

Benne de Weger

Faculteit Wiskunde en Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
b.m.d.weger@tue.nl

Vakantiecursus

Het $3n + 1$ -vermoeden

Op de Vakantiecursus 2013 van het Platform Wiskunde Nederland laat Benne de Weger zijn licht schijnen op het $3n + 1$ -vermoeden. Dit is een open probleem uit de getaltheorie dat voor het eerst geformuleerd werd door Lothar Collatz in 1937. Dit artikel laat zien dat het $3n + 1$ -vermoeden vertakkingen en herformuleringen heeft in uiteenlopende deelgebieden van de wiskunde.

Neem een natuurlijk getal n . Als het even is, deel het door 2. Als het oneven is, vermenigvuldig het met 3 en tel er 1 bij op. Met de uitkomst doe je hetzelfde, net zolang tot je een patroon herkent.

Omdat voor een oneven n het volgende getal $3n + 1$ altijd even is, is de daaropvolgende stap altijd delen door 2. Deze twee stappen nemen we daarom samen tot één stap. Het hierboven beschreven proces is dan het vanuit startwaarde n itereren van de zogeheten $3n + 1$ -functie:

$$T(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}n & \text{als } n \text{ even,} \\ \frac{1}{2}(3n + 1) & \text{als } n \text{ oneven.} \end{cases}$$

Dit iteratieproces kunnen we noteren met pijlen, bijvoorbeeld:

$$6 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots$$

Dit voorbeeld laat zien dat je met de getallen 1, 2, 3, 4, 5, 6 en 8 als startwaarde iedere keer op 1 uitkomt, en dan kom je in de *cykel* $1 \Leftrightarrow 2$

terecht waar je nooit meer uitkomt. Een ander voorbeeld:

$$7 \rightarrow 11 \rightarrow 17 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow \dots$$

laat zien dat je met startwaarde 7 na zeven iteraties op 5 uitkomt, waarvan we al wisten dat je dan vervolgens in de *cykel* $1 \Leftrightarrow 2$ belandt.

De k -de iteratie van n onder de functie T noteren we als $T^k(n)$. Dus bijvoorbeeld $T^7(7) = 5$ en $T^{11}(7) = 1$.

Het vermoeden

Het $3n + 1$ -vermoeden zegt dat bovengenoemd iteratieproces bij iedere mogelijke startwaarde altijd een keer bij 1 zal uitkomen, en dus ‘eindigt’ in de *cykel* $1 \Leftrightarrow 2$. Dat is een wat informele bewering, die eenvoudig formeel te maken is, als volgt:

Het $3n + 1$ -vermoeden. Voor iedere $n \in \mathbb{N}$ is er een $k \in \mathbb{N}$ zodat $T^k(n) = 1$.

De iteratierij $n \rightarrow T(n) \rightarrow T^2(n) \rightarrow \dots$ heet de *baan* van n . Als een baan weer op z'n

beginpunt uitkomt, dus voor zekere $k, n \in \mathbb{N}$ geldt dat $T^k(n) = n$, dan gaat de baan zich vanaf dat moment herhalen: $n \rightarrow T(n) \rightarrow \dots \rightarrow T^{k-1}(n) \rightarrow T^k(n) = n \rightarrow T(n) \rightarrow \dots$. Zo'n herhaald stuk noemen we een *cykel*, en noteren we als $(n, T(n), T^2(n), \dots, T^{k-1}(n))$. We zien $(n, T(n), T^2(n), \dots, T^{k-1}(n))$ en $(T(n), T^2(n), \dots, T^{k-1}(n), n)$ als dezelfde *cykel*, dus $(1, 2) = (2, 1)$. Een baan noemen we *convergent* als er een *cykel* in zit (en daar ‘eindigt’ die baan dan ook in), en anders *divergent*. Een *divergente* baan is onbegrensd. De *cykel* $1 \Leftrightarrow 2$ heet ook wel de *triviale cykel*.

Het $3n + 1$ -vermoeden kan gezien worden als de combinatie van twee onafhankelijke uitspraken:

Het $3n + 1$ -cykelvermoeden. De $3n + 1$ -functie kent geen niet-triviale cyclen.

Het $3n + 1$ -convergentievermoeden. De $3n + 1$ -functie kent geen *divergente banen*.

Banen kunnen lang *divergent* lijken en tot grote hoogten stijgen:

$$27 \rightarrow 41 \rightarrow 62 \rightarrow 31 \rightarrow 47 \rightarrow 71 \rightarrow 107 \rightarrow 161 \rightarrow 242 \rightarrow 121 \rightarrow 182 \rightarrow 91 \rightarrow 137 \rightarrow 206 \rightarrow 103 \rightarrow 155 \rightarrow 233 \rightarrow 350 \rightarrow 175 \rightarrow 263 \rightarrow 395 \rightarrow$$

decennium	60 – 69	70 – 79	80 – 89	90 – 99	00 – 09
aantal publicaties	8	34	52	103	134

Tabel 1

593 → 890 → 445 → 668 → 334 → 167 → 251 → 377 → 566 → 283 → 425 → 638 → 319 → 479 → 719 → 1079 → 1619 → 2429 → 3644 → 1822 → 911 → 1367 → 2051 → 3077 → 4616 → ...

maar toch convergent blijken en uitkomen in de triviale cykel:

... → 4616 → 2308 → 1154 → 577 → 866 → 433 → 650 → 325 → 488 → 244 → 122 → 61 → 92 → 46 → 23 → 35 → 53 → 80 → 40 → 20 → 10 → 5 → 8 → 4 → 2 ⇌ 1.

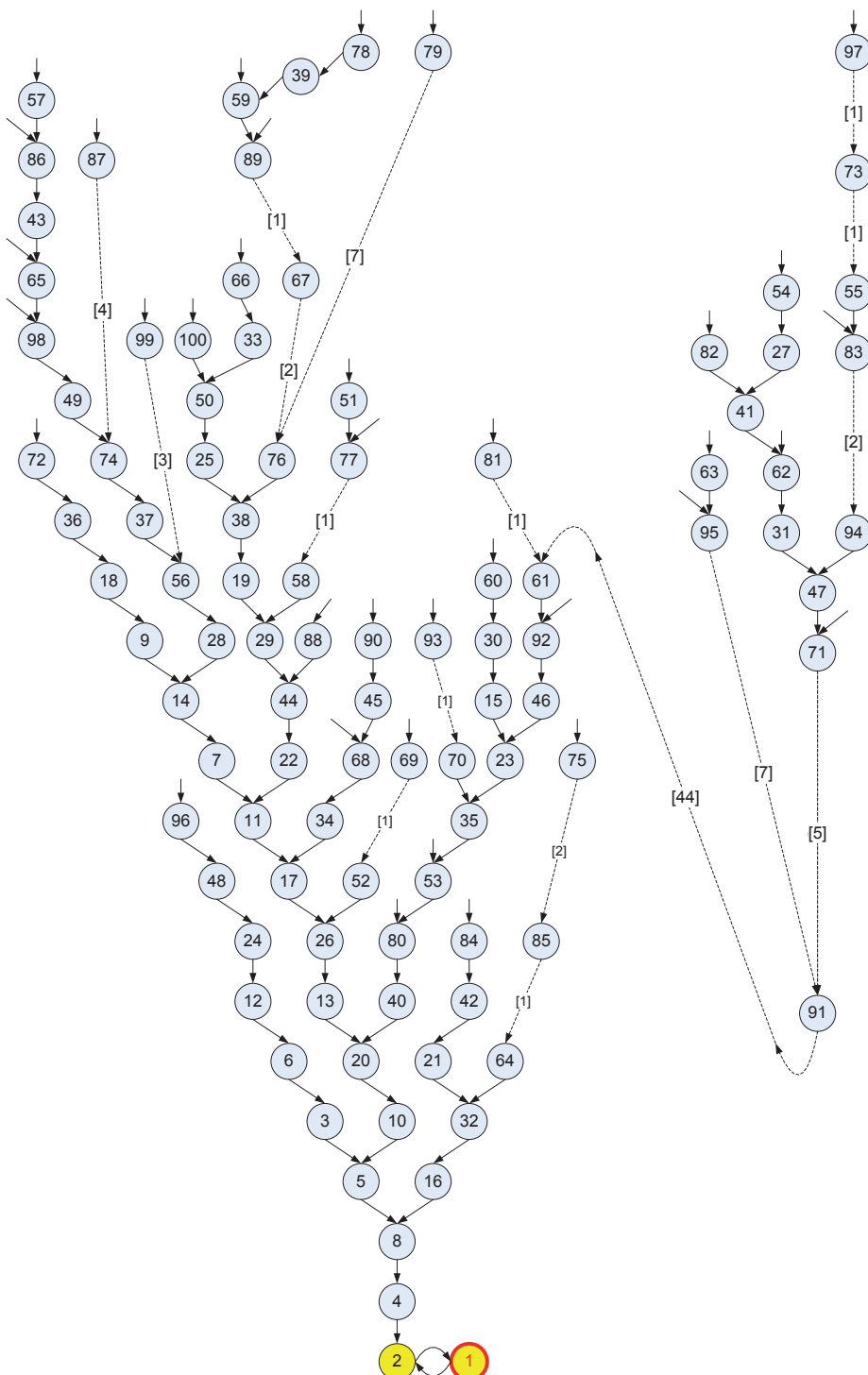
Geschiedenis

De precieze oorsprong van het $3n + 1$ -vermoeden is niet helemaal duidelijk. In de jaren dertig was Lothar Collatz, een Duitse wiskundige, met soortgelijke problemen bezig, en het $3n + 1$ -probleem wordt algemeen aan Collatz toegeschreven. In 1950 raakte het vermoeden breder bekend doordat Collatz er met verschillende wiskundigen op het International Congress of Mathematicians in Cambridge (MA) over sprak. In de jaren zestig verschenen de eerste artikelen over verwante problemen, onder andere over een variant beschreven door de bekende Franse dichter Raymond Queneau, gerelateerd aan rijnschema's in twaalfde-eeuwse poëzie. In 1971 verschijnt het exacte vermoeden voor het eerst in druk, en in 1972 schrijft de bekende wiskundepopularisator Martin Gardner erover, waarna het probleem echt beroemd wordt. In de (kennelijk complete) geannoteerde bibliografie die Jeffrey Lagarias bijhoudt [9–10], is te zien hoezeer het vermoeden de wiskundigen in de greep heeft gekregen, niet alleen in het aantal publicaties (zie Tabel 1), maar ook in de verscheidenheid van wiskundige deelgebieden waaraan het vermoeden gerelateerd blijkt te kunnen worden. In de literatuur staat het $3n + 1$ -vermoeden ook bekend als het vermoeden van Collatz, van Hasse, van Kakutani, van Ulam, als het Syracuse-vermoeden en als het 'hailstone'-vermoeden. De lezer die er meer over wil weten kan worden aangeraden het (wat oudere, maar zeer leesbare en complete, en op het web beschikbare) overzichtsartikel [6] en het nieuwere boek [8] van Jeffrey Lagarias op te slaan.

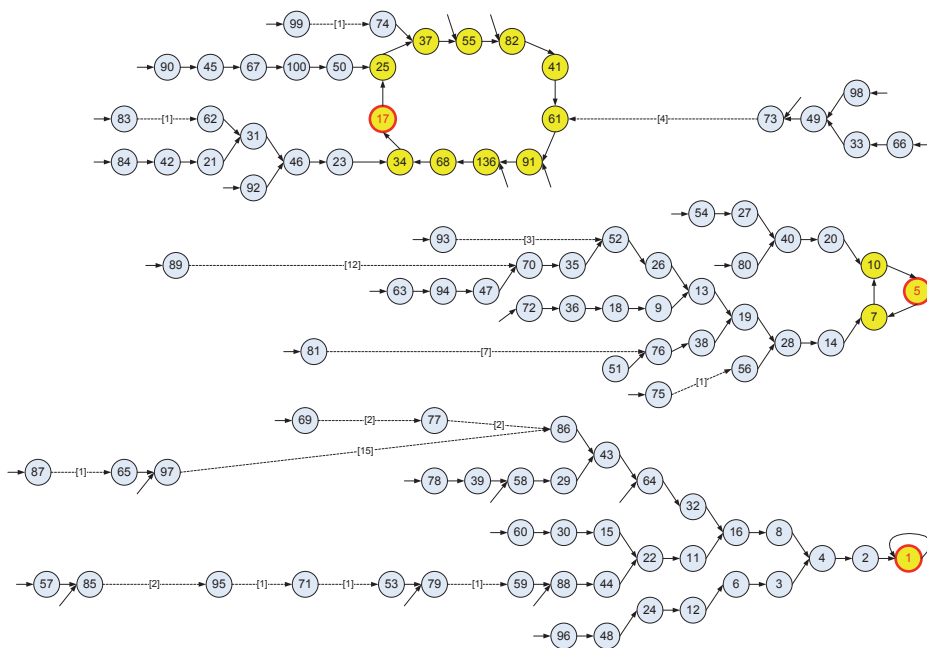
In dit artikel willen we de lezer enige argumenten aanreiken waarom hij/zij wel eens in het vermoeden zou kunnen gaan geloven, en een aantal verbanden aangeven met uiteenlo-

pende wiskundige deelterreinen. Diverse van die verbanden leiden tot interessante herformuleringen van het $3n + 1$ -vermoeden in een totaal andere 'taal'.

Overigens is het vermoeden volstrekt nutteloos. Ionica Smeets [15] noemde het in de Vakantiecursus van 2010 een 'gënant probleem', omdat op feestjes aan leken wel makkelijk uit te leggen is wat het probleem is, maar niet dat al die slimme wiskundigen zo'n ogenschijnlijk makkelijk probleem nog steeds niet hebben kunnen oplossen.



Figuur 1 De $3n+1$ -graaf. Geel gekleurde punten geven een cykel aan, een rood omrand punt geeft het kleinste getal in de component aan.



Figuur 2 De $3n-1$ -graaf.

Grafentaal

Een *graaf* (respectievelijk *gerichte graaf*) is een verzameling punten met lijnen (respectievelijk pijlen) tussen sommige paren punten. Eigenlijk hebben we hierboven al grafen gebruikt om de $3n + 1$ -iteraties te visualiseren. De $3n + 1$ -graaf heeft als punten alle positieve gehele getallen, en voor iedere $n \in \mathbb{N}$ loopt er een pijl van n naar $T(n)$. In Figuur 1 is het deel van de $3n + 1$ -graaf getekend met alle getallen ≤ 100 en hun banen (in iedere baan zijn eventuele getallen boven de 100 weggelaten, en dan is telkens tussen rechte haken aangegeven hoeveel getallen zijn weggelaten).

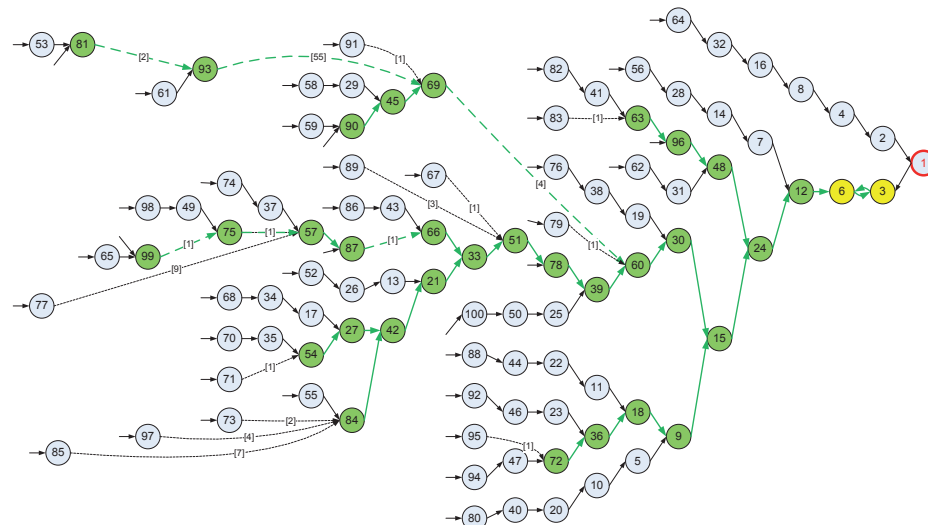
In deze graaf heeft ieder punt één uitgaande pijl en een of twee inkomende pijlen, al naar gelang $n \not\equiv 2 \pmod{3}$ dan wel $n \equiv 2 \pmod{3}$. Immers, voor iedere n is er een inkomende pijl uit $2n$, en als er een andere inkomende pijl is moet die wel van de oneven m komen met $n = \frac{1}{2}(3m + 1)$, en dat betekent dat $m = \frac{1}{3}(2n - 1)$, wat precies dan geheel is als $n \equiv 2 \pmod{3}$.

Een graaf bestaat uit *samenhangscomponenten* (kortweg *componenten* genoemd), gedefinieerd door de regel dat twee punten in dezelfde component zitten dan en slechts dan als er een pad is tussen de twee punten (waarbij ook tegen de pijlrichting in gelopen mag worden). Een graaf die uit slechts één component bestaat noemen we *samenhangend*.

Even ervan uitgaande dat we geen idee hebben waarom we het vermoeden zouden moeten geloven, zodat we met alle eventualiteiten rekening willen houden: we kunnen nu

in de graaf onderscheid maken tussen convergente componenten (die een cykel bevatten) en divergente componenten (die geen cykel bevatten). In een component kan slechts één cykel zitten. Want uit een cykel kun je niet meer ontsnappen door de pijlen te volgen, en als er dan een pad van de ene cykel naar de andere zou moeten lopen moet je vertrekkend vanuit de ene cykel tegen de pijl in lopen, en bij het betreden van de andere cykel met de pijl meelopen. Maar dan zou er ergens op het pad een punt moeten zijn met twee uitgaande pijlen, en dat is onmogelijk.

Zo verkrijgen we een herformulering van het $3n + 1$ -vermoeden:



Figuur 3 De $3n+3$ -graaf.

Het $3n + 1$ -vermoeden, herformulering 1. De $3n + 1$ -graaf is samenhangend.

En ook van de deelvermoedens verkrijgen we herformuleringen:

Het $3n + 1$ -cykelvermoeden, herformulering. De $3n + 1$ -graaf heeft slechts één convergente component.

Het $3n + 1$ -convergentievermoeden, herformulering. De $3n + 1$ -graaf heeft geen divergente componenten.

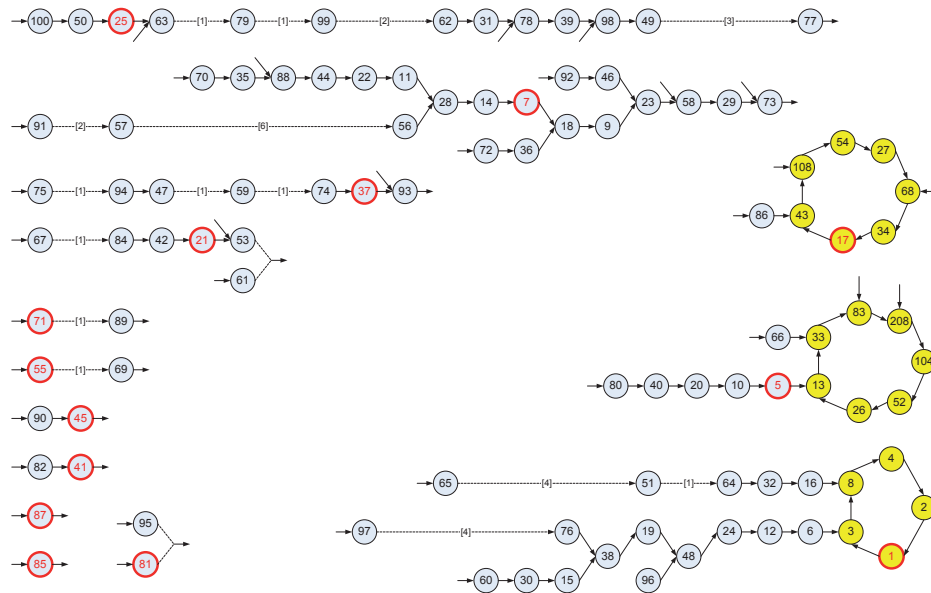
In zekere zin is er hier niets gebeurd: het is slechts een vertaling van het vermoeden in termen van grafen. Toch geeft dit al wel wat inzicht. Onlangs nog was er een serieuze wiskundige die beweerde [12] het vermoeden bewezen te hebben, maar wiens argument gebaseerd was op de veronderstelling dat er tussen ieder tweetal getallen een pad was in de graaf; en dat cruciale punt volgt niet uit zijn argumenten [17]. Zijn redenering was verder ook overbodig ingewikkeld.

Verwante problemen

Het geeft vaak al wat inzicht in een vermoeden als je verwante problemen bestudeert. Waarom bijvoorbeeld in de functie T niet de getallen 3 en +1 vervangen door andere getallen? Dat wil zeggen, we definiëren voor oneven $p > 0$ en oneven q de $pn + q$ -functie:

$$T_{p,q}(n) := \begin{cases} \frac{1}{2}n & \text{als } n \text{ even,} \\ \frac{1}{2}(pn + q) & \text{als } n \text{ oneven.} \end{cases}$$

Dus $T = T_{3,1}$. Het geval $p = 1$ is niet interes-



Figuur 4 De $5n+1$ -graaf.

sant, omdat voor $n > q$ de functie $T_{1,q}$ altijd daalt, en je dus met iedere baan op den duur onder q uitkomt, en daar dan ook blijft. Dus nemen we vanaf nu $p \geq 3$. Het eerste wat wellicht voor de hand ligt te bekijken is de $3n - 1$ -functie $T_{3,-1}$. Maar deze komt neer op de $3n+1$ -functie op de negatieve getallen. Immers, als we het domein van T uitbreiden tot alle gehele getallen, en hetzelfde functievoorschrift voor T blijven hanteren, dan blijkt dat $T_{3,-1}(n) = -T(-n)$.

Figuur 2 toont (een stuk van) de $3n - 1$ -graaf. Wat meteen opvalt is dat er drie cycli zijn voor de $3n - 1$ -functie, en dat deze graaf dus (ten minste) drie componenten heeft. Dat betekent in ieder geval al dat het $3n + 1$ -vermoeden niet direct te generaliseren valt. Dat er precies één component in de graaf zou zijn is kennelijk geen algemene eigenschap van dit soort functies, maar zit vast aan de gekozen parameters. Voor de $3n - 1$ -functie kunnen we het volgende vermoeden formuleren.

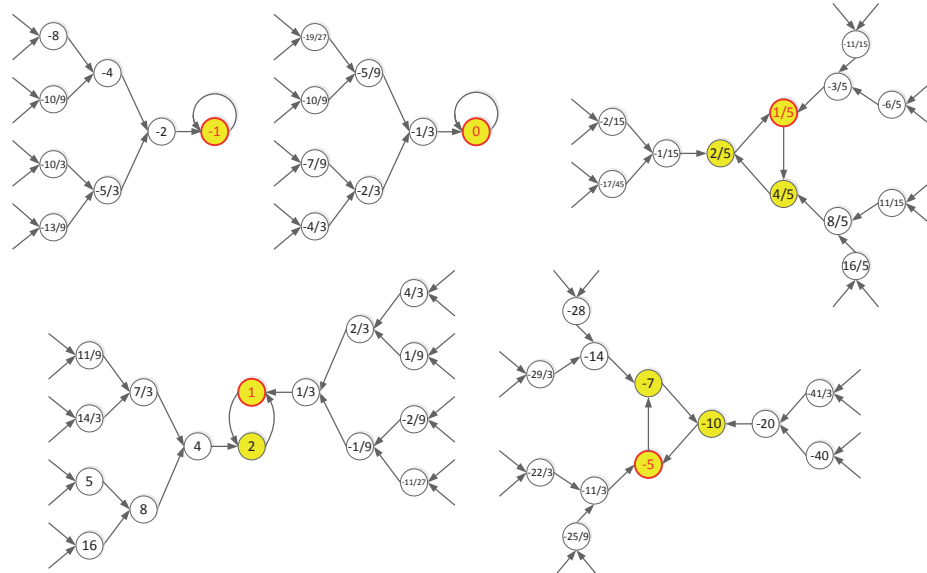
Het $3n - 1$ -vermoeden. Voor iedere $n \in \mathbb{N}$ is er een $k \in \mathbb{N}$ zodat $T^k(n) \in \{1, 5, 17\}$. In grafentaal: De $3n - 1$ -graaf heeft precies 3 componenten.

Figuur 3 laat een ander interessant geval zien: de $3n + 3$ -graaf. Bij bestudering blijkt de deelgraaf van alle drievouden precies de structuur van de $3n + 1$ -graaf te bezitten, alleen dan met alle getallen vermenigvuldigd met 3. In Figuur 3 is dit met groen aangegeven. Wat het $3n + 3$ -vermoeden moet worden kunt u nu zelf bedenken. Uit het $3n + 3$ -vermoeden volgt het $3n + 1$ -vermoeden. Andersom is dit

ook waar: uit het $3n + 1$ -vermoeden volgt het $3n + 3$ -vermoeden.

Een volgend interessant geval is de $5n + 1$ -graaf. Deze is getekend in Figuur 4. Weer zijn er in ieder geval drie cycli te ontdekken, en dus tenminste drie componenten. Maar nu lijken er ook de nodige divergente componenten te bestaan. Het $5n + 1$ -vermoeden, waarvoor we in een volgend hoofdstuk een argument zullen aandragen, luidt dan ook als volgt (we geven alleen een formulering in grafentaal omdat dat nu echt makkelijker is):

Het $5n + 1$ -vermoeden. De $5n + 1$ -graaf heeft precies drie convergente componenten, en oneindig veel divergente componenten.



Figuur 5 Enkele componenten van de rationale $3n+1$ -graaf.

Vermoedelijk zijn alle in Figuur 4 getekende componenten inderdaad verschillend. Van de getekende componenten zonder zichtbare cykel is niet bekend of ze verschillend zijn, laat staan dat bekend is of ze wel echt divergent zijn, of niet stiekem ver weg toch nog een cykel blijken te hebben.

De rationale $3n + 1$ -graaf

Laten we even terugkeren naar de $3n+3$ -graaf. Door alle getallen door 3 te delen zien we in dat dit in feite een uitbreiding van de $3n + 1$ -graaf is tot de rationale getallen met noemer 1 of 3. Net zo kunnen we inzien dat de $3n + q$ -graaf voor oneven $q > 0$ terug te brengen is tot een uitbreiding van de $3n+1$ -graaf voor de rationale getallen met als noemer een deler van q . Immers,

$$T_{3,1} \left(\frac{2k}{q} \right) = \frac{k}{q} = \frac{1}{q} T_{3,q}(2k)$$

en

$$\begin{aligned} T_{3,1} \left(\frac{2k+1}{q} \right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{6k+3}{q} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{q} \frac{6k+3+q}{2} = \frac{1}{q} T_{3,q}(2k+1), \end{aligned}$$

zodat inderdaad voor alle n geldt dat

$$T_{3,1} \left(\frac{n}{q} \right) = \frac{1}{q} T_{3,q}(n).$$

Maar dan kunnen we ook meteen de rationa-

le $3n + 1$ -graaf bekijken, waarbij we toestaan dat n een willekeurig rationaal getal met oneven noemer is. (Merk op dat even noemers niet interessant zijn, daarvoor kunnen we niet op een goede manier definiëren of deze getallen even of oneven zijn. Een rationaal getal met een oneven noemer kunnen we wel even/oneven noemen, namelijk aan de hand van het even/oneven zijn van de teller.)

Zie Figuur 5 voor (een deel van) de rationale $3n + 1$ -graaf. In feite is deze graaf de vereniging van alle $3n + q$ -grafen in één graaf. Nu laten we zien dat ieder punt in deze graaf twee inkomende pijlen heeft. Bij een punt in de graaf hoort een rationaal getal $\frac{a}{b}$, met b oneven. Er komt in ieder geval een pijl van $\frac{2a}{b}$, een andere zou moeten komen van $\frac{c}{d}$ met oneven d zodat

$$\frac{3c}{2d} + \frac{1}{2} = \frac{a}{b}.$$

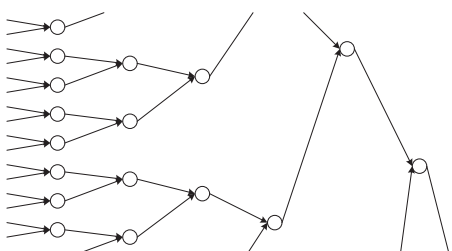
Hieruit halen we

$$\frac{c}{d} = \frac{2a - b}{3b}.$$

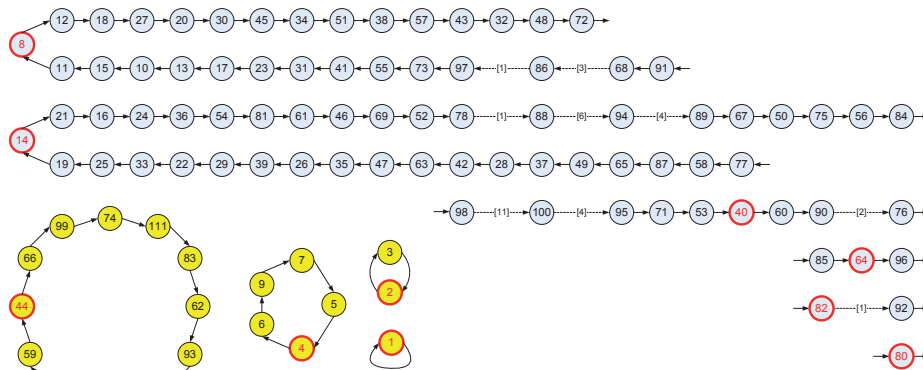
Omdat b oneven is, is ook c oneven, en dat toont aan dat deze $\frac{c}{d}$ inderdaad anders is dan $\frac{2a}{b}$. Dus er zijn altijd twee inkomende pijlen bij ieder punt. Terugredenerend betekent dit dat bovenop ieder punt in de graaf een zogeheten *volledige binaire boom* staat.

We gaan nu kijken naar cycli. Een cykel heeft een zogeheten *even/oneven-structuur*, die aangeeft of de opeenvolgende getallen in de cykel even (e) dan wel oneven (o) zijn. Een voorbeeld: de cykel $(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5})$ (dit is inderdaad een cykel want $\frac{1}{2}(3 \times \frac{1}{5} + 1) = \frac{4}{5}$) heeft de even/oneven-structuur *eo*. Omdat de cykel geen begin heeft, is deze even/oneven-structuur gelijk aan *eo*e en aan *o*ee.

De even/oneven-structuur schrijft precies voor wat op ieder moment de keuze is in de $3n + 1$ -functie. Dit stelt ons in staat een vergelijking op te stellen voor een cykel met een gegeven even/oneven-structuur. Een voorbeeld: als we uitgaan van *eo*e en beginnen met het



Figuur 6 Een naar beide zijden onbegrensde volledige binaire boom.



Figuur 7 De amuzikale graaf.

getal x , dan zal x even zijn, en dus

$$x \rightarrow T(x) = \frac{x}{2}.$$

Op deze tweede plek in de cykel moet ook een even getal staan, dus

$$T(x) \rightarrow T^2(x) = \frac{T(x)}{2} = \frac{x}{4}.$$

En dit derde getal in de cykel moet nu oneven zijn, dus

$$T^3(x) = T\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{3x}{4} + 1 = \frac{3x + 4}{4}.$$

Omdat de cykel rond is en lengte 3 heeft is $T^3(x) = x$, dus $3x + 4 = 4x$, en hier staat een eenvoudige eerstegraadsvergelijking in x , die slechts één oplossing heeft. Dit gaat voor iedere cykel net zo, en die ene oplossing is altijd een rationaal getal met een oneven noemer (in bovenstaand voorbeeld is dat $x = \frac{4}{5}$). Gevolg is dat bij iedere even/oneven-structuur precies één cykel in de rationale $3n + 1$ -graaf hoort.

We geven een lijstje van mogelijke even/oneven-structuren (deze staan in de literatuur bekend als *Lyndon-woorden*):

- lengte 1: twee mogelijkheden: e, o, horend bij de cycli (0), (−1);
- lengte 2: één mogelijkheid: eo, horend bij de triviale cykel (1, 2);
- lengte 3: twee mogelijkheden: eeo, eoo, horend bij de cycli $(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5})$, (−10, −5, −7);
- lengte 4: drie mogelijkheden: eeeo, eeoo, eooo, horend bij de cycli $(\frac{8}{13}, \frac{4}{13}, \frac{2}{13}, \frac{1}{13})$, $(\frac{20}{7}, \frac{10}{7}, \frac{5}{7}, \frac{11}{7})$, $(-\frac{38}{11}, -\frac{19}{11}, -\frac{23}{11}, -\frac{29}{11})$;
- lengte 5: zes mogelijkheden: eeeee, eeeoo, eeooe, eoeeo, eoooo, horend bij de cycli $(\frac{16}{29}, \frac{8}{29}, \frac{4}{29}, \frac{2}{29}, \frac{1}{29})$, $(\frac{40}{23}, \frac{20}{23}, \frac{10}{23}, \frac{5}{23}, \frac{19}{23})$, $(\frac{28}{23}, \frac{14}{23}, \frac{7}{23}, \frac{22}{23}, \frac{11}{23})$,

$$\left(\frac{76}{5}, \frac{38}{5}, \frac{19}{5}, \frac{31}{5}, \frac{49}{5}\right), \left(\frac{58}{5}, \frac{29}{5}, \frac{46}{5}, \frac{23}{5}, \frac{37}{5}\right), \left(-\frac{130}{49}, -\frac{65}{49}, -\frac{73}{49}, -\frac{85}{49}, -\frac{103}{49}\right),$$

enzovoorts. Merk op dat even/oneven-structuren waar al een repeterend patroon in zit, zoals *eo*eo, niet meegeteld worden. De bijbehorende vergelijking heeft namelijk exact dezelfde oplossing als die van de even/oneven-structuur *eo*, en dit komt dus gewoon neer op een cykel vaker dan één keer doorlopen.

De rationale $3n + 1$ -graaf heeft vermoedelijk geen divergente componenten. Een argument dat daar voor pleit zullen we in het volgende hoofdstuk zien. We hebben zojuist aangetoond dat er oneindig veel convergente componenten zijn, en we hebben een methode gezien om die allemaal systematisch te beschrijven. Zo'n convergente component bestaat uit een cykel, met op ieder punt van de cykel een volledige binaire boom. Ook als er een divergente component zou zijn, zou die een fraaie structuur hebben, namelijk een naar beide zijden onbegrensde volledige binaire boom, zie Figuur 6.

Deze rationale $3n + 1$ -graaf heeft dus op zich een heel fraaie structuur. Er is dan ook geen rationaal $3n + 1$ -cykelvermoeden, omdat we van de cycli alles al weten. Wat overblijft is alleen het rationale $3n + 1$ -convergentievermoeden, het makkelijkst te geven in grafentaal:

Het rationale $3n + 1$ -vermoeden. *De rationale $3n + 1$ -graaf heeft geen divergente componenten.*

De oorspronkelijke chaotische $3n + 1$ -graaf is een deelgraaf van deze fraai gestructureerde rationale $3n + 1$ -graaf. Hij zit in de component van de triviale cykel, maar hoe precies is volstrekt onduidelijk.

De amuzikale permutatie

Ten slotte noemen we een iets andersoortige functie, die soms de ‘inverse $3n + 1$ -functie’

genoemd wordt, maar ten onrechte, want het is niet de inverse van de $3n + 1$ -functie. John Conway [3] noemt het de *amuzikale permutatie*. Het is de volgende functie:

$$U(n) = \begin{cases} \frac{3n}{2} & \text{als } n \text{ even is,} \\ \frac{3n+1}{4} & \text{als } n \equiv 1 \pmod{4}, \\ \frac{3n-1}{4} & \text{als } n \equiv -1 \pmod{4}. \end{cases}$$

Het bijzondere van deze functie is dat het een zogeheten *permutatie* is, dat wil zeggen dat deze functie niets anders doet dan de natuurlijke getallen in een andere volgorde zetten. Anders gezegd: voor ieder natuurlijk getal m is er precies één natuurlijk getal n zodat $U(n) = m$. Nog anders gezegd: de functie U heeft een inverse U^{-1} , met $U(m) = n \iff m = U^{-1}(n)$. Die inverse functie wordt gegeven door

$$U^{-1}(n) = \begin{cases} \frac{2n}{3} & \text{als } n \equiv 0 \pmod{3}, \\ \frac{4n-1}{3} & \text{als } n \equiv 1 \pmod{3}, \\ \frac{4n+1}{3} & \text{als } n \equiv -1 \pmod{3}. \end{cases}$$

In termen van de bijbehorende graaf betekent dit dat ieder punt niet alleen precies één uitgaande pijl heeft, maar ook precies één inkomende pijl. Als een component dan een cykel bevat, dan bevat die component ook niets meer dan een cykel. En als een component divergent is, dan is het een naar beide zijden oneindig lang uitgestrekte lijn zonder zijtakken. Zie Figuur 7.

Er blijken vier cyclen te bestaan: (1), (2, 3), (4, 6, 9, 7, 5) en (44, 66, 99, 74, 111, 83, 62, 93, 70, 105, 79, 59). De component met 8 erin is vermoedelijk divergent. We kunnen het volgende vermoeden formuleren, weer alleen in grafentaal.

Het amuzikale vermoeden. *De amuzikale graaf heeft precies vier convergente componenten, en oneindig veel divergente componenten.*

Overigens heeft de inverse amuzikale functie U^{-1} oudere papieren dan de $3n + 1$ -functie: iteratie van U^{-1} komt al voor in aantekeningen van Collatz uit 1932. Lagarias [6] noemt de studie van de iteraties van U^{-1} het *originele Collatz-probleem*.

Argumenten

Experimenteel

Een voor de hand liggende manier om het $3n + 1$ -vermoeden te testen is bruut reken-

werk. Met name Tomás Oliveira e Silva [11] en Eric Roosendaal [13] hebben zich daar verdienstelijk voor gemaakt.

Stelling (Oliveira e Silva). *Het $3n + 1$ -vermoeden is waar voor alle $n < 5,764 \times 10^{18}$.*

Dit is een indrukwekkende prestatie. Natuurlijk passen de rekenaars slimmigheden toe om geen overbodig rekenwerk te doen, zoals de volgende:

- je kunt stoppen met de baan van n te berekenen zodra je een getal kleiner dan n bent tegengekomen;
- bepaalde klassen van getallen hoeft je niet te bekijken, zoals getallen van de vorm $128m + 15$, aangezien $T^7(128m + 15) = 81m + 10$, en dat is kleiner dan $128m + 15$; en vele andere.

Hoewel $n < 5,764 \times 10^{18}$ best een hoge grens is, bereik je met dit soort rekenwerk, hoe ver je ook zou kunnen komen, natuurlijk nooit meer dan 0 procent van het totale zoekgebied. Toch is het bijzonder nuttig werk, met ook meer implicaties dan alleen maar dat een eventuele tweede cykel of een divergente baan als kleinste getal een getal boven de $5,764 \times 10^{18}$ zou moeten hebben. Daar komen we in het volgende hoofdstuk op terug.

Probabilistisch

Stel we trekken een random getal n , dus met kans $\frac{1}{2}$ even en met kans $\frac{1}{2}$ oneven. Wat kunnen we nu zeggen over de kans dat $T(n)$ even

dan wel oneven is? Daarvoor moeten we kijken naar $n \pmod{4}$:

- als $n = 4m$ dan is $T(n) = 2m$ even;
- als $n = 4m + 1$ dan is $T(n) = 6m + 2$ even;
- als $n = 4m + 2$ dan is $T(n) = 2m + 1$ oneven;
- als $n = 4m + 3$ dan is $T(n) = 6m + 5$ oneven;

dus $T(n)$ is ook met kans $\frac{1}{2}$ even en met kans $\frac{1}{2}$ oneven. Het lijkt niet onredelijk te veronderstellen dat de kansen voor n en voor $T(n)$ onafhankelijk zijn.

Voor heel grote n gaan we nu de $+1$ in de $\frac{1}{2}(3n+1)$ verwaarlozen, en zien we dat $T(n) = \frac{1}{2}n$ met kans $\frac{1}{2}$, en $T(n) \approx \frac{3}{2}n$ ook met kans $\frac{1}{2}$. Voor de k -de iteratie verwachten we dan dat $\approx \frac{1}{2}k$ maal met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigd wordt, en $\approx \frac{3}{2}k$ maal met $\approx \frac{3}{2}$, zodat

$$T^k(n) \approx \left(\frac{1}{2}\right)^{k/2} \left(\frac{3}{2}\right)^{k/2} n = \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^k n.$$

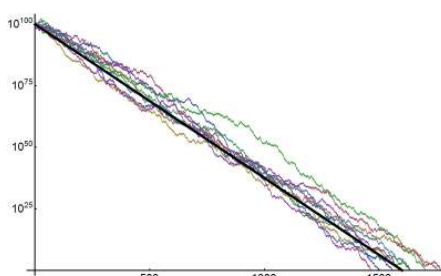
Merk op dat $\frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0,866 < 1$. Dit laat zien dat itereren van T gemiddeld genomen een exponentieel dalend gedrag zal vertonen, met *groefactor* $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. We kunnen nu makkelijk schatten na hoeveel iteratiestappen je verwacht bij 1 uit te komen: $(\frac{1}{2}\sqrt{3})^k n = 1 \iff k = \frac{1}{\log(2/\sqrt{3})} \log n \approx 6,95 \log n$. Figuur 8 laat zien dat dit experimenteel heel aardig klopt: daar zijn 10 willekeurige getallen in de buurt van 10^{100} genomen en de banen berekend en geplot; na ongeveer $6,95 \times \log 10^{100} \approx 1600$ stappen zijn alle banen inderdaad op 1 uitgekomen, en nog redelijk op de voorspelde manier ook. Deze figuur heeft op de verticale as een logaritmische schaal; de dikke rechte is de lijn met richtingscoëfficiënt $\log(\frac{1}{2}\sqrt{3})$ die begint bij 10^{100} .

Voor de $3n + q$ -functie werkt precies hetzelfde argument, wellicht niet voor n die klein zijn ten opzichte van q , maar verreweg de meeste n zijn natuurlijk groot vergeleken met q . Dit is een vrij sterk argument voor het rationale $3n + 1$ -vermoeden, dat zegt dat iedere $3n + q$ -baan in een cykel zal uitkomen.

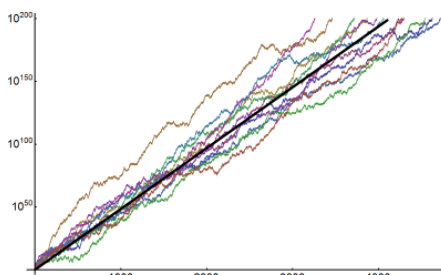
Er zijn verdergaande stochastische modellen toegepast op de $3n + 1$ -banen, die voorspellingen doen als:

- hoge banen: er bestaan, met kans vrijwel 1, banen die (beginnend bij n) als hoogste punt $\approx n^2$ bereiken na $\approx 7,645 \log n$ stappen; die banen zullen na nog eens $\approx 13,9 \log n$ stappen terugvallen tot 1;
- lange banen: er bestaan, met kans vrijwel 1, banen die (beginnend bij n) pas na $\approx 41,7 \log n$ stappen op 1 uitkomen.

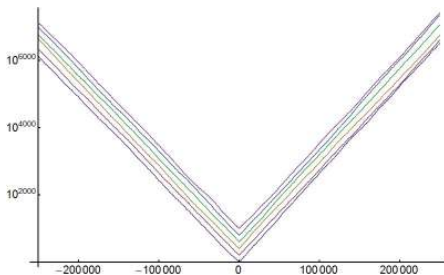
Ook deze modellen zijn experimenteel geverifieerd.



Figuur 8 Tien $3n+1$ -banen.



Figuur 9 Elf $5n+1$ -banen.



Figuur 10 Zes amuzikale banen.

We kunnen het eenvoudige probabilistische model dat we hierboven op de $3n + 1$ -functie hebben toegepast ook op de $5n + 1$ -functie loslaten. Het argument gaat dan net zo, maar levert dan $T_{5,1}^k(n) \approx (\frac{1}{2}\sqrt{5})^k n$ op. Opvallend is dat de groeifactor $\frac{1}{2}\sqrt{5} \approx 1,12$ nu boven de 1 uitkomt, en dat laat zien dat de banen voor de $5n + 1$ -functie gemiddeld genomen exponentieel snel zullen gaan stijgen. Zie Figuur 9, waar de banen van de getallen 7, 21, 25, 37, 41, 45, 55, 71, 81, 85 en 87 getekend zijn, met de rechte met richtingscoëfficiënt $\log(\frac{1}{2}\sqrt{5})$ die begint bij 1.

Voor de $pn+q$ -functie wordt deze groeifactor $\frac{1}{2}\sqrt{p}$, en die is voor oneven $p > 3$ altijd groter dan 1. De, gemiddeld dalende, $3n+q$ -functies zijn in de hele familie dus de uitzondering, niet de regel.

Dat deze groeifactor boven de 1 ligt is een sterk argument voor het vermoeden dat de banen van de $5n + 1$ -functie als regel divergent zijn, en slechts bij uitzondering in een cykel uitkomen. Dat het groeiedrag exponentieel is, is ook uit te werken tot een argument dat twee banen beginnend in willekeurige startpunten elkaar vrijwel nooit zullen snijden. Vandaar het vermoeden dat er oneindig veel divergente banen zijn. Dit neemt overigens niet weg dat van geen enkele $5n+1$ -baan (afgezien van de drie bekende convergente) bekend is of die divergent is.

Ook voor de amuzikale permutatie is dit eenvoudige stochastische model toepasbaar, zowel op de voorwaartse iteratie $n \rightarrow U(n) \rightarrow U^2(n) \rightarrow \dots$ als op de achterwaartse iteratie $n \rightarrow U^{-1}(n) \rightarrow U^{-2}(n) \rightarrow \dots$. Een opgave voor de lezer is om aan te tonen dat de groeifactor voor U dan uitkomt op $\frac{3}{4}\sqrt{2} \approx 1,061$, en die voor U^{-1} op $\frac{2}{3}\sqrt[3]{4} \approx 1,058$. Opvallend is dat beide factoren groter dan 1 zijn, en ook dat ze verschillend zijn. In Figuur 10 is van het getal 8 en van willekeurig gekozen getallen met 200, 400, 600, 800 en 1000 cijfers zowel de voorwaartse als de achterwaartse baan getekend. Kennelijk is het zo dat voor een willekeurig gekozen n de kans bijna 1 is dat hij helemaal onderin zijn eigen component zit. Een dergelijk plaatje staat ook in [3].

Complexiteitstheoretisch

In 1972 heeft John Conway [2] al laten zien dat er een generalisatie is van de $3n + 1$ -functie waarvan de iteratie een universele Turing-machine simuleert. Zie [3] voor een concreet voorbeeld. Voor zo'n functie is het beslisprobleem "bereikt een baan een willekeurige macht van 2" onbeslisbaar. In zijn recente artikel [3] zegt Conway:

"It is likely that some simple Collatzian problems (possibly even the $3n + 1$ problem itself) will remain forever unsetttable."

Dat mag dan misschien zo zijn, en het is zeker een sterke indicatie voor de moeilijkheid van dit soort problemen, maar het moet ons niet de moed ontnemen om toch te blijven proberen ze op te lossen. Ook van de Laatste Stelling van Fermat is wel eens geopperd dat dat misschien wel een onbeslisbaar probleem zou kunnen zijn, en dat is ook goed gekomen.

Diophantisch

Diophantische getaltheorie is de studie van problemen (zoals vergelijkingen en ongelijkheden) met oplossingen in uitsluitend gehele getallen. Een klassiek voorbeeld daarvan is de vraag hoe dicht bij elkaar machten van gehele getallen kunnen liggen, bijvoorbeeld hoe dicht een gehele macht van 2 en een gehele macht van 3 bij elkaar kunnen liggen.

Voor het $3n + 1$ -probleem is dit interessant, omdat, zoals we al hebben gezien, de T -functie als groeifactoren bij benadering $\frac{3}{2}$ dan wel $\frac{1}{2}$ heeft. Voor een cykel, waarin K maal een oneven getal zit dat tot een factor $\approx \frac{3}{2}$ leidt, en L maal een oneven getal met een factor $= \frac{1}{2}$, geldt kennelijk dat

$$x = T^{K+L}(x) \approx \frac{3^K}{2^{K+L}} x,$$

met andere woorden: $3^K \approx 2^{K+L}$.

Ray Steiner [16] was, in 1977, de eerste die dit idee gebruikte. Hij bekeek cyclen met de bijzondere eigenschap dat ze bestaan uit eerst K oneven getallen en dan L even getallen, en dan rond zijn. In zo'n geval is eenvoudig aan te tonen dat het eerste oneven getal x moet voldoen aan $x = a2^K - 1$ voor een oneven a , en dan blijkt $T^K(x) = a3^K - 1$. Dan volgt

$$T^{K+L}(x) = \frac{a3^K - 1}{2^L},$$

en dit moet weer gelijk zijn aan $x = a2^K - 1$ omdat de cykel rond is. Dit geeft een *Diophantische vergelijking*

$$a(2^{K+L} - 3^K) = 2^L - 1,$$

die we omwerken tot een *Diophantische ongelijkheid*

$$0 < \frac{2^{K+L}}{3^K} - 1 = \frac{2^L - 1}{a3^K} \\ = \frac{2^L - 1}{2^L(a2^K - 1) + 1} < \frac{1}{2^K}$$

(waarbij de laatste ongelijkheid met $a \geq 1$ en $L \leq K$ volgt). Inderdaad zien we een macht van 2 en een macht van 3 die dicht bij elkaar liggen. Als we de logaritme nemen dan krijgen we, vanwege $\log(1+x) < x$ voor $x > 0$, dat

$$0 < (K+L)\log 2 - K\log 3 < \frac{2^{K+L}}{3^K} - 1 < \frac{1}{2^K}.$$

De (nogal zware) theorie van Diophantische approximaties (beter: transcendentietheorie, op kwantitatieve poten gezet in de jaren zestig door Alan Baker) zegt dat dat voor grote K, L helemaal niet kan. Preciezer: Georges Rhin (1987) bewees een expliciete ondergrens, die in dit geval uitkomt op

$$|(K+L)\log 2 - K\log 3| > 0,00218K^{-13.3}.$$

Boven- en ondergrens vergelijken geeft nu $K \leq 96$. Vervolgens is het niet moeilijk meer om alle oplossingen te vinden, en er blijkt er maar één te zijn: $a = 1, K = 1, L = 1$.

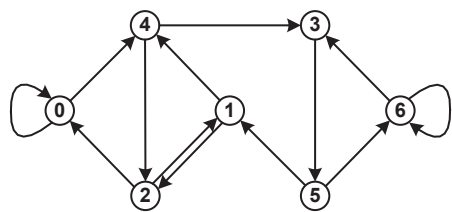
Stelling (Steiner). *Voor de $3n+1$ -functie is de triviale cykel de enige van het even/oneven-type $00 \dots 0ee \dots e$.*

Overigens moest Steiner werken met een veel slechtere ondergrens voor $|(K+L)\log 2 - K\log 3|$, die leidde tot $K < 10^{200}$. Ook onder zo'n bovengrens zijn alle oplossingen efficiënt te vinden.

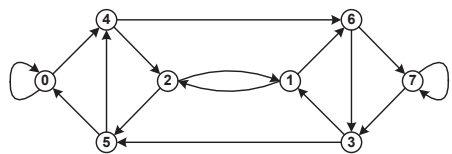
Vervolgens kunnen we kijken of een dergelijk resultaat te generaliseren is tot meerdere cyclotypes. Laten we een cykel een m -cykel noemen als er in totaal m overgangen van even naar oneven in zitten (en dus ook m van oneven naar even). Steiners resultaat gaat dus over 1-cykels.

John Simons (Groningen) bewees in 2004 met een soortgelijke redenering als Steiner (maar ingewikkelder afschattingen waren nodig) dat er geen 2-cykels bestaan. Simons en De Weger [14] breidden dit in 2005-2010 uit:

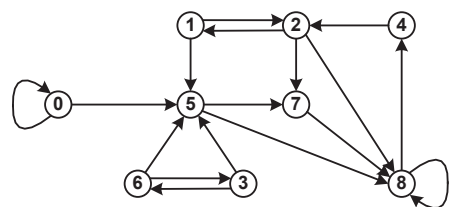
Stelling (Simons en De Weger). *Voor de $3n+1$ -functie is de triviale cykel de enige m -cykel met $m \leq 75$.*



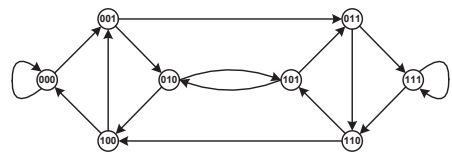
Figuur 11 De $3n+1$ -graaf mod 7.



Figuur 12 De $3n+1$ -graaf mod 8.



Figuur 13 De $3n+1$ -graaf mod 9.



Figuur 14 De binaire De Bruijn-graaf op 8 punten.

De afschattingen die hierbij gebruikt worden hangen af van de experimenteel bepaalde grens waarvoor het vermoeden bekend is, met andere woorden het resultaat van Oliveira e Silva. Dat betekent dat als deze rekenpartij essentieel verder gaat komen, er automatisch grotere m 's omvallen. Helaas is de benodigde rekenkracht bijzonder groot. We verwachten niet dat $m = 100$ deze eeuw nog gehaald kan worden.

Door een elementaire afschatting van Shalom Eliahou [4] te combineren met de grens van Oliveira e Silva, kan worden aangetoond dat een eventuele niet-triviale cykel erg lang moet zijn:

Stelling (Eliahou en Oliveira e Silva). *Voor de $3n + 1$ -functie heeft een niet-triviale cykel lengte $> 1,04 \times 10^{10}$.*

Deze resultaten over cyclen zijn hard. Geen vermoedens, maar keihard bewezen. Ze zeggen niets over het $3n + 1$ -convergentievermoeden, maar geven wel steun aan het $3n + 1$ -cykelvermoeden, in die zin dat het bestaan van een niet-triviale cykel betekent

dat er dan kennelijk een zeer uitzonderlijke Diophantische gebeurtenis plaats moet vinden.

Dergelijke Diophantische resultaten zijn ook op vergelijkbare manieren te vinden voor andere $pn + q$ -functies, maar telkens slechts voor één paar (p, q) tegelijk.

De Bruin-grafen

Een enigszins voor de hand liggend idee is om een modulus m te kiezen, en de $3n+1$ -functie alleen modulo m te bestuderen. Dit geeft dan eindige grafen om te bestuderen. De modulaire $3n + 1$ -graaf met modulus m bevat de punten $0, 1, 2, \dots, m - 1$, en alle mogelijke pijlen van $n \pmod m$ naar $T(n) \pmod m$. Zie Figuren 11, 12, 13 voor de $3n + 1$ -graaf modulo 7, 8 en 9.

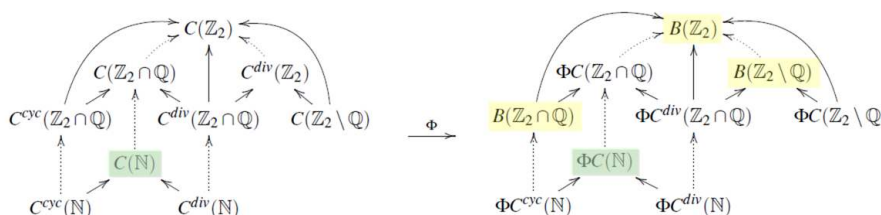
Dit soort grafen blijkt weinig structuur te hebben, behalve als de modulus een macht van 2 is. Als $m = 2^k$, dan is deze modulaire $3n + 1$ -graaf precies een zogeheten *binaire De Bruijn-graaf*. Deze observatie is gemaakt door Thijs Laarhoven in zijn TU/e-bachelorscriptie uit 2009. Deze De Bruijn-grafen zijn genoemd naar de bekende, onlangs op hoge leeftijd overleden, Eindhovense wiskundige professor N.G. (Dick) de Bruijn. Zij ontstaan door alle getallen modulo 2^k in binaire schrijfwijze (bits) $a_0a_1 \dots a_{k-1}$ uit te drukken, en dan pijlen te zetten van $a_0a_1 \dots a_{k-1}$ naar $a_1a_2 \dots a_{k-1}0$ en $a_1a_2 \dots a_{k-1}1$, dus alle bits schuiven een positie naar links op, de eerste bit verdwijnt, en op de vrijgevallen laatste plaats komen alle mogelijkheden voor. Dit proces heet ook wel de *shiftafbeelding*.

Als je bedenkt dat het $3n + 1$ -proces goed te beschrijven is vanuit de even/onevenstructuur van de baan van n , dan is goed in te zien dat deze modulaire $3n + 1$ -grafen inderdaad binaire De Bruijn-grafen zijn. Laten we eens kijken naartwee getallen n en n' die modulo 2^k identiek zijn, zeg $n' = n + b2^k$. In de modulaire $3n + 1$ -graaf modulo 2^k zitten die getallen dus op hetzelfde punt. Wat T precies gaat doen met n en n' wordt bepaald door of ze even of oneven zijn, maar daarin zijn ze

gelijk. Dus ofwel n en n' zijn beide even en dan is $T(n') = \frac{1}{2}n' = \frac{1}{2}n + b2^{k-1} \equiv T(n) \pmod{2^{k-1}}$, ofwel ze zijn beide oneven en dan is $T(n') = \frac{3}{2}n' + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}n + 3b2^{k-1} + \frac{1}{2} = T(n) + 3b2^{k-1} \equiv T(n) \pmod{2^{k-1}}$. Dit argument herhalen laat zien dat de even/onevenstructuur van de banen van n en n' inderdaad op de eerste k posities identiek zijn. Vanaf de $(k + 1)$ -ste positie hangt het af van het even/oneven zijn van b . Dit laat zien dat modulo 2^k de even/onevenstructuur van de baan van n precies overeenkomt met de shiftafbeelding, en dat de $3n + 1$ -graaf modulo 2^k dus precies de binaire De Bruijn-graaf is op 2^k punten.

Het aardige is nu dat voor de modulaire $pn + q$ -graf en precies hetzelfde argument opgaat. Met andere woorden, de $pn + q$ -graaf modulo 2^k is niets anders dan de binaire De Bruijn-graaf op 2^k punten, *onafhankelijk van p en q* . Alleen de afbeelding van de getallen in de modulaire $pn + q$ -graaf naar de overeenkomende rijtjes bits in de De Bruijn-graaf hangt af van p en q . Deze afbeelding Φ_k heet ook wel de *conjugatie-afbeelding*, en is gegeven door $\Phi_k(n) = a_0a_1 \dots a_{k-1}$, waar a_i telkens het laatste bit van $T^i(n)$ is.

Als we k nu groter en groter nemen, dan kunnen we de overgang naar $k = \infty$ ons voorstellen door de shiftafbeelding te definiëren voor oneindige rijtjes bits: $a_0a_1a_2 \dots$ wordt afgebeeld op $a_1a_2a_3 \dots$. Met andere woorden: het meest linkse bit verdwijnt, maar aan de rechterkant valt niets aan te vullen want daar staan oneindig veel bits die allemaal een plekje naar links opschuiven. Als we al dit soort rijtjes als punten in een enorm grote graaf zetten en de pijlen in de graaf volgens de shiftafbeelding nemen, dan krijgen we de *ultieme binaire De Bruijn-graaf*, die wel de *2-adische De Bruijn-graaf* genoemd wordt. Ieder punt heeft twee inkomende pijlen en één uitgaande pijl. De rationale $3n + 1$ -graaf zit er compleet in, en is vermoedelijk identiek met de deelgraaf uit de 2-adische De Bruijn-graaf die precies alle convergente componenten (die met cyclen) bevat. Ook de rationale $pn + 1$ -graf met $p > 3$ zitten erin, die



Figuur 15 De verschillende $pn+q$ -graf en ingebed in de 2-adische De Bruijn-graaf.

hebben naast alle convergente componenten ook vermoedelijk elk aftelbaar veel divergente componenten in zich. De 2-adische De Bruijn-graaf zelf heeft overaftelbaar veel divergente componenten, die er allemaal hetzelfde uitzien: een naar twee kanten oneindig ver uitgebreide volledige binaire boom (zie Figuur 6).

Kortom, het is een monsterachtig ding, maar wel goed begrepen, met bijzonder veel structuur. Alle interessante minder goed begrepen pn + q-grafen zitten er ergens in verstopt. Zie Figuur 15 voor een idee van deze grafenhiërarchie. Voor een verdere uitleg hiervan, zie [7]. De geel gemarkeerde grafen zijn goed begrepen. De groen gemarkeerde grafen zijn de eigenlijke pn+q-grafen die we zouden willen begrijpen. De conjugatieafbeeldingen vertellen hoe precies deze interessante grafen in het monster zitten. Alleen begrijpen we erg weinig van deze conjugatieafbeeldingen. Het is bekend dat ze nergens differentieerbaar zijn, maar dat helpt het begrip ook niet veel verder.

Als we op dezelfde modulaire manier naar de amuzikale graaf kijken, dan valt al snel op dat de interessante moduli hier niet machten van 2 zijn, maar machten van 3. Zie Figuur 16 voor de amuzikale graaf modulo 9. Er zijn nu ook De Bruijn-grafen in het spel, maar dat zijn geen binaire grafen meer, maar ternaire, omdat het gedrag van U (eigenlijk van U⁻¹) bepaald wordt door, verrassend genoeg, n (mod 3). Nu kijken we dus niet meer naar bits (binair) maar naar trits (ternair, een trit is een 0, 1 of 2). Het idee van de shiftafbeelding is hetzelfde, en die beschrijft nu de modulo-3^k-structuur van de baan van een getal onder de U-afbeelding. Zie Figuur 17 voor de ternaire De Bruijn-graaf op 9 punten.

Herformuleringen

Oneindige matrices

Bij een graaf hoort een vierkante verbindingsmatrix A = (a_{i,j}) (a_{i,j} is het element in de matrix in rij i en kolom j), met a_{i,j} = 1 als er een pijl van i naar j loopt in de graaf, en anders a_{i,j} = 0. De eigenwaarden en eigenvectoren van A worden vaak bestudeerd omdat die interessante informatie over de graaf bevatten.

De 3n + 1-graaf is oneindig groot. Er hoort dus ook een oneindig grote verbindingsmatrix bij, met a_{n,T(n)} = 1 voor n = 1, 2, 3, ..., en verder zijn alle getallen in de matrix 0. Deze matrix, die we uiteraard de 3n + 1-matrix noemen, heeft een heel fraaie structuur:

$$A = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}$$

De k-de macht van deze matrix beschrijft precies de paden van lengte k. Als we nu k laten groeien, dan zal, als het 3n + 1-vermoeden waar is, ieder pad in de cykel 1 ⇔ 2 uitkomen. Dat betekent dat voor k groot in A^k alleen de eerste twee kolommen nog wat overlijken te houden:

$$A^{2k+1} = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix}, \quad A^{2k+1} = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix}$$

We introduceren de kolomvectoren a₀ en a₁, bevattend een 1 precies op de plekken die na een even respectievelijk oneven aantal stappen op 1 uitkomen.

Het 3n+1-vermoeden, herformulering 2. Voor k → ∞ zullen de matrices A^{2k} en A^{2k+1} convergeren naar respectievelijk (a₀, a₁, 0, 0, ...) en (a₁, a₀, 0, 0, ...) (cykelvermoeden), waarbij a₀+a₁ = (1, 1, 1, ...) (convergentievermoeden).

Eigenruimtes

Merk op dat Aa₀ = a₁ en Aa₁ = a₀, dus A(a₀ + a₁) = a₀ + a₁ en A(a₀ - a₁) = -(a₀ - a₁), dus a₀ + a₁ is een eigenvector bij eigenwaarde 1, en a₀ - a₁ is een eigenvector bij eigenwaarde -1. Algemeen geldt: de cyclen van lengte k corresponderen elk precies met een k-tal eendimensionale eigenruimtes met k-de-machts eenheidswortels als eigenwaarden.

Bij iedere cykel hoort dus ook precies één eendimensionale eigenruimte bij eigenwaarde 1. Ook bij een divergente component hoort precies één eendimensionale eigenruimte,

namelijk met als voortbrengende eigenvector de vector met 1-tjes op de plekken van de componenten, en verder alleen nullen.

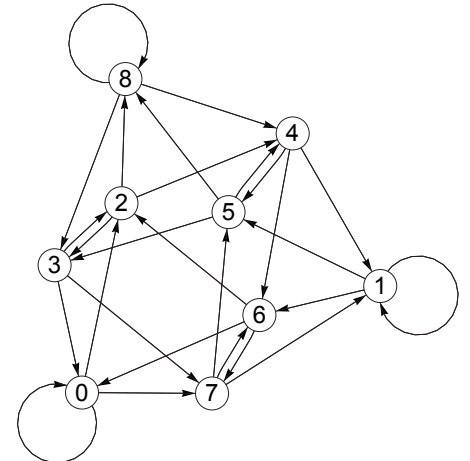
Op deze manier krijg je, volgens Engl [5], alle eigenvectoren bij eigenwaarde 1. Deze observatie kan als volgt geformuleerd worden:

Stelling (Engl). De 3n+1-matrix A heeft eigenwaarde 1, en de dimensie van de eigenruimte is gelijk aan het aantal componenten in de 3n + 1-graaf.

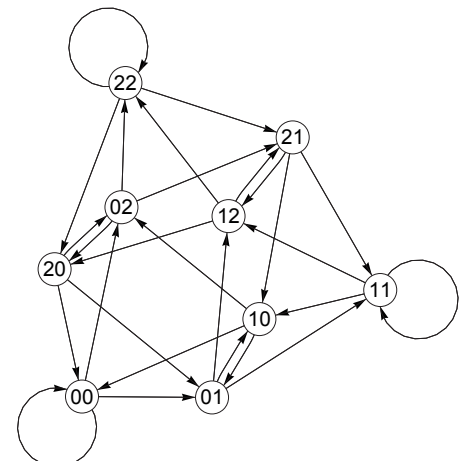
En dat geeft dan meteen een herformulering van het 3n + 1-vermoeden in termen van de dimensie van een eigenruimte:

Het 3n + 1-vermoeden, herformulering 3. De 3n + 1-matrix A heeft bij de eigenwaarde 1 een eendimensionale eigenruimte.

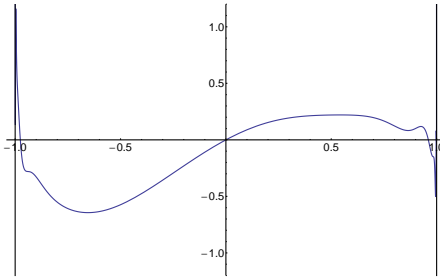
Dit is wel een heel bijzondere herformulering van het vermoeden. Helaas is de theorie van eigenwaarden en eigenruimtes van oneindige matrices niet ver genoeg ontwikkeld.



Figuur 16 De amuzikale graaf mod 9.



Figuur 17 De ternaire De Bruijn-graaf op 9 punten.



Figuur 18 Een interessante onbegrepen functie die vermoedelijk alle informatie over het $3n+1$ -vermoeden bevat.

De verschillende varianten van het $3n+1$ -vermoeden die we hierboven hebben gegeven laten ook direct zien dat die theorie met veel verschillende verschijnselen rekening zal moeten kunnen houden. Voor de $5n+1$ -matrix, die visueel sterk lijkt op de $3n+1$ -matrix, geldt dat de dimensie van de bij eigenwaarde 1 horende eigenruimte vermoedelijk al oneindig is.

Functionaalvergelijkingen

Berg en Meinardus [1] gaan nog een andere interessante kant op. We bekijken de machtreks

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} e_n z^n \\ &= e_0 + e_1 z + e_2 z^2 + e_3 z^3 + \dots, \end{aligned}$$

en we schrijven voor de coëfficiënten voor dat $e_n = e_{T(n)}$ voor alle n . De vraag is wat dat betekent voor de functie f . We definiëren

$$\begin{aligned} f_0(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} e_{3n} z^{3n} \\ &= e_0 + e_3 z^3 + e_6 z^6 + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} e_{3n+1} z^{3n+1} \\ &= e_1 z + e_4 z^4 + e_7 z^7 + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} e_{3n+2} z^{3n+2} \\ &= e_2 z^2 + e_5 z^5 + e_8 z^8 + \dots. \end{aligned}$$

Laat nu $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ (met $i^2 = -1$), zodat $\omega^3 = 1$ en $\omega^2 + \omega + 1 = 0$. Nu is

$$\begin{aligned} f(z) &= f_0(z) + f_1(z) + f_2(z), \\ f(\omega z) &= f_0(z) + \omega f_1(z) + \omega^2 f_2(z), \\ f(\omega^2 z) &= f_0(z) + \omega^2 f_1(z) + \omega f_2(z), \end{aligned}$$

Met een beetje rekenwerk kunnen we f_2 nu uitdrukken in f :

$$f_2(z) = \frac{1}{3} (f(z) + \omega f(\omega z) + \omega^2 f(\omega^2 z)).$$

Nu gaan we de eis die we aan f hebben opgelegd, en die met de $3n+1$ -functie te maken heeft, gebruiken:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} e_{2n} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} e_{2n+1} z^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e_{T(2n)} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} e_{T(2n+1)} z^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e_n z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} e_{3n+2} z^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e_n (z^2)^n + z^{-1/3} \sum_{n=0}^{\infty} e_{3n+2} (z^{2/3})^{3n+2} \\ &= f(z^2) + z^{-1/3} f_2(z^{2/3}). \end{aligned}$$

We hebben net gezien dat we f_2 kunnen terugvertalen naar f . Dat betekent dat we een functionaalvergelijking voor f hebben. Om gebroken machten van z te vermijden vervangen we z door z^3 . De vergelijking kunnen we dan zo opschrijven:

$$\begin{aligned} 3z (f(z^3) - f(z^6)) \\ = f(z^2) + \omega f(\omega z^2) + \omega^2 f(\omega^2 z^2). \end{aligned}$$

Deze functionaalvergelijking, die we de $3n+1$ -functionaalvergelijking noemen, is lineair. Er is direct een verband aan te geven met de $3n+1$ -graaf: bij een samenhangscomponent in die graaf hoort een functie f door $e_n = 1$ te nemen voor alle n in die component, en $e_n = 0$ voor alle n buiten die component. Twee oplossingen zijn:

$$f(z) = 1$$

(die hoort bij $n = 0$ die zijn eigen component is) en

$$f(z) = \frac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + \dots.$$

Deze tweede oplossing ontstaat door de functie f bij de complete $3n+1$ -graaf te nemen.

Het verband tussen componenten in de $3n+1$ -graaf en onafhankelijke oplossingen van deze functionaalvergelijking (in machtreksen) is een-op-een. Dit leidt meteen tot een herformulering van het $3n+1$ -vermoeden, namelijk dat er behalve de lineaire combinaties van 1 en $z/(1-z)$ geen an-

dere oplossingen zijn, althans niet in machtreksfuncties.

Het $3n+1$ -vermoeden, herformulering 4. De oplossingsruimte van de $3n+1$ -functionaalvergelijking voor machtreksfuncties f is tweedimensionaal.

Als we de eis $e_n = e_{T(n)}$ vervangen door $e_n = -e_{T(n)}$, dan kunnen we net zoals zojuist gedaan opnieuw een functionaalvergelijking opstellen. Die verschilt slechts in een minteken:

$$\begin{aligned} 3z (-f(z^3) - f(z^6)) \\ = f(z^2) + \omega f(\omega z^2) + \omega^2 f(\omega^2 z^2). \end{aligned}$$

Merk op dat nu geldt dat $e_n = e_{T^2(n)}$. Dit past precies op een component in de $3n+1$ -graaf met een cykel van lengte 2. Deze vergelijking heeft dan ook een andere interessante oplossing, met $e_n = 1$ als n in een even aantal stappen op 1 uitkomt, en $e_n = -1$ als n in een oneven aantal stappen op 1 uitkomt (en $e_n = 0$ als n nooit op 1 uitkomt). Deze oplossing heeft dus de machtreksvoorstelling

$$f(z) = z - z^2 - z^3 + z^4 + z^5 + z^6 - z^7 - \dots.$$

Een beter begrip van deze functie is zeer gewenst, want zal tot meer inzicht in het $3n+1$ -vermoeden leiden. De reeks convergeert alleen op $(-1, 1)$. In Figuur 18 ziet u een grafiek.

Ten slotte doen we hetzelfde voor de amuzikale permutatie. De functionaalvergelijking kan net zo als bij het $3n+1$ -geval worden afgeleid, en is:

$$\begin{aligned} 2z (2f(z^4) - f(z^6) - f(-z^6)) \\ = (z^2 + 1) (f(z^3) - f(-z^3)) \\ - i(z^2 - 1) (f(iz^3) - f(-iz^3)) \end{aligned}$$

(een opgave voor doorzetters).

Omdat de amuzikale functie een permutatie is, zijn de convergente samenhangscomponenten (de cyclen) in de amuzikale graaf eindig. Dat betekent dat deze amuzikale functionaalvergelijking oplossingen heeft in eindige machtreksen. Maar dat zijn gewoon polynomen.

Het is bijzonder dat zo'n functionaalvergelijking plotseling blijkt polynomen als oplossingen te hebben. Omdat we vier cyclen gevonden hadden, kunnen we zo een viertal polynomen opschrijven: $f(z) = z, f(z) = z^2 + z^3,$

$f(z) = z^4 + z^5 + z^6 + z^7 + z^9$ en, als klap op de vuurpijl:

$$f(z) = z^{44} + z^{59} + z^{62} + z^{66} + z^{70} + z^{74} + z^{79} + z^{83} + z^{93} + z^{99} + z^{105} + z^{111}.$$

Ga maar na. Het klopt echt.

Het vermoeden is dat er niet meer polynomiale oplossingen zijn dan alle mogelijke lineaire combinaties van deze vier en $f(z) = 1$. Wel zijn er andere (vermoedelijk oneindig veel onafhankelijke, vermoedelijk oneindige) machtreeksoplossingen, waarvan de eerste is

$$f(z) = z^8 + z^{10} + z^{11} + z^{12} + z^{13} + z^{15} + z^{17} + z^{18} + z^{20} + \dots$$

Conclusie

Wat zijn we opgeschoten met het begrijpen van het $3n + 1$ -vermoeden?

We hebben een aantal argumenten ervoor gezien: experimentele (flink zoeken met een grote batterij computers), probabilistische (de iteraties lijken zich volgens de wetten van de statistiek te gedragen, en die zeggen dat het vermoeden op z 'n minst niet onwaarschijnlijk is), en deelresultaten (bepaalde typen cykels bestaan niet, als er niet-triviale cykels bestaan dan zijn er getallen met onwaarschijnlijke eigenschappen).

Aan de andere kant hebben we geprobeerd te zien hoe de $3n + 1$ -graaf ingebed ligt in een veel grotere, wel goed begrepen graaf, maar daar liepen we in vast. We hebben gezien dat

het probleem zit in een klasse van problemen waar ook onbeslisbare problemen inzitten. En we hebben interessante herformuleringen gezien in de taal van matrixproducten, van dimensies van eigenruimtes, en van dimensies van oplossingsruimten van functionaalvergelijkingen, maar meer dan herformuleringen zijn dat nog niet geworden.

Het lijkt er niet op dat het bewijs van het vermoeden (of een tegenbewijs) veel dichterbij is gekomen. Maar het is op z 'n minst interessant te noemen dat het vermoeden vertakkingen blijkt te hebben in heel verschillende deelgebieden van de wiskunde. Je weet maar nooit of er op een van die gebieden ineens een doorbraak komt. We houden dus goede hoop. \leftarrow

Referenties

- Lothar Berg en Günter Meinardus, Functional equations connected with the Collatz problem, *Results in Mathematics* 25 (1994), 1–12.
- John H. Conway, Unpredictable iterations, *Proceedings of the Number Theory Conference*, University of Colorado, Boulder, CO, 1972, pp. 49–52. In [8].
- John H. Conway, On unsheddable arithmetical problems, *American Mathematical Monthly* 120 (2013), 192–198.
- Shalom Eliahou, The $3x + 1$ problem: new lower bounds on nontrivial cycle lengths, *Discrete Mathematics* 118 (1993), 45–56.
- H.W. Engl, An analytic representation for self-maps of a countably infinite set and its cycles, *Aequationes Math.* 25 (1982), 90–96.
- Jeffrey C. Lagarias, The $3x+1$ problem and its generalizations, *American Mathematical Monthly* 92 (1985), 3–23. In [8].
- Thijs Laarhoven en Benne de Weger, The Collatz conjecture and De Bruijn graphs, *Indagationes Mathematicae* 24 (2013), 971–983.
- Jeffrey C. Lagarias (ed.), *The Ultimate Challenge: The $3x+1$ Problem*, American Mathematical Society, 2010.
- Jeffrey C. Lagarias, *The $3x+1$ Problem: An Annotated Bibliography (1963–1999) (sorted by author)*, arXiv:math/0309224 [math.NT], 2011.
- Jeffrey C. Lagarias, *The $3x+1$ Problem: An Annotated Bibliography, II (2000–2009)*, arXiv:math/0608208 [math.NT], 2012.
- Tomás Oliveira e Silva, Empirical verification of the $3x + 1$ and related conjectures, in [8], pp. 189–207.
- Gerhard Opfer, An analytic approach to the Collatz $3n + 1$ problem, *Hamburger Beiträge zur Angewandten Mathematik*, Preprint 2011-09, May 2011.
- Eric Rosendaal, On the $3x + 1$ problem, <http://www.eric.nl/wondrous>.
- John Simons and Benne de Weger, Theoretical and computational bounds for m -cycles of the $3n + 1$ -problem, *Acta Arithmetica* (2005), 51–70. Updated version 1.44 (2010): [http://deweger.xs4all.nl/papers/\[35a\]SidW-3n+1-v1.44\[2010\].pdf](http://deweger.xs4all.nl/papers/[35a]SidW-3n+1-v1.44[2010].pdf).
- Ionica Smeets, Gënante problemen, in: *Wiskunde: de uitdaging*, Syllabus Vakantiecursus 2010, CWI, Amsterdam, 2010, pp. 75–82.
- Ray P. Steiner, A theorem on the Syracuse Problem, *Proc. 7th Manitoba Conference on Numerical Mathematics 1977*, Winnipeg 1978, pp. 553–559.
- Benne de Weger, Comments on Opfer's alleged proof of the $3n + 1$ conjecture, <http://www.win.tue.nl/~bdeweger/downloads/opfer-comments%20ovo.2.pdf>.