Jan van Neerven
Delft Institute of Applied Mathematics
TU Delft
j.m.a.m.vanneerven@tudelft.nl

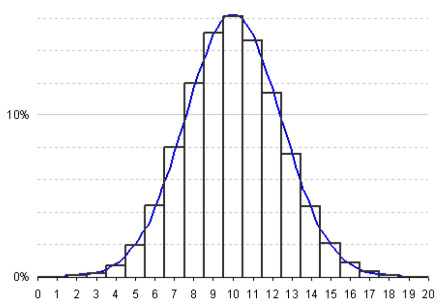
De oplossing

De KPZ-vergelijking

In 1986 formuleerden de fysici M. Kardar, G. Parisi en Y.-C. Zhang het vermoeden dat de oplossing van een zekere stochastische differentiaalvergelijking een nieuwe universaliteitsklasse beschrijft voor een groot aantal processen in de statistische fysica. Vorig jaar zorgde Martin Hairer van de University of Warwick voor een doorbraak met een directe oplossingstechniek voor deze zogenaamde KPZ-vergelijking. Jan van Neerven beschrijft het probleem en de zoektocht naar de oplossing.

De som van onafhankelijke en gelijkverdeelde kansvariabelen convergeert naar de standaard normale verdeling mits men corrigeert voor de verwachtingswaarde en de variantie. Deze wet staat bekend als de *centrale limietstelling* en gaat terug op twee grondleggers van de kansrekening, Abraham de Moivre (1667–1754) en Pierre-Simon Laplace (1749–1827). In Figuur 1 ziet men de verdeling van de som van 25 trekkingen van onafhankelijke Bernoulli-verdeelde variabelen X_n met

$$P(X_n = 1) = \frac{2}{5} \quad \text{en} \quad P(X_n = 0) = \frac{3}{5}.$$



Figuur 1 Cumulatieve verdeling van 25 Bernoulli trekkingen met $p{=}2/5$.

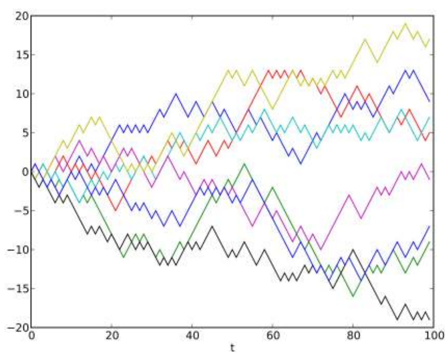
Met behulp van elementaire kansrekening zien we gemakkelijk dat de verwachtingswaarde van de som gelijk is aan $25 \times \frac{2}{5} = 10$ en de variantie aan $25 \times (\frac{3}{5} \times \frac{2}{5}) = 6$. De centrale limietstelling zegt in dit geval dat $\frac{1}{\sqrt{6}}(S_{25} - 10)$ bij benadering standaard normaal verdeeld is. De laatstgenoemde verdeling is *universeel*: zij treedt op als limietverdeling van de som $S_N = \sum_{n=1}^N X_n$ voor $N \to \infty$, mits die genormaliseerd is volgens $E(S_N) = 0$ (verwachtingswaarde 0) en $E(S_N^2) = 1$ (variantie 1); de precieze verdeling van de X_n is daarbij irrelevant.

In plaats van het limietgedrag van de som $\sum_{n=1}^N X_n$ kunnen we ook het gedrag van het gehele proces volgen. We spreken dan van een *random walk*. Ook random walks voldoen aan een soort centrale limietstelling: ze convergeren in verdeling naar een standaard Brownse beweging. Hier moet men wederom corrigeren voor de drift (de 'verwachtingswaarde als functie van de tijd') en de variantie op de juiste wijze schalen. In Figuur 2 is een aantal paden van een random walk weergegeven. Van een afstand bezien lijken deze inderdaad op paden van een Brownse beweging.

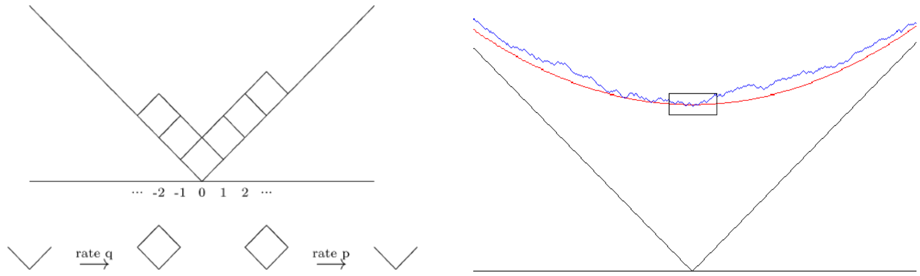
In de afgelopen 25 jaar is er een belangrijke nieuwe universaliteitsklasse opgedoken. In een veelgeciteerd artikel uit 1986 speculeren de fysici Kardar, Parisi en Zhang [7] dat de fluctuaties van een groot aantal processen die optreden in de statistische fysica zich in de limiet gedragen als de oplossingen van een zekere stochastische partiële differentiaalvergelijking, die sedertdien naar hen vernoemd is, de zogenaamde *KPZ-vergelijking*:

$$\partial_t u = \frac{1}{2}\Delta u - \frac{1}{2}(\partial_x u)^2 + \dot{W}. \tag{1}$$

Hier is $u = u(t, x)$ de onbekende, ∂_t en ∂_x de partiële afgeleiden naar tijd en plaats, Δ de tweede afgeleide, en $\dot{W}$ witte ruis in plaats en tijd (zie ook de bijdrage van Sonja Cox die in het juninummer van dit blad verschijnt). We zullen niet pogen een precieze definitie te



Figuur 2 Enkele typische paden van een random walk.



Figuur 3 Het corner growth model (figuur ontleend aan Corwin [3]).

geven van witte ruis, maar volstaan met de opmerking dat het Gaussisch verdeelde ruis is die 'ongecorreleerd' is in t en x. In fysica-notatie:

$$E(\dot{W}(s,x)\dot{W}(t,y)) = \delta(t-s)\delta(x-y),$$

met δ de Dirac-deltafunctie.

Een voorbeeld van een discreet kansmodel waarvan vermoed werd dat de fluctuaties zich asymptotisch gedragen volgens de verdeling van de oplossingen van de KPZ-vergelijking is het zogenaamde *corner growth model* waarbij in een hoekvormige schaal volgens een Poisson-proces vierkantjes in locale minima met voorgeschreven kansen verschijnen of verdwijnen, zie Figuur 3.

De fluctuaties in dit model schalen voor grote waarden van de tijd t evenredig met $t^{1/3}$. Dit is een kwalitatief ander gedrag dan bijvoorbeeld dat van de Brownse beweging, waar we schaling volgens $t^{1/2}$ zien. De $t^{1/3}$-schaling treedt op in allerlei ogenschijnlijk ongerelateerde contexten: random matrices, last passage percolatie, groeimodellen, random betegelingen (de zogenaamde *Aztec diamond*, zie Figuur 4) en random permutaties. Een aantal fraaie simulaties is te zien op Patrik Ferrari's website wt.iam.uni-bonn.de/ferrari/research/#animations.

De universaliteitsklasse die aan dit gedrag ten grondslag ligt wordt sedertdien de *KPZ-klasse* genoemd. Het eerste wiskundige bewijs van een stelling die een precies verband geeft tussen het corner growth model en de KPZ-vergelijking werd in 1997 door Bertini en Giacomin gegeven. Zij maakten gebruik van een verband met het zogenaamde asymmetrische exclusieproces, een systeem van deeltjes die asymmetrisch hoppen over het eendimensionale rooster en nooit op dezelfde plaats mogen zitten. Baik, Deift en Johansson [2, 6] bewezen rond 2000 de convergentie van de fluctuaties van enkele discrete modellen, waaronder het corner growth model, naar de zogenaamde Tracy–Widom-verdeling. Deze verdeling was al eerder opgedoken in de theorie van random matrices, waar zij de fluctuaties van de grootste eigenwaarde van random hermitische $(N\times N)$-matrices in de limiet $N\to\infty$ beschrijft in een zekere schalingslimiet. Het probleem om de precieze verdeling van de oplossingen van KPZ te beschrijven bleek bijzonder lastig. Verbazingwekkend genoeg werden in 2009 de precieze statistieken ontrafeld, in onafhankelijk werk van Amir, Corwin en Quastel [1] en Sasamoto en Spohn [8]. Ze bewezen hiermee dat $u(t)\approx t^{1/3}$ voor $t\to\infty$, en dat de fluctuaties eveneens naar de Tracy–Widom-verdeling convergeren. Een zeer lezenswaardig relaas van deze ontdekkingen is te vinden in het boeiende overzichtsartikel van Corwin [3].

Dit brengt ons bij de vraag hoe de KPZ-vergelijking kan worden opgelost. Het grote probleem vormt de kwadratische term $(\partial_x u)^2$, waardoor de vergelijking slecht gesteld is. Het probleem komt er op neer dat door het toedoen van de ruis de afgeleide $\partial_x u$ enkel in de zin van distributies kan bestaan. Er is echter geen natuurlijke manier om distributies te kwadrateren. Dit probleem werd door Bertini en Giacomin op handige wijze als volgt omzeild. Laten we eerst eens kijken naar een andere vergelijking, de zogenaamde stochastiche warmtevergelijking

$$\partial_t z = \frac{1}{2}\Delta z - z\dot{W}.$$

Men kan bewijzen dat voor positieve beginwaarden de oplossing met kans 1 positief blijft, en dientengevolge is

$$u = -\log z$$

welgedefinieerd. Met behulp van de Itô-formule (de stochastische versie van de hoofdstelling van de integraalrekening) blijkt dan dat deze u althans formeel voldoet aan de vergelijking

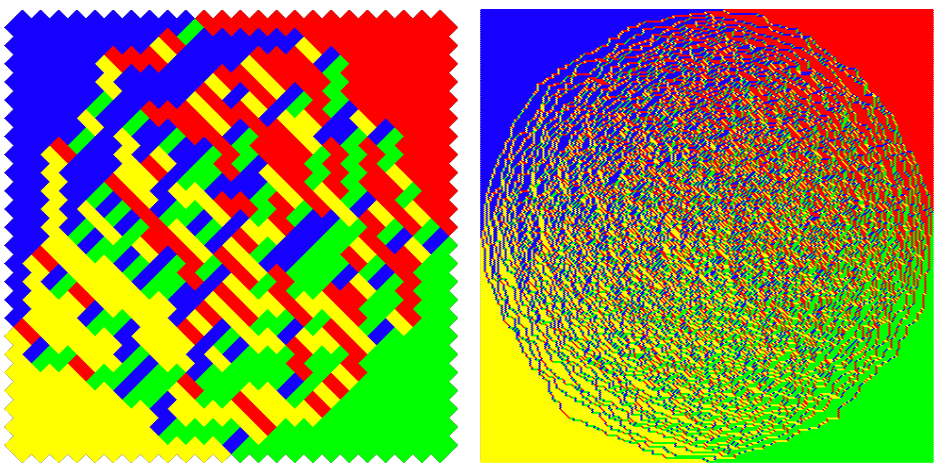
$$\partial_t u = \frac{1}{2}\Delta u - \frac{1}{2}(\partial_x u)^2 + \text{“}\infty\text{”} + \dot{W}. \qquad (2)$$

Dit is precies de KPZ-vergelijking (1), afgezien van de term '+∞' die als volgt opduikt. Als men de ruis in de stochastische warmtevergelijking regulariseert (iets 'gladder' maakt) met behulp van een kleine parameter $\varepsilon>0$ en de bijbehorende oplossing met z_ε aangeeft, dan voldoet $u_\varepsilon = -\log z_\varepsilon$ aan de vergelijking

$$\partial_t u_\varepsilon = \frac{1}{2}\Delta u_\varepsilon - \frac{1}{2}(\partial_x u_\varepsilon)^2 + C_\varepsilon + \dot{W}_\varepsilon.$$

Hierbij is C_ε een (grote) constante. Nu kan men bewijzen dat z_ε terugconvergeert naar z als we ε steeds kleiner maken, en omdat $C_\varepsilon\to\infty$, pikken we in de limiet de bovenstaande vergelijking (2) op. De 'oneindig grote constante' kan geïntepreteerd worden als een renormalisatie.

De zojuist beschreven substitutie, die bekend staat als de Hopf–Cole-transformatie en ook bij andere vergelijkingen wordt gebruikt,



Illustratie: wt.iam.uni-bonn.de/ferrari/research/#animations

Figuur 4 De Aztec diamond.


Martin Hairer

heeft echter een duidelijk nadeel: het is verre van duidelijk hoe hiermee de convergentie van discrete modellen naar de oplossingen van de KPZ-vergelijking beschreven kan worden.

Een zeer recente doorbraak van Martin Hairer levert precies wat tot dusverre ontbrak: een directe oplossingstechniek voor de KPZ-vergelijking met goede approximatie-eigenschappen. Geïnsprireerd door technieken van de zogenaamde *rough path*-theorie heeft Hairer een algemene en flexibele theorie ontwikkeld die gebaseerd is op een nieuw soort stochastische Taylor-expansie, waarbij niet alleen polynomen gebruikt worden, maar ook stochastische termen die specifiek voor het probleem op maat zijn gesneden. Hairers theorie, die onlangs gepubliceerd is in *Annals of Mathematics* [4], werkt echter slechts in dimensie één. In een omvangrijke preprint die onlangs op ArXiv is geplaatst heeft Hairer zijn technieken gegeneraliseerd naar hogere dimensies. Dit heeft hem in staat gesteld ook een aantal andere lang openstaande problemen op te lossen, zoals het goedgesteldheidsprobleem voor het zogenaamde dynamische euclidische Φ^4_3-model [5] uit de kwantumveldentheorie.

Referenties

1 G. Amir, I. Corwin en J. Quastel, Probability distribution of the free energy of the continuum directed random polymer in $1+1$ dimensions, *Comm. Pure Appl. Math.* 64(4) (2011), 466–537.

2 J. Baik, P. Deift en K. Johansson, On the distribution of the length of the longest increasing subsequence of random permutations, *J. Amer. Math. Soc.* 12(4) (1999), 1119–1178.

3 I. Corwin, The Kardar-Parisi-Zhang equation and universality class, *Random Matrices Theory Appl.* 1(1) (2012), 1130001, 76 pp.

4 M. Hairer, Solving the KPZ equation, *Ann. of Math. (2)* 178(2) (2013), 559–664.

5 M. Hairer, A theory of regularity structures, arXiv preprint arXiv:1303.5113, 2013.

6 K. Johansson, Shape fluctuations and random matrices, *Comm. Math. Phys.* 209(2) (2000), 437–476.

7 M. Kardar, G. Parisi en Y.-C. Zhang, Dynamic scaling of growing interfaces, *Physical Review Letters* 56(9) (1986), 889.

8 T. Sasamoto en H. Spohn, Exact height distributions for the KPZ equation with narrow wedge initial condition, *Nuclear Phys. B* 834(3) (2010), 523–542.