

Marco Swaen

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Universiteit van Amsterdam
m.d.g.swaen@uva.nl

Boekbespreking Dirk van Dalen: Intuitionistische Analyse

Het vinden van ε -dekpunten

Dirk van Dalen, emeritus hoogleraar logica en wijsbegeerte van de wiskunde aan de Universiteit Utrecht, geeft in zijn boek een snelle rondleiding door de intuitionistische wiskunde, waarbij hij voor een aantal concrete gevallen een constructieve behandeling geeft. Marco Swaen bespreekt het boek en gaat nader in op de dekpuntstelling van Brouwer.

Dat je geen topoloog of grondslagenspecialist hoeft te zijn om wel eens gehoord te hebben van L.E.J. Brouwer, is in belangrijke mate te danken aan Dirk van Dalen, die de afgelopen decennia met een reeks publicaties en heruitgaven de belangstelling voor deze markante Nederlandse wiskundige heeft gevoed. Spil in die reeks is de biografie *Mystic, Geometer, and Intuitionist*, die ons op meeslepende manier een inkijk geeft in het leven en de denkwereld van Brouwer [2]. Met *Intuitionistische Analyse* uit 2011 biedt Van Dalen het wiskundig enigszins geschoolde publiek toegang tot Brouwers reconstructie van de analyse naar intuitionistisch inzicht. Het boek, verschenen in de Epsilonreeks, bedient de geïnteresseerde lezer voor wie het servet van een wetenschapsbijlage inmiddels te klein is, maar het tafellaken van de stevige handboeken op dit gebied nog te groot. Bij het tafellaken moeten we dan in de eerste plaats denken aan het tweedelige *Constructivism* van Anne Troelstra, waarvan Van Dalen de co-auteur is [4].

Intuitionistische wiskunde

Is Brouwers verdienste in de topologie onomstreden, over het belang van zijn werk op het gebied van de grondslagen zijn de meningen nog steeds verdeeld. Brouwer formuleerde een standpunt over het wezen van de wiskunde waar men in de filosofie moeilijk omheen kan. Maar zijn intuitionisme

behelsde meer dan filosofie, het was een oproep de wiskunde van onbetrouwbare principes te zuiveren en op een nieuwe leest te schoeien, en die oproep heeft maar weinig weerklank gevonden. Weliswaar hebben enkelen zijn intuitionistische hervormingsprogramma opgepakt, zodat men inmiddels in de vakliteratuur kan nagaan hoe bijvoorbeeld intuitionistische topologie of groepentheorie eruit ziet, maar de meeste activiteit rond intuitionistische wiskunde is sinds de jaren zestig metamathematisch van aard, waarbij fragmenten van de intuitionistische wiskunde middels deductiesystemen en modellen ingebed worden in klassiek wiskundige systemen.

Een intuitionistisch leerboek

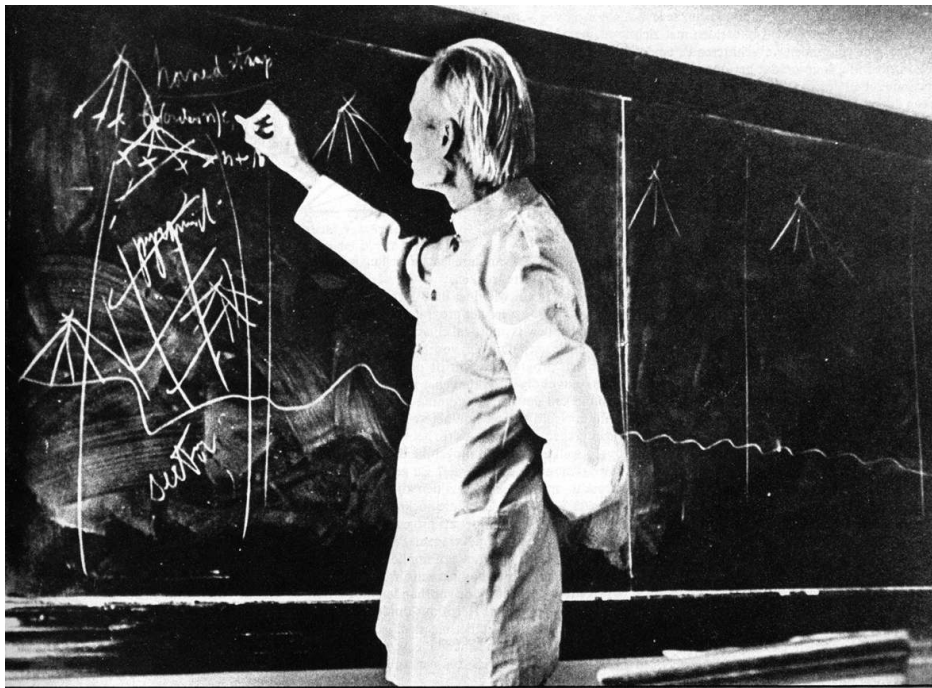
Voor Brouwer is wiskunde mentale activiteit van het individu, van het *creatieve subject*. De wiskundige objecten bestaan alleen als gedachtenconstructies in de individuele denkwereld, ontspruitend aan ingeboren oerintuïties. Taal en logica zijn slechts hulpmiddelen om die gedachten te ordenen en over te brengen op anderen. De verwoording van wiskundige inzichten mag nooit de plaats innemen van die inzichten zelf.

In deze filosofie blijft het collectieve karakter van wiskundige kennis onderbelicht. Het creatieve subject staat ver van de wiskundige in levenden lijve die zich als beginner noties met vallen en opstaan eigen maakt, die vergissingen begaat en vaak pas in

contact met anderen tot dieper inzicht komt. Concurrerende filosofieën als het platonisme en het formalisme weten met dit aspect beter raad. Het platonisme dicht wiskundige noties een objectief bestaan toe buiten het denkende individu, waarmee het verklaarbaar wordt dat de ene persoon een bepaalde notie beter begrijpt dan de andere. Het formalisme op zijn beurt biedt de wiskundige een gemeenschappelijk afgesproken systeem dat wiskundige waarheid controleerbaar maakt. intuitionistische wiskunde is krachtens haar eigen filosofie geen objectieve leerstof, maar meer een kunstuiting die ons tot herscheping inspireert, zonder dat we ooit zullen weten of wij daarbij de kunstenaar helemaal hebben begrepen. Dit aspect herken ik in de foto op de kaft van Van Dalens boek. Die foto plaatst ons als toeschouwers in de collegezaal waar Brouwer ongenaakbaar als in een *performance* met krijt zijn mentale constructies schetst.

Diplomatiek heeft Van Dalen de oorspronkelijke foto ingekaderd en het boek de ondertitel 'Een constructief denkraam' meegegeven, als wil hij Brouwers subjectieve kunstuiting behapbaar maken en in een objectiever — constructief — kader plaatsen. De lezer van *Intuitionistische Analyse* zit dan ook niet op harde klapstoeltjes te luisteren naar prediking van Brouwers waarheid. Eerder is het boek een rondrit in een touringcar langs de intuitionistische monumenten, terwijl gids Dirk Van Dalen aanwijst en enthousiast toelicht.

De rondleiding begint bij de intuitionistische opbouw van $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$, die slechts weinig afwijkt van de klassieke. In hoofdstuk 2 wordt het intuitionistisch redeneren verkend



De oorspronkelijke foto van Brouwer die gebruikt is op het omslag van het boek van Van Dalen

om in hoofdstuk 3 de analyse te beginnen met de invoering van de reële getallen. Hoofdstuk 4 vormt dan de kern met Brouwerse tegenvoorbeelden tegen bekende klassieke stellingen als de middelwaardstelling, en hun intuïtionistisch wel houdbare versies. Het boek besluit met een boeiend hoofdstuk 'Voorts' waar dieper op de logica wordt ingegaan en constructieve axioma's behandeld worden zoals die gebruikt dan wel afgewezen worden in de elkaar beconcurrerende scholen van het constructivisme.

De wiskundige inhoud is versneden met toelichtingen en wetenswaardigheden van algemeen wiskundige, filosofische, historische en biografische aard, zodat je, ook als je over de technische details heen leest, het idee krijgt al aardig mee te kunnen praten over het intuïtionistische hervormingsprogramma. Om het technische handwerk echt in de vingers te krijgen, lijkt het boek mij minder geschikt; ik heb ook niet de indruk dat het daarvoor bedoeld is. Sowieso bevat het weinig opgaven, en hoewel Van Dalen veel vertelt om de definities en stellingen heen, laat hij soms na de brug van de intuïtieve concepten naar de formele definities en stellingen te slaan, en houdt het erop dat 'de wiskundigen het nu eenmaal zo doen'. Zo verschijnt bijvoorbeeld na een heel algemeen verhaal over de interpretatie van de logische voegwoorden en kwantoren (de zogenaamde Brouwer–Heyting–Kolmogorov-interpretatie) en het creatieve subject, pardoes de formele definitie van Kripke-modellen,

waarmee de lezer dan de intuïtionistische geldigheid van redeneerprincipes moet kunnen toetsen. Op dat moment echter heeft de lezer nog geen besef van hoe dat redeneren feitelijk verloopt, laat staan dat de lezer kan begrijpen waarom het instrument van de Kripke-modellen werkt.

Ik wil het boek zeker niet ontraden, integendeel, het is zeer lezenswaardig en bevat veel interessant materiaal, ook al is dat nog niet overal aaneengesmeed tot een strak geheel en is menig zet- of spelfoutje blijven staan.

Intuïtionistische analyse

Na deze algemene opmerkingen wil ik op de behandeling van één stelling nader ingaan, namelijk de dekpuntstelling ($n = 2$), in paragraaf 4.5. Enerzijds is aan de hand van deze stelling mooi te demonstreren hoe intuïtionistische analyse afwijkt van de klassieke, anderzijds geeft Van Dalen juist bij deze stelling een ander bewijs dan Brouwer, en is het de moeite waard deze twee bewijzen te

vergelijken met betrekking tot hun constructieve karakter.

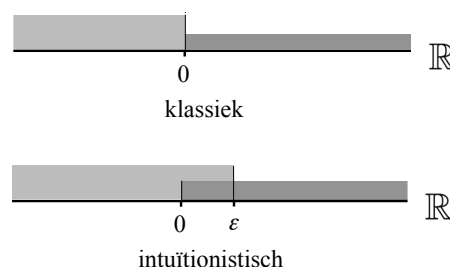
Om in de juiste sfeer te komen voor het bedrijven van intuïtionistisch analyse stelle de lezer zich voor dat wij reële getallen en hun functies slechts met een beperkte scherpheid kunnen oproepen. Die scherpheid is variabel, naar believen kunnen wij inzoomen, maar punten worden nooit Euclides' omvangsloze stippen, zij blijven een zekere dikte hebben. Zo kunnen we niet van elk reëel getal x uitmaken of $x > 0$ dan wel $x \leq 0$. De intuïtionist spreekt in dit verband van de *onsplitsbaarheid* van het continuüm. Daarentegen kunnen we wel voor elke gewenste marge $\varepsilon > 0$ altijd uitmaken door voldoende in te zoomen of $x > 0 \vee x < \varepsilon$. Concreet voor het vervolg betekent dit dat we de reële rechte of het vlak niet scherp kunnen verdelen in disjuncte delen, maar moeten leven met plakstrookjes, die een naar believen kleine, maar positieve marge ε smal zijn. Voor elk punt of getal is dan een deel te noemen waar het zeker in ligt, maar niet altijd te zeggen of het ook nog in het andere deel ligt. Zie Figuur 1.

De dekpuntstelling

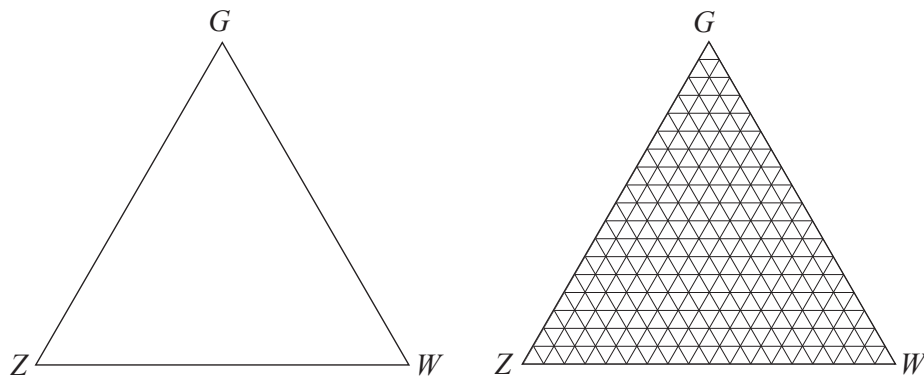
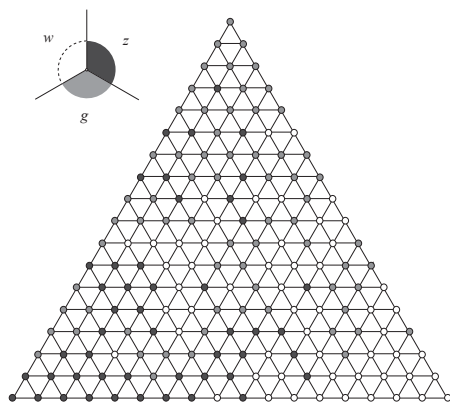
De klassieke dekpuntstelling (dimensie n) zegt dat elke continue afbeelding die een compact, convex deel $D \subset \mathbb{R}^n$ op zichzelf afbeeldt daarbij altijd minstens één punt op zijn plaats zal laten. Een dergelijk punt x met $f(x) = x$ heet dan een dekpunt van f . Brouwer zelf bewees deze stelling klassiek en liet later zien dat deze stelling intuïtionistisch niet houdbaar is. intuïtionistisch heeft een dergelijke afbeelding echter wel 'bijna-dekpunten', dat wil zeggen: voor willekeurig kleine marges $\varepsilon > 0$ zijn er punten die bij toepassing van f minder dan ε van hun plaats gaan. In zijn publicatie [1] met de prachtige titel 'Door klassieke theorema's gesignaleerde pinkeren die onvindbaar zijn', geeft Brouwer een bewijs voor het bestaan van ε -dekpunten op grond van windingsgetallen.

Via Sperner, klassiek

Van Dalen behandelt Brouwers bewijs niet, maar komt met een eigen bewijs (voor $n = 2$) op basis van het lemma van Sperner, waarmee zoals bekend de klassieke dekpuntstelling zich aanzienlijk gemakkelijker laat bewijzen dan met Brouwers afbeeldingsgroepen. Dit bewijs publiceerde Van Dalen in [3]. Om de bewijzen met elkaar te vergelijken voer ik een gemeenschappelijke terminologie in. Kies als domein D een gelijkzijdige driehoek, en zij f een continue afbeelding van deze driehoek op zichzelf. De hoekpunten van



Figuur 1 Splitsing versus plakrandjes

Figuur 2 Netwerk over de driehoek WGZ 

Figuur 3 Netwerk met aangebrachte kleuring

de driehoek noemen wij W , G en Z , verwijzend naar de kleuring (wit, grijs, zwart) die wij verderop zullen aanbrengen. Ons doel is te bewijzen dat f een ε -dekpunt bezit, oftewel dat er een x in WGZ moet zijn met $|f(x) - x| < \varepsilon$. Krachtens Brouwers waaierstelling is f uniform continu zodat wij bij de gegeven ε een afstand δ kunnen vinden zodat als $|x - y| < \delta$, hun beelden $f(x)$ en $f(y)$ minder dan een handig gekozen fractie van ε uit elkaar moeten liggen. Leg nu over WGZ een driehoekig netwerk van strooipunten x_i met δ als lengte van de zijden van de driehoekige mazen (in het vervolg ‘de kleine driehoekjes’ geheten). Zie Figuur 2 en 3. Bekijk dan in welke richting bij toepassing

van f deze strooipunten (inclusief W, Z, G) bewegen. Aan de hand van die verplaatsingen zullen wij dan in staat zijn een ε -dekpunt te traceren. Laten wij eerst klassiek te werk gaan. Wij redeneren dan vanuit het ongerijmde. Stel dat er geen ε -dekpunt is, dan hoort er bij elke x_i een verplaatsingsvector $f(x_i) - x_i$ ongelijk $\vec{0}$, waarvan beoordeeld kan worden in welke richting deze wijst. Daarbij onderscheiden wij de drie sectoren: wit (w), grijs (g) en zwart (z), zoals in het linker diagram in Figuur 4.

Aldus brengen wij een kleuring k aan op de strooipunten van het netwerk. Deze kleuring is een zogenaamde Sperner-labeling, in de zin dat:

1. $k(Z) = z$, $k(G) = g$ en $k(W) = w$;
2. ligt x_i op zijde AB van driehoek WGZ , dan $k(x_i) = A$ of $k(x_i) = B$, met $A, B \in \{W, G, Z\}$.

Sperners lemma zegt dan dat hoe je de strooipunten binnen WGZ ook kleurt, er altijd een driehoekje zal zijn dat ‘volledig gekleurd’ is, dat wil zeggen waarvan de drie hoekpunten allen verschillend van kleur zijn. Die drie hoekpunten gaan dus ieder een andere kant op, terwijl hun beelden maar een fractie van ε uit elkaar kunnen liggen. Dat kan alleen als minstens één van hen minder dan ε van zijn plaats gaat, oftewel een ε -dekpunt is. Daarmee is dan klassiek de ε -versie van de dekpuntstelling bewezen.

Via Sperner, intuïtionistisch

Nu werken wij het bewijs om naar het intuïtionistische bewijs van Van Dalen. In plaats van een plaatsvector gebruikt Van Dalen barycentrische coördinaten, maar dat maakt geen wezenlijk verschil. In verband met de onsplitsbaarheid van het reële vlak moet hij de drie sectoren overlappend kiezen (zie het middelste diagram in Figuur 4). Merk op dat de nulvector nu in alle drie de sectoren ligt. Door de overlap is de keuze van de kleur niet meer eenduidig. Van Dalen laat zien dat wij de kleur van strooipunten op de buitenomtrek wel zo kunnen kiezen dat er toch een Sperner-labeling ontstaat. Het lemma van Sperner is combinatorisch van aard en daarom ook intuïtionistisch correct, zodat wij een driehoekje kunnen vinden waarvan minstens een van de hoekpunten een ε -dekpunt is. Klaar.

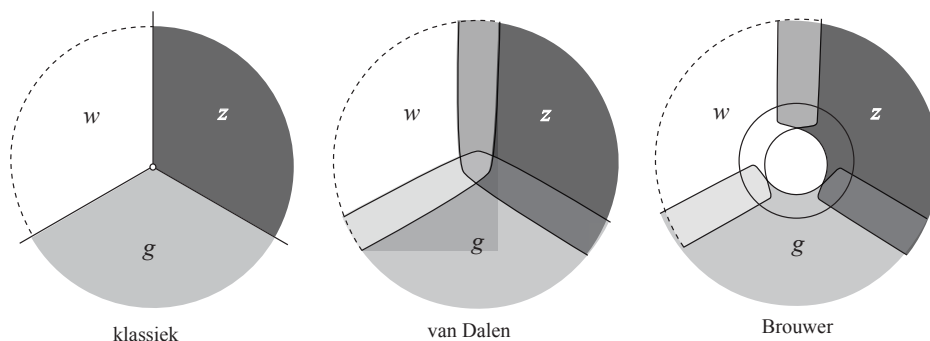
Merk op dat ten opzichte van het klassieke bewijs Van Dalen niet begint met de ongerijmde aanname dat er geen ε -dekpunt zou zijn. Van Dalens bewijs is intuïtionistisch gevoerd en zou dus ‘constructief’ moeten zijn in de zin dat het aangeeft hoe je het ε -dekpunt vindt. Het bewijs vertelt daarover: breng een voldoende-fijnmazig netwerk aan, bereken de kleuren van alle strooipunten, zoek dan een volledig gekleurd driehoekje op (dat er volgens Sperner moet zijn). Minstens één van de hoekpunten van dat driehoekje is dan een ε -dekpunt. Maar in deze gevolgde weg zit een procedurele kronkel. Het hoekpunt van het volledig gekleurde driehoekje is namelijk een strooipunt, en omdat dit strooipunt als ε -dekpunt maar weinig van zijn plaats gaat, zullen wij tevoren al flink hebben moeten rekenen voor wij het een juiste kleur konden toekennen. Zo ver dat wij het toen al hadden moeten herkennen als een ε -dekpunt.

Daarmee geeft Van Dalens bewijs weliswaar aan hoe wij een ε -dekpunt kunnen vinden, maar vertelt ons niet hoe dat proces feitelijk zal verlopen. In zijn inleiding (p. 6) zegt Van Dalen: “De constructieve wiskunde beschouwt het als haar taak om die belofde getallen, punten lijnen, matrices, ... echt uit te rekenen.” Maar zijn bewijs van de ε -dekpuntstelling stopt als de redenering rond is, en geeft geen rekenschap van het onderliggende constructieproces.

Laten wij nu de blik richten naar Brouwers oorspronkelijke bewijs.

Via windingsgetallen

Brouwers bewijs oogt heel anders. Dat het domein bij hem vierkant is, en onderverdeeld wordt in vierkantjes is niet wezenlijk. Brouwer gebruikt de verplaatsingsvectoren



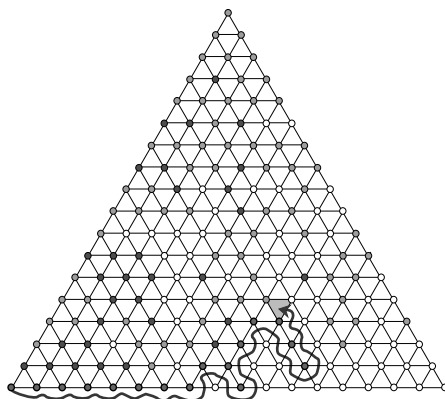
Figuur 4 Sectoren klassiek (links), sectoren Van Dalen (midden) en sectoren Brouwer (rechts)

$f(x_i) - x_i$ niet om een Sperner-labeling te maken, maar om de windingsgetallen uit te rekenen van enerzijds een wandeling over de buitenomtrek WGZ en anderzijds over alle kleine driehoekjes van het netwerk afzonderlijk. Onder het windingsgetal van een wandeling verstaan wij het aantal draaien dat de verplaatsingsvector maakt tijdens die wandeling. De windingsgetallen zijn gemakkelijk te berekenen aan de hand van de richting van de verplaatsingsvectoren in de strooipunten op die wandeling, omdat die zo dicht bij elkaar liggen dat de verplaatsingsvector nooit tussen twee strooipunten in een hele draaiing kan maken, tenzij deze zo kort is dat we een ε -dekpunt passeren. Vertaald naar bovenstaande terminologie gebruikt Brouwer voor de richting van die verplaatsingsvector feitelijk vier gebieden: w , g , z en o . Zie het rechter diagram in Figuur 4. Wederom is er overlap noodzakelijk in verband met de onplitsbaarheid van het continuüm. Brouwer onderscheidt dan twee gevallen:

1. er is een strooipunt dat minder dan ε beweegt;
2. alle strooipunten gaan meer dan $\frac{1}{2}\varepsilon$ van hun plaats.

Die gevalsonderscheiding is voor een intuitionist verdacht, misschien dat Van Dalen hem daarom in zijn bewijs vermeden heeft. Maar hij is wel degelijk geoorloofd, immers voor een reëel getal x kunnen wij beoordelen of $x < \varepsilon \vee x > \frac{1}{2}\varepsilon$. En omdat wij maar eindig veel strooipunten hebben kunnen wij die beoordeling ook voor alle strooipunten doen.

Uiteraard behoeft geval 1 geen verdere behandeling, het ε -dekpunt is dan reeds gevonden. In geval 2 komt geen enkele verplaatsingsvector in gebied o , en geven de kleuren w , g , z van de strooipunten genoeg informatie om de windingsgetallen correct te berekenen. Bij de wandeling over de buitenomtrek WGZ verschijnen dan afwisselend w , g en z terwijl daartussen wat haperingen van de soort $-aba-$ voorkomen, die je kunt gladstrijken tot $-a-$. Het windingsgetal van de omtrek is dus 1. De wandelingen over de kleine driehoekjes passeren steeds maar drie strooipunten. Hebben twee van die hoekpunten dezelfde kleur dan is het blijkbaar niet gelukt een hele winding te maken en is het windingsgetal dus 0. Zijn de drie hoekpunten verschillend van kleur dan is het windingsgetal 1 of -1 . In plaats van het lemma van Sperner gebruikt Brouwer dan het net zo combinatorische argument dat de som van de windingsgetallen over de samenstellende driehoekjes gelijk moet zijn aan het windingsgetal van buitenomtrek WGZ .



Figuur 5 Route naar het bijna-dekpunt

Derhalve moet minstens één van de kleine driehoekjes windingsgetal 1 hebben en is er dus een driehoekje waarvan alle hoekpunten verschillend van kleur zijn. Zodat minstens een van deze hoekpunten toch slechts $\frac{1}{2}\varepsilon$ van zijn plaats gaat. De behandeling van dit geval 2 verschilt dus eigenlijk maar weinig van wat Van Dalen doet met de Sperner-kleuringen. Het wezenlijke verschil is dat Brouwer eerst geval 1 noemt, en na afhandeling van geval 2 concludeert dat 1 de enige mogelijkheid is. Zo is in zijn bewijs meer terug te zien van hoe je het ε -dekpunt vindt, namelijk door van elk strooipunt te bekijken of de verplaatsingsvector kleiner is dan ε .

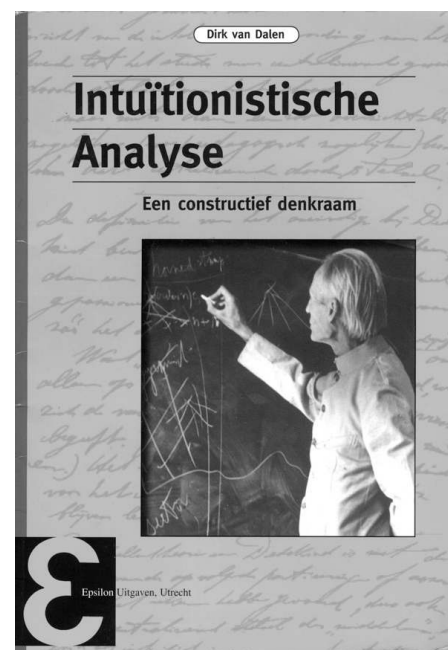
Over beide bewijzen wil ik nog opmerken dat zij weliswaar een constructie geven om een ε -dekpunt te vinden, maar zeker geen handige constructie. Om het ε -dekpunt doelmatig uit de strooipunten te vissen zou je natuurlijk kunnen navigeren aan de hand van de verplaatsingsvectoren. Bijvoorbeeld (zie Figuur 5), begin in Z en wandel over ZW tot je een zijde met de kleuren zw tegenkomt. Steek vanuit dat driehoekje steeds via een zw -kant over naar een aangrenzend driehoekje. Op het moment dat dat niet meer kan, ben je in een zwg -driehoekje aangeland. Op die manier benut je de reeds berekende kleuren. Met de windingsgetallen is het mogelijk het hele gebied steeds te delen en aan de hand van het windingsgetal van de twee delen te besluiten in welk deel je dan verder gaat zoeken. Het is toch opmerkelijk dat hoewel constructivisten vanuit hun filosofie erop gericht zijn hun objecten 'te maken', er in hun bewijzen soms heel weinig aandacht is voor effectieve constructies.

Van Dalen heeft ons taalgebied verrijkt met een interessant boek aan de hand waarvan een breder publiek zich bezig kan houden met de vraag hoe wiskunde eruit komt te zien als objecten niet uit tegenspraken geboren worden maar 'echt' gemaakt moeten

worden. De genoemde onvolkomenheden daargelaten biedt het boek de lezer de gelegenheid de mogelijke keuzes en hun consequenties te verkennen.

Referenties

- 1 L.E.J. Brouwer, Door klassieke theorema's ge-signaleerde pinkernen die onvindbaar zijn, *KNAW Proc. Ser. A* 55 (1952), 443–445.
- 2 D. van Dalen, *Mystic, Geometer and Intuitionist* (2 delen), Clarendon Press, Oxford, 1999.
- 3 D. van Dalen, How to constructivize Brouwer's fixed point theorem, E. Rajan et al., *International Conference on Systemics, Cybernetics and Informatics*, Hyderabad, 2009, pp. 654–656.
- 4 A.S. Troelstra en D. van Dalen, *Constructivism in Mathematics* (2 delen), North-Holland, Amsterdam, 1988.



Dirk van Dalen, *Intuitionistische Analyse*, Epsilon Uitgaven, Amsterdam, 2011, 152 p., ISBN 9789050411240, prijs € 21,00.