenaamde *additieve witte ruis* (zie onder). Voor de KPZ-vergelijking is pas recent een oplossingsconcept ontwikkeld (en dan ook voor enkele speciale gevallen), zie [7] en het artikel van Jan van Neerven in het vorige nummer van dit blad. Het is voorlopig nog een uitdaging simulatiemethoden te ontwikkelen voor deze vergelijkingen.

De stochastische Burgers-vergelijking is een voorbeeld van een SPDV die behapbaar en toch interessant is. De deterministische Burgers-vergelijking is een vereenvoudiging van de Navier–Stokes-vergelijking, die geen turbulent gedrag kan modelleren. Dit gebrek poogt men dan op te heffen door een stochastische term toe te voegen, hetgeen de stochastische Burgers-vergelijking oplevert. Deze vergelijking is weliswaar ook in hoge mate niet-lineair (de niet-lineairiteit is nauw verwant aan de niet-lineairiteit in de KPZ-vergelijking), maar in de eendimensionale setting met additieve witte ruis is de convergentie van numerieke schema’s inmiddels bewezen, zie bijvoorbeeld [1–2].

Ook de stochastische Cahn–Hilliard-vergelijking geniet veel aandacht. De deterministische Cahn–Hilliard-vergelijking, die eveneens niet-lineair is, beschrijft hoe een mengsel van twee vloeistoffen zich opsplitst in gebieden die puur uit één van de twee vloeistoffen bestaan. In een artikel uit 1970 merkt H. Cook op dat als men de Cahn–Hilliard-vergelijking uitbreidt met een stochastische term, de oplossing beter overeenkomt met de waarnemingen. Zie bijvoorbeeld [8] voor numerieke simulaties van deze vergelijking.

Het zal u niet ontgaan zijn dat de bovengenoemde vergelijkingen allemaal niet-lineair zijn. Ik noem deze voorbeelden omdat ik denk dat ze interessant zijn, maar ook omdat de theorie voor numerieke simulaties van niet-lineaire SPDV’s pas in de laatste jaren goed op gang is gekomen — het is dus momenteel een interessant gebied.

Wat is een SPDV?
Een stochastische partiële differentiaalvergelijking is een partiële differentiaalvergelijking die gedreven wordt door ruis. Om dit uit te leggen, beginnen we eerst heel eenvoudig met een gewone differentiaalvergelijking: zij $u_0 \in \mathbb{R}$, zij $a\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ continu differentieerbaar, $a(0)=0$, en zij $b\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ continu. Beschouw de vergelijking

$$u(t) = u(0) + \int_0^t u(s)\,da(s) + \int_0^t b(s)\,ds, \quad t \geq 0. \tag{1}$$

Het is welbekend (dan wel eenvoudig te controleren) dat de unieke oplossing van deze vergelijking wordt gegeven door

$$u(t) = e^{a(t)}\left(u_0 + \int_0^t e^{-a(s)} b(s)\,ds\right), \quad t \geq 0. \tag{2}$$

Stel nu dat de afbeeldingen $\int_0^t a(s)\,ds$ en $\int_0^t b(s)\,ds$ stochastisch zijn, dat wil zeggen, zij $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ een kansruimte, zij voor elke $t \in [0,\infty)$ toevalsgetallen $\Omega \ni \omega \mapsto A(t,\omega) \in \mathbb{R}$ en $\Omega \ni \omega \mapsto B(t,\omega) \in \mathbb{R}$ gegeven (met andere woorden: $A, B\colon \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ zijn stochastische processen), en beschouw nu de vergelijking

$$U(t,\omega) = u_0 + \int_0^t U(s,\omega)\,dA(s,\omega) + B(t,\omega), \quad t \geq 0. \tag{3}$$

Voor de meeste modellen is het zeer aannemelijk dat de ruis ongecorreleerd is in de tijd. Om dat te garanderen neemt men aan dat de stochastische processen A en B *onafhankelijke incrementen* hebben, dat wil zeggen: $A(t) - A(s)$ is onafhankelijk van $\{A(r)\colon r \in [0,s]\}$ voor alle $0 \leq s \leq t \leq \infty$. Dit heeft echter tot gevolg dat de processen A en B — mits niet op al te triviale wijze gekozen — bijna zeker (dat wil zeggen met kans één) nergens differentieerbaar zijn. Er moet dus enig werk worden verricht om een zinvolle betekenis te geven aan de oplossing van de vergelijking (3).

Om een concreet voorbeeld te geven: als $A(t,\omega) = \alpha t + \beta W(t)$, $B(t,\omega) = 0$, waarbij $W\colon [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ een Brownse beweging is en $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dan interpreteert men de integraal met betrekking tot A in (3) in het algemeen als een Itô-integraal. In dat geval wordt de oplossing van (3) gegeven door

$$U(t,\omega) = u_0 e^{(\alpha - \frac{1}{2}\beta^2)t + \beta W(t,\omega)}, \quad (t,\omega) \in [0,\infty) \times \Omega. \tag{4}$$

Merk op dat men op grond van vergelijking (2) de term '$-\frac{1}{2}\beta^2 t$' in de exponent niet direct zou verwachten — deze term ontstaat door het gebruik van de Itô-integraal.

Een goede interpretatie voor de oplossing van een stochastische *partiële* differentiaalvergelijking is nog lastiger, aangezien er dan ruis in de tijd en in de ruimte kan optreden. Een concreet voorbeeld van een SPDV is de stochastische warmtevergelijking:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} U(t,x) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(t,x) + \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} W(t,x), \\ &\qquad (t,x) \in [0,T] \times [0,1]; \\ U(0,x) &= U_0(x), \quad x \in [0,1]; \\ U(t,0) &= U(t,1) = 0, \quad t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{5}$$

De term '$+\frac{\partial^2}{\partial t \partial x} W(t,x)$' wordt *additieve witte ruis* genoemd. Men kan dit interpreteren als de afgeleide in de tijd en in de ruimte van een tweedimensionaal Gaussisch veld (een soort tweedimensionale Brownse beweging). Aangezien dit toevalsveld bijna zeker zowel in de tijd als in de ruimte nergens differentieerbaar is (laat staan in de tijd *en* in de ruimte), is het niet triviaal om een interpretatie te geven aan de oplossing van (5).

In deze sectie hebben we alleen lineaire vergelijkingen beschouwd, maar hopelijk heeft u nu een idee van wat stochastische partiële differentiaalvergelijkingen zijn. Klassieke boeken over SPDV, waarin onder andere vergelijking (5) en de stochastische Burgersvergelijking worden behandeld, zijn [5] en [6]. In [10] worden SPDV's met niet-Gaussische ruis behandeld. Een mooie inleiding voor SPDV's geïnterpreteerd als SDV's in een Banach ruimte is te vinden in [9].

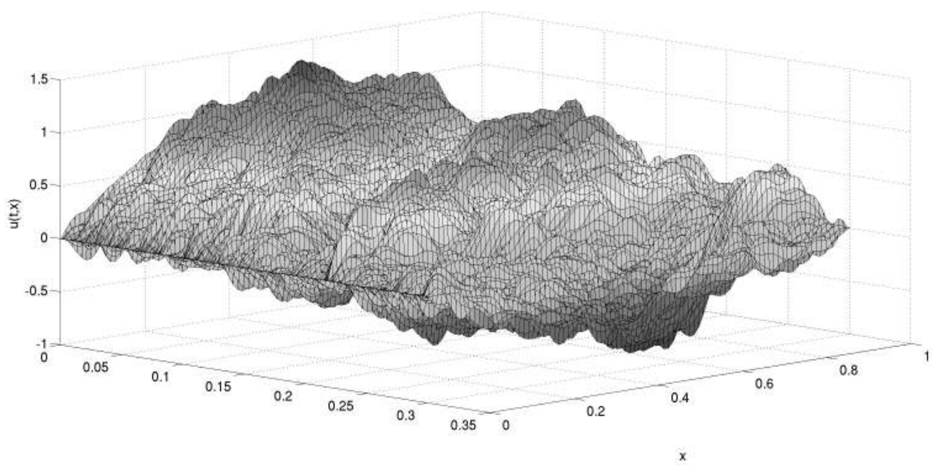
Numerieke methoden
Het verschil tussen een simulatie van een deterministische PDV en een stochastische PDV is uiteraard dat men — naast discretisaties in de ruimte en de tijd — ook een discretisatie in de waarschijnlijkheidsruimte moet maken. Alvorens dat te doen dient men zich de vraag te stellen waarin men geïnteresseerd is. In sommige gevallen volstaat wellicht een plaatje van één mogelijk oplossingspad $(x,t) \mapsto U(t,\omega)(x)$ met $\omega \in \Omega$ vast (zie Figuur 1). In dat geval hoeft men feitelijk alleen een tijds- en ruimtediscretisatie te maken. Voor een SPDV met een globale oplossing is het vaak niet moeilijk aan te tonen dat deze discretisatie bijna zeker met een bepaalde snelheid convergeert (zie bijvoorbeeld [3, Hoofdstuk 8]), hetgeen een dergelijke simulatie enige waarde verleent.

Meestal is men echter niet geïnteresseerd in één enkel oplossingspad, maar in een stochastische kwantiteit die afgeleid wordt van de oplossing U, zoals de verwachte maximale waarde van de oplossing van (5) op $[0,t] \times [0,1]$:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s \in [0,t], x \in D} |U(s,x)|\right],$$

of misschien de verwachte totale energie op tijdstip t:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^1 U^2(t,x)\,dx\right],$$



Figuur 1 Een simulatie van één mogelijk oplossingspad voor (5), verkregen door een impliciete Euler-approximatie in de tijd en een spectrale Galerkin-approximatie in de ruimte.

of, in de meest algemene vorm: $\mathbb{E}[g(U)]$, waarbij $g : C([0,\infty)\times[0,1]) \to \mathbb{R}$.

Wanneer men geïnteresseerd is in $\mathbb{E}[g(U)]$, waarbij U de oplossing is van een stochastische *gewone* differentiaalvergelijking in $\mathbb{R}^d$ met Gaussische ruis kan men een beetje valsspelen: in dat geval wordt de afbeelding

$$[0,\infty)\times\mathbb{R}^d \ni (t,x) \mapsto \mathbb{E}\Big(g(U(t))|U(0)=x\Big)$$

beschreven door een (deterministische!) tweede-orde-partiële differentiaalvergelijking, de zogenaamde *voorwaartse Kolmogorov-vergelijking*. Men kan dus in plaats van de stochastische differentiaalvergelijking de bijbehorende Kolmogorov-vergelijking simuleren. Deze insteek is echter erg inefficiënt als de dimensie d groot is, dus in het bijzonder bij stochastische *partiële* differentiaalvergelijkingen, waarbij $d=\infty$.

Een andere insteek is de zogenaamde *stochastische Galerkin-methode*, waarbij men op zoek gaat naar een orthonormale basis in de beeldruimte van de ruis en de ruis aan de hand van deze basis modelleert. Deze methode werkt met name goed voor elliptische partiële differentiaalvergelijkingen met additieve ruis.

Ten slotte kan men nog een Monte Carlo-methode gebruiken om $\mathbb{E}[g(U)]$ te benaderen:

$$\mathbb{E}[g(U)] \approx \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} g(U^{m,N}),$$

waar $N,M\in\mathbb{N}$, en waar $(U^{m,N})_{m=1}^{M}$ onafhankelijke realisaties zijn van approximaties van de oplossing van de SPDV, verkregen door middel van discretisatie in de ruimte en in de tijd (N is een parameter die een indicatie geeft van de nauwkeurigheid van de tijd-ruimtediscretisatie). Deze insteek werkt voor een grote klasse van problemen, maar is nogal duur: de convergentieorde van de discretisaties in ruimte en tijd van een SPDV is in het algemeen kleiner dan die van een deterministische PDV, en daar bovenop komt nog de relatief dure Monte Carlo-simulatie.

Tot slot

Nu we zover gekomen zijn, vraagt u zich misschien af hoe dit vakgebied zich verder ontwikkelt. Zoals gezegd, zijn er vele interessante niet-lineaire problemen waarvoor nog geen convergente simulatiemethoden bekend zijn. Ook voor niet-Gaussische ruis zijn nog weinig methoden bekend. Daarnaast wordt er naarstig gezocht naar methoden om de Monte Carlo-simulatie efficiënter te maken. Ten slotte blijkt het voor SPDV's lastig te zijn theoretisch aan te tonen dat de convergentieorde in de zwakke zin twee maal zo groot is als de convergentieorde in de sterke zin (een bekend fenomeen voor gewone stochastische differentiaalvergelijkingen).

Betreffende de niet-lineaire SPDV's heb ik samen met Martin Hutzenthaler en Arnulf Jentzen, bij wie ik in Zürich als post-doc ben aangesteld, onderzocht hoe een perturbatie van de beginwaarde de oplossing van bepaalde klassen niet-lineaire S(P)DV's beïnvloedt [4]. Dit is een eerste stap in de richting van het schatten van de convergentiesnelheid van een tijdsdiscretisatie.

Referenties

1 A. Alabert en I. Gyöngy, On numerical approximation of stochastic Burgers' equation, in *From stochastic calculus to mathematical finance*, Springer, Berlin, 2006, pp. 1–15.

2 D. Blömker en A. Jentzen, Galerkin approximations for the stochastic Burgers equation. *SIAM J. Numer. Anal.* 51 (2013), 694–715.

3 S. Cox, *Stochastic Differential Equations in Banach Spaces: Decoupling, Delay Equations, and Approximations in Space and Time*, proefschrift, TU Delft, 2012.

4 S. Cox, M. Hutzenthaler en A. Jentzen, Local Lipschitz continuity in the initial value and strong completeness for nonlinear stochastic differential equations, preprint available at arXiv:1309.5595.

5 G. Da Prato en J. Zabczyk, *Stochastic equations in infinite dimensions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 44, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

6 G. Da Prato en J. Zabczyk, *Ergodicity for infinite-dimensional systems*, London Mathematical Society Lecture Note Series 229, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

7 M. Hairer, Solving the KPZ equation, *Ann. of Math. (2)* 178 (2013), 559–664.

8 M. Kovács, S. Larsson en A. Mesforush, Finite element approximation of the Cahn-Hilliard-Cook equation, *SIAM J. Numer. Anal.* 49 (2011), 2407–2429.

9 J. van Neerven, *Stochastic Evolution Equations*, Lecture Notes of the 11th Internet Seminar, TU Delft; OpenCourseWare, ocw.tudelft.nl, 2008.

10 S. Peszat en J. Zabczyk, *Stochastic partial differential equations with Lévy noise*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 113, Cambridge University Press, Cambridge, 2007. An evolution equation approach.