

Thomas de Jong

Faculteit Wiskunde & Informatica, Technische Universiteit Eindhoven

Afdeling Wiskunde, Vrije Universiteit Amsterdam

t.g.d.jong@tue.nl

Onderzoek

KAM-theorie en de stabiliteit van het zonnestelsel

Het stabiliteitsprobleem in de hemelmechanica van het zonnestelsel stelt de vraag of de planeten hun huidige regelmatige banen om de zon zullen voortzetten in de verre toekomst. Op een kleine storing na beschrijven de huidige planeetbanen Keplerse ellipsen. Deze storing zou ten gevolge van de interacties tussen de planeten kunnen groeien. Op de lange duur zou deze zelfs zo groot kunnen worden dat ze op onregelmatige wijze gaan bewegen. Hierdoor zouden planeten het zonnestelsel kunnen verlaten of onderling kunnen botsen. Bestaat er een onderliggende wiskundige theorie die de stabiliteit kan garanderen? Thomas de Jong beschouwt een sterk versimpeld model van het zonnestelsel en laat schetsmatig zien dat door toepassing van de theorie van Kolmogorov, Arnold en Moser (KAM-theorie) er condities gegeven kunnen worden voor de stabiliteit van de planeetbanen. Vervolgens bekijkt hij of ons zonnestelsel aan deze voorwaarden voldoet.

De formulering van het stabiliteitsprobleem gaat al terug naar de tijd van Newton. Sindsdien hebben vele grote wiskundigen, zoals Laplace, Lagrange en Poincaré, hun bijdrage geleverd. In de jaren zestig van de vorige eeuw begon Arnold met toepassing van de Kolmogorov–Arnold–Moser-theorie op een sterk versimpeld model van het zonnestelsel beschreven door de gravitatiewet van Newton [1]. Bewijzen voor uitbreidingen van dit model kwamen daarna van Robutel, Herman en Féjoz [8, 11, 16, 24], een ontwikkeling die in 2004 leidde tot de Arnold–Robutel–Herman–Féjoz-stelling. Dit artikel ligt in het verlengde en zal het bewijs van de Arnold–Robutel–Herman–Féjoz-stelling voor een algemeen wiskundig publiek weergeven.

Een model voor het zonnestelsel

De eerste redelijke benadering van planeetbanen werd gedaan door Kepler aan het begin van de zeventiende eeuw. Door een kromme te interpoleren door de empirische data van de Marsbaan concludeerde Kepler dat banen ellipsen zijn met de zon in een van de brandpunten. De Keplerse theorie, die kan worden

samengevat in een drietal wetten, geeft ook de bewegingen langs de ellipsen. Dit leidde tot meer accurate omlooptijden van de planeten om de zon. Toepassingen in die tijd waren bijvoorbeeld de verificatie van de Gregoriaanse schrikkeljaarconventie en de bepaling van de datum voor Pasen, welke berust op de stand van de aarde en de maan. Deze toepassingen formuleren al aspecten van het stabiliteitsprobleem als ze op grote tijdschalen worden bekeken. In de zeventiende eeuw formuleerde Newton de universele gravitatiewet, waarmee de bewegingsvergelijkingen voor het zonnestelsel konden worden opgesteld. Het hiermee verkregen mechanische model geeft een betere benadering dan die van Kepler aangezien de effecten van zwaartekracht worden meegenomen.

Voor de eenvoud beschouwen wij in dit artikel een zonnestelsel met twee planeten waarin de krachten tussen de hemellichamen worden gegeven door de universele gravitatiewet. Dit model bevat veel van de essentiële moeilijkheden. De planeten 1 en 2 hebben posities x_1 en x_2 in $\mathbb{R}^3$ met bijbehorende snelheden en versnellingen $\dot{x}_j$ en $\ddot{x}_j$ en

massa's m_j . Voor de zon wordt analoog het subscript 0 gebruikt en we nemen aan dat net zoals in ons zonnestelsel m_0 veel groter is dan die van de planeten. De bewegingsvergelijking voor planeet 1 wordt dan gegeven door

$$m_1 \ddot{x}_1 = G \frac{m_1 m_0}{|x_0 - x_1|^3} (x_0 - x_1) + G \frac{m_1 m_2}{|x_2 - x_1|^3} (x_2 - x_1). \quad (1)$$

Hierin is G de gravitatieconstante. Merk op dat vergelijking (1) een interactie expliciet maakt tussen planeet 1 en de twee andere hemellichamen, waar die met de zon met zijn grote massa m_0 in geval van ons zonnestelsel veruit dominant is. Dit leidt tot een klassiek storingsprobleem, want dit drielichamenprobleem is een benadering van de situatie waarbij de interactie tussen de beide planeten onderling is 'uitgeschakeld'. Zoals bekend leidt dit tot de vertrouwde Keplerse ellipsbewegingen, die worden verstoord zodra de planetaire interactie weer wordt 'ingeschakeld'. Omdat de sterkte hiervan relatief klein is, kan het effect op de beweging van het oorspronkelijke drielichamenprobleem goed in wiskundige termen worden beschreven. Grofweg krijgt het geheel hierdoor de structuur

$$\text{Gravitatie interactie zon met planeet} + \varepsilon \times \text{interactie met de andere planeten} \quad (2)$$

waarbij ε een kleine reële parameter is.

In het zonnestelsel zijn de benaderende Keplerse planeetbanen bijna cirkels die vrijwel in één vlak liggen. Dit leidt tot een verdere vereenvoudiging van het ongestoorde pro-

bleem zoals dat optreedt voor $\varepsilon = 0$, namelijk dat de planeten bijna uniforme cirkelbewegingen uitvoeren die in één vlak liggen. Men spreekt hier van bijna circulaire, co-planaire banen.

Het probleem van de kleine delers

Het meest fundamentele en historisch oudste dilemma over de stabiliteit van dit Newtoniaanse model is het probleem van de kleine delers. Wij onderbreken de bestudering van het model om de benodigde achtergrond te geven. In de eenvoudigste opzet kunnen wij een storingsprobleem van de vorm

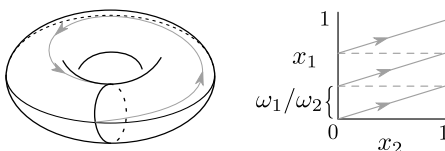
$$\dot{x} = \omega + \varepsilon f(x), \quad x \in \mathbb{T}^n := (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n \quad (3)$$

beschouwen, waarin x op een n -torus ligt waarop de oplossingen met frequenties ω_i in de frequentievector $\omega := (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ worden gestoord door $\varepsilon f(x)$ met ε weer een kleine reële parameter. Voor $\varepsilon = 0$ krijgen we het ongestoorde probleem met alleen 'lineaire' oplossingen op de n -torus gegeven door $t \mapsto x_0 + t\omega \pmod{\mathbb{Z}^n}$ met x_0 in $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, zie Figuur 1. Deze 'lineaire' oplossingen delen we op in twee klassen op basis van de frequentievector: resonant en quasi-periodiek. De frequentievector ω is resonant als er gehele getallen $k_1, k_2, \dots, k_n$ bestaan, die niet allemaal nul zijn, zodanig dat

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \dots + k_n\omega_n = 0 \quad (4)$$

en ω is quasi-periodiek als ω niet resonant is. Dit onderscheid wordt gemaakt vanwege de eigenschap dat voor een quasi-periodieke frequentievector elke 'lineaire' oplossing dicht in de n -torus $\mathbb{T}^n$ ligt; dit terwijl in het resonante geval elke oplossing periodiek is met dezelfde periode [2], zie Figuur 1.

Uit een wiskundige analyse [3, 5] van de oplossingen van (3) blijkt dat er storingsreeksen



Figuur 1 Beschouw het tweedimensionale geval, $n = 2$, met frequentievector $\omega = (\omega_1, \omega_2)$. Als de 2-torus wordt ontvouwen zoals in de rechter figuur dan zijn de oplossingen van het ongestoorde systeem 'lineair' met helling ω_1/ω_2 . Als ω resonant is, dan is ω_1/ω_2 een rationaal getal, en dan zijn de oplossingen periodiek. Als ω quasi-periodiek is, dan is ω_1/ω_2 een irrationeel getal, en dan liggen de oplossingen dicht op de torus.

van de vorm

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \frac{c_k}{k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \dots + k_n\omega_n} \cdot e^{2\pi i \langle k, x \rangle}, \quad x \in \mathbb{T}^n, \quad (5)$$

in (3) optreden. Indien deze convergeren, bestaat er een diffeomorfisme ϕ zodanig dat we in (3) de lineaire oplossingen terugkrijgen:

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{\omega} \quad \text{met} \quad \tilde{x} = \phi \circ x. \quad (6)$$

Voor generieke f zijn in (5) alle coëfficiënten c_k typisch ongelijk aan nul. Dat betekent dat voor formele existentie van deze reeks voor elke $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ moet gelden dat $\langle \omega, k \rangle \neq 0$. Maar de vraag is of convergentie van (5) gegarandeerd is voor quasi-periodieke frequentievectoren. Voor specifieke quasi-periodieke frequentievectoren zou de deler van de termen in (5) arbitrair dicht bij nul kunnen komen, wat zou kunnen leiden tot divergentie van de som: het probleem van de kleine delers. Dit probleem gaat al terug naar het werk van Dirichlet en Weierstraß [18] maar het was Poincaré die de moeilijkheden voor het eerst vastlegde in [23].

In 1950–1960 werd de theorie ontwikkeld voor het omgaan met kleine delers. Deze theorie heet Kolmogorov–Arnold–Moser-theorie (KAM-theorie) en is vernoemd naar de drie belangrijkste bijdragers. Informeel gesproken, zegt KAM-theorie dat ω in (3) ver genoeg verwijderd moet zijn van resonante frequentievectoren. Merk op dat dit slim gedaan moet worden aangezien de resonante frequentievectoren dicht liggen in $\mathbb{R}^n$. Door de afstand tot de resonante frequentievectoren af te laten hangen van de mate van resonantie, verkrijgen wij de gewenste ω : de Diophantische frequentievectoren gegeven door

$$|\langle \omega, k \rangle| > \gamma |k|^{-\tau} \quad \text{voor alle } k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}, \text{ met } \tau, \gamma > 0. \quad (7)$$

De (τ, γ) zijn parameters van het probleem waarbij τ typisch vastligt op basis van de dimensie van de tori terwijl in het algemeen $\gamma = o(\varepsilon)$ als $\varepsilon \downarrow 0$, op een geschikte manier gespecificeerd [9]. Uit overwegingen als in [21] volgt dat de Diophantische frequentievectoren (7) voor $\tau > n - 1$ en $\gamma > 0$ een nergens dichte verzameling van positieve Lebesgue maat vormen. De informele KAM-stelling luidt dan dat in (3) het volgende geldt:

KAM-stelling. Voor voldoende kleine ε bestaat er een positieve maat van Diophantische frequentievectoren waarvoor de lineaire quasi-periodieke dynamica persisteert op de n -torus. Sterker nog, in de limiet $\varepsilon \downarrow 0$ gaan deze frequentievectoren naar volle maat.

Wij beëindigen hiermee onze discussie over KAM-theorie. Voor meer achtergrond zie [3–6, 9].

Toepassing KAM-theorie

Terugkerend naar ons drielichamenprobleem wordt in het algemeen de stabiliteit van het zonnestelsel opgevat als de existentie van een positieve Lebesgue-maat van oplossingen met quasi-periodiek gedrag. Dat zou betekenen dat, op een geschikte coördinatentransformatie na, in het drielichamenprobleem 'lokaal' een situatie als (3) ontstaat waarop KAM-theorie kan worden toegepast. De hiermee verkregen KAM-toepassing, de Arnold–Robutel–Herman–Féjoz-stelling (ARHF-stelling) voor twee planeten, ziet er als volgt uit [1, 8, 11, 24]:

ARHF-stelling. Voor voldoende kleine $\varepsilon > 0$ geldt dat in een voldoende kleine omgeving van de gestoorde circulaire, co-planaire Keplerse ellipsen, er oplossingen bestaan die invariante 5-tori bedekken die de faseruimte met volle maat vullen. Deze 5-tori reduceren tot 4-tori bedekt met quasi-periodieke oplossingen als de rotatie-invariantie van oplossingen om het totale impulsmoment van het zonnestelsel eruit wordt gedeeld. In de limiet $\varepsilon \downarrow 0$ convergeren de 5-tori naar 2-tori die samen volle maat hebben.

Waar de 5-, 4- en 2-tori vandaan komen zal later duidelijk worden. Voordat KAM-theorie kan worden toegepast, moeten we in de buurt van de circulaire, co-planaire Keplerse ellipsen via coördinatentransformaties een vergelijking als (3) ontwikkelen.

De bewegingsvergelijkingen voor het model In euclidische coördinaten heeft de bewegingsvergelijking voor een hemellichaam de vorm (1). Door de impulsvector te introduceren, $U_i = m_i \dot{x}_i$ ($i = 0, 1, 2$), kan het systeem als een eerste-orde gewone differentiaalvergelijking geschreven worden. De faseruimte wordt dan gegeven door

$$M := \{(x_0, x_1, x_2, U_0, U_1, U_2) \in \mathbb{R}^{18} : x_i, U_i \in \mathbb{R}^3\}. \quad (8)$$

Door translatie-invariantie en behoud van im-

puls te gebruiken, kunnen we de positie van de zon vastzetten, waarna de vergelijkingen voor de zon buiten beschouwing kunnen worden gelaten. In euclidische coördinaten heeft (1) echter niet de juiste vorm voor toepassing van KAM-theorie en het systeem kan ook niet zonder meer in de vorm (3) geschreven worden. Dit kan echter wel als we ons beperken tot een voldoende kleine omgeving van de ongestoorde Keplerse ellipsen. De faseruimte is dan

$$\mathcal{M} := \{(x, y, p, q) \in \mathbb{T}^2 \times Y \times Z \times Z \mid (x, y, p, q) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4\}, \quad (9)$$

met $Z \subset \mathbb{R}^4$ een open omgeving van de oorsprong. Het storingsprobleem wordt dan gegeven door

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \omega(y) + \varepsilon f_1(x, y, p, q), \\ \dot{y} &= 0 + \varepsilon f_2(x, y, p, q), \\ \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon \lambda(y) \\ \varepsilon \lambda(y) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} + \varepsilon f_3(x, y, p, q). \end{aligned} \quad (10)$$

De frequentievector van dit systeem volgen uit de frequentieafbeelding $\mathcal{F}_\varepsilon : Y \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^6$ gegeven door

$$\mathcal{F}_\varepsilon : y \mapsto (\omega(y), \varepsilon \lambda(y)) = (\omega_1(y), \omega_2(y), \varepsilon \lambda_1(y), \varepsilon \lambda_2(y), \varepsilon \lambda_3(y), \varepsilon \lambda_4(y)). \quad (11)$$

Informeel gesproken, worden de coördinaten voor dit systeem verkregen door elke positievariabele in de euclidische ruimte te identificeren met een punt op een ellips. De x_i komen overeen met de frequenties over de ellipsen en de y_i zijn gerelateerd aan de halve lange assen van de ellipsen. De p_j, q_j zijn gerelateerd aan de excentriciteiten en inclinaties van de ellipsen. Voor $\varepsilon = 0$, het ongestoorde systeem, is er alleen interactie tussen de zon en de planeten afzonderlijk. De excentriciteiten en inclinaties zijn dan constant. De oplossingen van het systeem zijn dan de verwachte twee Keplerse ellipsen waarover de planeten bewegen met frequenties ω_1, ω_2 . Deze twee ellipsen geven aanleiding tot de 2-tori in de Arnold–Robutel–Herman–Féjóz-stelling.

In ons geval is de vergelijking (3) Hamiltoniaans, hetgeen betekent dat de variabelen in paren voorkomen, (x_i, y_i) en (p_i, q_i) . Een paar als (x_i, y_i) lijkt nog het meest op een stel poolcoördinaten met x_i als hoek en y_i als de bijbehorende poolstraal. In de 12-

dimensionale faseruimte $\mathcal{M}$, zie (9), zijn wij dus niet op zoek naar één torus, zoals in (3), maar naar een familie van tori die worden geparametriseerd door de poolstraal-variabelen y .

Het systeem (10) is nog geen goed gedefinieerd storingsprobleem, want de afbeelding $\varepsilon \lambda$ heeft dezelfde orde van grootte als de storingsterm εf_3 . Indien ω voldoende Diophantisch is, bestaat er een transformatie die op $O(\varepsilon^2)$ na overeenkomt met middeling over de x -variabelen. Onder middeling wordt de storing εf_3 van orde $\varepsilon O(\|p\|^2 + \|q\|^2)$. Dus voor een voldoende kleine omgeving van circulaire, co-planaire Keplerse ellipsen, oftewel p, q klein, krijgen we een storingsprobleem op de frequentieafbeelding $\mathcal{F}_\varepsilon$.

Rüssmann-niet-gedegenereerdheidsconditie

Zoals moge blijken uit de eerdere behandeling van (3) is het van belang te kijken in het frequentiedomein, dat wil zeggen in het beeld van de afbeelding $\mathcal{F}_\varepsilon : Y \rightarrow \mathbb{R}^6$. Aangezien $Y \subset \mathbb{R}^2$, kan dit beeld niet open zijn en zou het a priori kunnen dat alle beeldpunten in een resonantie-gat van de Diophantische frequentieverzameling vallen. In principe is hiervoor de Rüssmann-niet-gedegenereerdheidsconditie een uitgelezen wapen [4, 6, 9, 25]. Die zegt dat als het beeld van $\mathcal{F}_\varepsilon$ voldoende gekromd is dit in geen enkel resonantie-hypervlak kan liggen en zelfs een maattheoretisch kleine doorsnijding met de resonantie-gaten heeft, zie Figuur 2. De bijbehorende KAM-stelling zegt dan dat de waarden van $y \in Y$ met de KAM-tori ook een verzameling van positieve maat vormen.

De vraag is nu of de frequentieafbeelding $\mathcal{F}_\varepsilon$ Rüssmann-niet-gedegenereerd is. Dit blijkt niet zonder meer het geval te zijn.

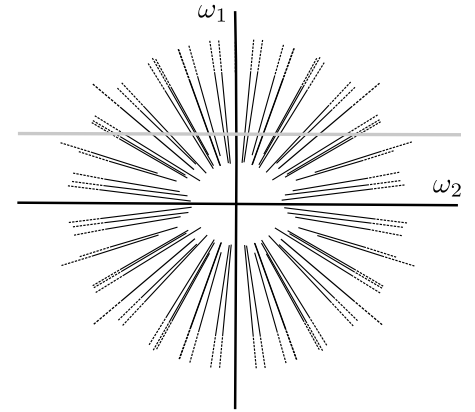
Resonanties

Door de frequentieafbeelding gaan twee resonante hypervlakken [8]:

$$\lambda_4 = 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0. \quad (12)$$

De frequentieafbeelding is dus niet Rüssmann-niet-gedegenereerd en KAM-theorie kan nog niet worden toegepast.

Resonanties vernietigen het lineaire gedrag doordat er een interactie is tussen de variabelen die de resonantie bepalen. Echter, indien zelfs onder storing deze variabelen onafhankelijk van elkaar zijn, heeft dit geen gevolgen voor persistentie van de ongestoorde tori, bijvoorbeeld als de oplossingen van het gestoorde systeem een 2-torus met invariante



Figuur 2 Schets van de Diophantische frequenties in $\mathbb{R}^2$ die een verzameling van positieve maat vormen. Deze verzameling is een overaftelbare vereniging van gesloten halfrechten. Een kromme in deze frequentieruimte zou gemakkelijk in een resonantie-gat kunnen liggen, maar een kromme die transversaal op de halfrechten staat, de grijze lijn $\omega_1 = \text{constant}$, is Rüssmann-niet-gedegenereerd. In hogere dimensie zouden hogere afgeleiden van de kromme ook een rol spelen.

cirkels bedekken. Dan kan het systeem gereduceerd worden tot de studie van invariante cirkels en hoeft er geen rekening te worden gehouden met de resonantie die de symmetrie induceert.

Het zonnestelsel bevat nog drie behouden grootheden, $C = (C_1, C_2, C_3)$, die overeenkomen met het totale impulsmoment van het zonnestelsel op het gemeenschappelijk zwaartepunt, i.e., de som van de impulsmomentvectoren van alle hemellichamen in $\mathbb{R}^3$. Als dit impulsmoment in twee richtingen wordt vastgezet, bijvoorbeeld $C = (0, 0, C_3)$, dan ligt het resonante hypervlak ten gevolge van $\lambda_4 = 0$ niet in de verkregen faseruimte [8]. We kunnen dan alleen in één richting het impulsmoment variëren met C_3 . Als vervolgens C_3 constant wordt genomen, dan zijn de oplossingen rotatie-invariant om de bijbehorende as en kan deze $\mathbb{S}^1$ -symmetrie om het gemeenschappelijk zwaartepunt eruit worden gedeeld. Deze laatste reductie geeft een faseruimte zonder de resonantie door $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Dit levert een 8-dimensionaal systeem waarop KAM-theorie kan worden toegepast. Wij krijgen dan een positieve maat van quasi-periodieke oplossingen op 4-tori. De voorgaande argumentatie is onafhankelijk van de keuze van het impulsmoment maar doordat de $\mathbb{S}^1$ -symmetrie eruit is gedeeld zullen de 4-tori in de volledige faseruimte op 5-tori liggen. Dit voltooit de schets van het bewijs voor de Arnold–Robutel–Herman–Féjóz-stelling.

Opmerkingen.

- Arnold beweerde dat het ruimtelijke probleem kan worden gezien als een storing

op het planaire probleem [1]. Dit bleek niet waar te zijn, want zelfs na reducties bevat het systeem variabelen ten gevolge van de inclinaties [8, 24].

- De reducties door gebruik van de eerste integralen C_1, C_2, C_3 komen overeen met de klassieke Jacobi-eliminatie van de knoop in de zin van de hemelmechanica [7, 13].
- In het bewijs van Robutel wordt zonder naar de frequentieafbeelding te kijken de klassieke Jacobi-eliminatie van de knoop uitgevoerd. Hoewel $\lambda_4 = 0$ al bewezen was door Arnold [1], miste hij hiermee de resonantie door $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, die als eerste werd ontdekt door Herman [11].
- De oplossingen op de invariante 5-tori liggen niet op invariante 4-tori die de 5-tori volledig bedekken [14].
- Het Newtoniaanse model neemt niet alle effecten mee die een rol spelen bij de beweging van de hemellichamen. De bewegingen ten gevolge van onder andere de getijden, relativiteitstheorie en massaverlies van de zon over de tijd zouden meegenomen moeten worden voor een accurater model.

Stabiliteit van het zonnestelsel

De ARHF-stelling voor twee planeten kan direct uitgebreid worden naar n planeten [8]. Voor het toepassen van dit KAM-

stabiliteitsresultaat op het echte zonnestelsel hebben we een kwantitatieve theorie nodig die een bovengrens geeft op ε en de afwijking tot circulaire co-planaire banen. Werk van Hénon in het planaire geval suggereert dat voor de massa van onze zon (10^{30} kg) de massa's van de planeten kleiner dan die van een elektron moeten zijn om KAM-theorie toe te kunnen passen [10]. De afwijking tot circulaire co-planaire banen wordt gemeten in inclinaties en excentriciteiten. Er bestaan realistische bovengrenzen voor de inclinaties [24], terwijl bovengrenzen op de excentriciteiten nog absurd kleine waardes moeten aannemen.

KAM-theorie eist dat over een oneindig lang tijdsinterval de planeten stabiel moeten blijven, terwijl in de werkelijkheid dit alleen hoeft te gelden voor de leeftijd van de zon. De KAM-gerelateerde Nehorošev-stelling zegt dat oplossingen dichtbij KAM-tori, dichtbij de tori blijven over een tijdsinterval afhankelijk van de storingsgrootte [19]. Voor een zonnestelsel met twee planeten kunnen de planeten dan massa's van orde 10^6 kg hebben [20]. Dit is nog steeds niet dichtbij de werkelijke massa's, aangezien de zwaarste planeet een massa van orde 10^{27} kg heeft.

Het is maar de vraag of KAM-theorie en gerelateerde theorieën behulpzaam kunnen zijn voor het aantonen van de stabili-

teit van het zonnestelsel. Zeer veel orbitale frequenties zitten dicht in de buurt van 'lage orde'-resonanties, bijvoorbeeld Jupiter-Saturnus ($2\omega_{\text{Jupiter}} - 5\omega_{\text{Saturnus}} \approx 0$), Mars-Aarde ($2\omega_{\text{Mars}} - \omega_{\text{Aarde}} \approx 0$). Dit geeft aan dat zelfs als de planeetbanen Diophantische frequenties hebben, de storing zeer klein moet zijn.

Numerieke wiskunde heeft meer succes in stabiliteitsonderzoek. Recent werk suggereert dat in de beweging van de buitenplaneten (Jupiter, Saturnus, Uranus, Neptunus) weinig zal veranderen terwijl de binnenplaneten (Mercurius, Venus, Aarde, Mars) zich onregelmatig zouden kunnen gedragen over een tijdspanne van miljoenen jaren, met als gevolg dat planeten over miljarden jaren het zonnestelsel zouden kunnen verlaten [15, 17]. Daarmee blijft het stabiliteitsprobleem van het zonnestelsel, althans voor de komende miljoenen jaren, meer een wetenschappelijk dan een praktisch probleem. $\leftarrow$

Dankwoord

Ik wil graag professor Henk Broer, professor Jacques Féjoz, dr. Heinz Hanßmann, professor Barry Koren, professor Ferdinand Verhulst en de CASA groep (TU Eindhoven) bedanken voor de discussies en opmerkingen gedurende het schrijven van dit artikel.

Referenties

- 1 V.I. Arnold, Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics, *Russ. Math. Surv.* 18 (1963), 85–193.
- 2 V.I. Arnold en A. Avez, *Ergodic Problems of Classical Mechanics*, Addison-Wesley, 1979.
- 3 H.W. Broer, G.B. Huitema en M.B. Sevryuk, *Quasi-Periodic Motions in Families of Dynamical Systems*, Springer, 2002.
- 4 H.W. Broer, G.B. Huitema en F. Takens, Unfoldings of quasi-periodic tori, *Mem. Amer. Math. Soc.* 83(421) (1990), 1–82.
- 5 H.W. Broer en F. Takens, *Dynamical Systems and Chaos*, Epsilon Uitgaven, 2009.
- 6 H.W. Broer, H. Hanßmann en F.O.O. Wagener, *Quasi-Periodic Bifurcation Theory*, Springer, 2013.
- 7 A. Deprit, Elimination of the nodes in problems of n bodies, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 30 (1983), 181–195.
- 8 J. Féjoz, Démonstration du théorème d'Arnold sur la stabilité du système planétaire (d'après M. Herman), <http://www.ceremade.dauphine.fr/~fejoz/Articles/arnold.pdf>, herziene versie van het artikel in *Michael Herman Memorial Issue, Ergodic Theory Dyn. Sys.* 24(5) (2004), 1521–1582.
- 9 H. Hanßmann, Non-degeneracy conditions in KAM theory, *Indagationes Mathematicae* 22(3-4) (2011), 241–256.
- 10 M. Hénon, Exploration numérique du problème restreint IV. Masses égales orbites non périodiques, *Bull. Astronom.* 31(1-2) (1966), 49–66.
- 11 M.R. Herman, Démonstration du théorème de V.I. Arnold, Séminaire de systèmes dynamiques, 1998.
- 12 G. Holton en S.G. Brush, *Physics, the Human Adventure: From Copernicus to Einstein and Beyond*, Rutgers University Press, 2004.
- 13 C.G.J. Jacobi, Sur l'élimination des noeuds dans le problème des trois corps, *Astronomische Nachrichten*, Bd XX (1842), 81–102.
- 14 T.G. de Jong, Stability of planetary motions in a model of the solar system with two planets: A note on the Arnold–Robutel–Herman–Féjoz theorem, www.win.tue.nl/~tjong/index.html, Masterscriptie Rijksuniversiteit Groningen, 2012.
- 15 J. Laskar, The chaotic motion of the solar system, a numerical estimate of the size of the chaotic zones, *Icarus* 88 (1990), 266–291.
- 16 J. Laskar en P. Robutel, Stability of the planetary three-body problem, I. Expansion of the planetary Hamiltonian, *Celestial Mech. Dynam. Astronom.* 62 (1995), 193–217.
- 17 S. Marmi, Chaotic behaviour in the solar system (following J. Laskar), Séminaire Bourbaki, Exp. 854, 1998/99.
- 18 J. Moser, *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*, Princeton Landmarks, 1973.
- 19 N.N. Nehorošev, An exponential estimate of the time of stability of nearly integrable Hamiltonian systems II, *Trudy Sem. Petrovsk.* 5 (1979), 5–50.
- 20 L. Niederman, Stability over exponentially long times in the planetary problems, *Nonlinearity* 9 (1996), 1703–1751.
- 21 J.C. Oxtoby, *Measure and Category*, Springer, 1971.
- 22 J.H. Poincaré, Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle, *J. de mathématiques*, 3e série, 7 (1881), 375–422, 8 (1882), 251–296, *Annalen* 19 (1882), 553–564.
- 23 J.H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, 3 vols., Gauthier-Villars, Paris, 1892, 1893, 1899.
- 24 P. Robutel, Stability of the planetary three-body problem, II. KAM theory and existence of quasiperiodic motions, *Celestial Mech. Dynam. Astronom.* 62 (1995), 219–261.
- 25 H. Rüssmann, Invariant tori in non-degenerate nearly integrable Hamiltonian systems, *Regular Chaotic Dynamics* 6 (2001), 119–204.