

Barry Koren

Faculteit Wiskunde & Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
b.koren@tue.nl

Vakantiecursus

Navier–Stokes

De Navier–Stokes-vergelijkingen behoren tot de meeste gebruikte vergelijkingen voor de berekening van gas- en vloeistofstromingen. Op de Vakantiecursus 2013 van het Platform Wiskunde Nederland vertelt Barry Koren over de Navier–Stokes-vergelijkingen, over stromingsleer en over het openstaande millenniumprobleem.

We berekenen allerlei stromingen met de Navier–Stokes-vergelijkingen, luchtstromingen om vliegtuigontwerpen bijvoorbeeld. Vliegtuigen waar we dan vervolgens gewoon instappen als ze gebouwd zijn, ofschoon we niet zeker weten of de bij het ontwerpen van die vliegtuigen met de Navier–Stokes-vergelijkingen berekende luchtstromingen wel echt betrouwbaar zijn. Een van de zes nog openstaande millenniumproblemen betreft het leveren van een bewijs voor het bestaan van betrouwbare oplossingen van de Navier–Stokes-vergelijkingen. De bijna twee eeuwen oude Navier–Stokes-vergelijkingen vormen nog steeds een uitdagend werkterrein voor wiskundigen.

Navier–Stokes-vergelijkingen

Vergelijkingen van Euler

Om de beweging van een vloeistof (het kan ook een gas zijn) in een driedimensionaal, vast, rechthoekig x, y, z -assenstelsel te beschrijven beschouwen we een oneindig kleine kubus van die vloeistof met snelheidscomponenten u, v en w in respectievelijk de x -, y - en z -richting. Deze snelheidscomponen-

ten zijn in het algemeen functies van de drie plaatscoördinaten en de tijd. Noteren we de tijd met t , dan kunnen we dus schrijven voor de snelheidscomponenten van onze oneindig kleine vloeistofkubus: $u = u(x, y, z, t)$, $v = v(x, y, z, t)$, $w = w(x, y, z, t)$. Voor de kleine verandering van bijvoorbeeld de snelheidscomponent u van het vloeistofkubusje, van tijdstip t naar het iets latere tijdstip $t + dt$, kunnen we schrijven:

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz, \quad (1)$$

waarin

$$dx = u dt, \quad dy = v dt, \quad dz = w dt. \quad (2)$$

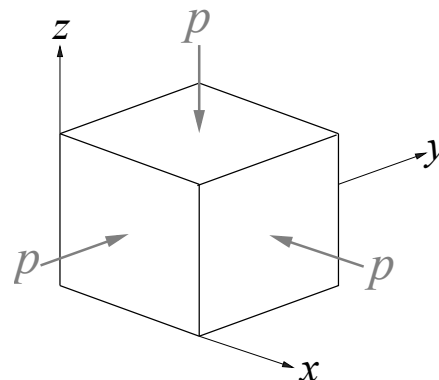
In (2) zijn dx, dy en dz de in het tijdstapje dt door het vloeistofkubusje afgelegde afstanden in respectievelijk x -, y - en z -richting. Invulling van (2) in (1) levert

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}.$$

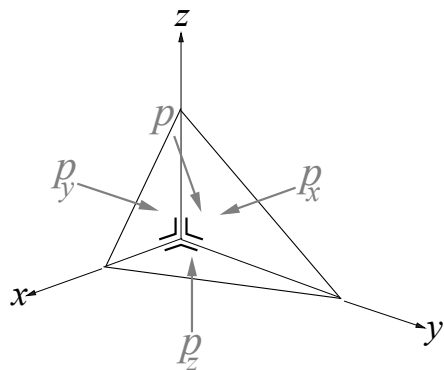
Voor $\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{du}{dt}$ is $\frac{du}{dt}$ de versnelling in x -richting van het vloeistofkubusje op tijdstip t . Voor de versnelling in y - en z -richting gelden vergelijkbare uitdrukkingen. Voor de versnellingsvector van het vloeistofkubusje kunnen we schrijven:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

Volgens de Tweede Wet van Newton geldt dat



Figuur 1 Oneindig kleine vloeistofkubus met drukkracht op de zijwandjes.



Figuur 2 Oneindig klein, rechthoekig vloeistofviervlak met drukkrachten op de zijwandjes. De wet van Pascal zegt dat in elk punt (x, y, z) de druk in alle richtingen even groot is; $p_x = p_y = p_z = p$.

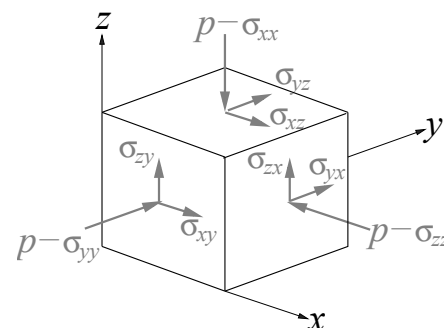
massa \times versnelling van onze oneindig kleine vloeistofkubus gelijk is aan de som van de krachten op het kubusje. Als notatie voor de dichtheid (massa van de vloeistof per volume-eenheid) voeren we ρ in, waarbij, evenals voor de snelheidscomponenten, ook voor de dichtheid geldt: $\rho = \rho(x, y, z, t)$. Vervolgens beschouwen we – in navolging van Euler – als kracht die vanuit de omringende vloeistof op dit vloeistofkubusje kan werken: een oppervlaktekracht loodrecht op de zijwandjes van het kubusje, de drukkracht (Figuur 1). Verder beschouwen we ook een volumekracht,

een kracht die van buitenaf op alle vloeistof in het kubusje werkt, bijvoorbeeld de zwaartekracht.

Het bijzondere van de drukkracht is dat deze, in tegenstelling tot de snelheid en de versnelling, in elk punt in alle richtingen hetzelfde is. De druk is isotroop; de drukkracht is geen vector maar een scalar. Dit resultaat staat bekend als de Wet van Pascal en kan worden afgeleid door te eisen dat de versnelling van een oneindig klein, rechthoekig vloeistofviervlak (Figuur 2) in geen van de drie coördinaatrichtingen oneindig groot mag worden. De volumekracht kan wel een vector zijn (opgebouwd uit bijvoorbeeld de componenten van de zwaartekracht in elk van de drie coördinaatrichtingen).

De (scalaire) drukkracht noteren we met p en de (vectoriële) volumekracht met (f, g, h) , waarbij ook hier druk- en volumekracht functies van de ruimtecoördinaten en de tijd kunnen zijn; $p = p(x, y, z, t)$, enzovoort. De Tweede Wet van Newton kunnen we dan uiteindelijk voor de oneindig kleine vloeistofkubus schrijven als:

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$



Figuur 3 Oneindig kleine vloeistofkubus met druk- en schuifkrachten op de zijwandjes.

$$= - \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} p + \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}.$$

Dit zijn de in 1755 gepubliceerde Euler-vergelijkingen [6]. De vergelijkingen lieten al snel de juistheid zien van het reeds eerder door Daniel Bernoulli voorgestelde verband tussen druk en snelheid in bepaalde eenvoudige stromingen. Echter, de Euler-vergelijkingen toonden ook de ‘juistheid’ aan van de eveneens eerder gevonden Paradox van d’Alembert, welke zegt dat een lichaam



Sir George Gabriel Stokes (1819–1903)

George Gabriel Stokes werd op 13 augustus 1819 geboren, in Skreen, een plaatsje in het noorden van Ierland. Hij groeide op in een godsdienstig milieu; zijn vader was predikant, zijn grootvader aan de kant van zijn moeder ook, en drie van zijn broers waren voorganger in de kerk. Stokes koos voor de wetenschap en bleef zijn gehele leven ook belijdend christen. Hij was sterk geïnteresseerd in geloof en wetenschap. Zo was hij president van een vereniging ter bestudering van de relatie tussen het christelijk geloof en wetenschap.

Stokes genoot degelijk onderwijs, als kind thuis van zijn vader en als tiener op het Bristol College in Engeland. Op 18-jarige leeftijd ging hij studeren, aan het Pembroke College aan de Universiteit van Cambridge. Hij moet een uitstekend student zijn geweest; bij zijn afstuderen kreeg hij een beurs aangeboden om als wetenschappelijk medewerker op Pembroke College te blijven. En acht jaar later al werd hij hoogleraar op dezelfde leerstoel waar Newton bijna twee eeuwen daarvoor hoogleraar was geweest, de Lucasian Chair. Stokes was meer theoretisch natuurkundige dan wiskundige. Zijn onderzoeksonderwerp was eigenlijk niet stromingsleer, maar optiek, in het bijzonder de voortplanting van licht door de ether, een denkbeeldige, dunne vloeistof waar de aarde doorheen zou bewegen in het hemelruim. Het doel van Stokes’ afleiding van vergelijkingen voor de beschrijving van vloeistofstroming was niet het berekenen van zoiets aards als bijvoorbeeld de stroming van water door een rivier, maar de berekening van de stroming van hemelse ether om de aarde. Als opticus was Stokes zeer succesvol. Zo gaf hij een verklaring voor het verschijnsel van zichtbaar licht uitgestraald door een kleurloze stof als daar onzichtbare ultravioletstraling op invalt, een verklaring waarin hij het woord fluorescentie invoerde en waarvoor hij in 1852 een prijs ontving van de Royal Society. Hij stelde ook voor om met fluorescentie de moleculaire eigenschappen van stoffen te onderzoeken en legde daarmee mede de basis voor de spectraalanalyse.

Stokes bleef de Lucasian Chair tot aan zijn dood bezetten.

dat in zijn geheel wordt omstroomd door een vloeistof, daarvan geen weerstand ondervindt, hetgeen in strijd is met onze alledaagse ervaring.

Vergelijkingen van Stokes

De Euler-vergelijkingen veronderstellen dat de enige vloeistofkracht die in vloeistofstromingen kan optreden de drukkracht is. Voor praktische toepassingen schieten de Euler-vergelijkingen vaak tekort. In vloeistofstromingen kunnen naast de drukkracht ook schuifkrachten (wrijvingskrachten) optreden; krachten tangentieel aan de zijvlakjes van ons vloeistofkubusje (Figuur 3).

Het was in 1845 dat in Cambridge de natuur- en wiskundige Stokes een beter model invoerde dan dat van Euler, een model met schuifkrachten [14]. Voor het modelleren van de schuifkrachten maakte Stokes gebruik van stromingsleerwerk van Newton, werk dat in het algemeen veel minder bekend was dan de Tweede Wet van Newton, zij het waarschijnlijk niet bij Stokes als houder van de Lucasian Chair. Stokes postuleerde dat Eulers scalaire druk in feite een krachttensor is:

$$\begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix},$$

en wel een te eenvoudige. Stokes breidde Eulers tensor uit tot:

$$\begin{pmatrix} -p + \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & -p + \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & -p + \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

waarin de niet-diagonaaltermen schuifkrachten zijn, en hij drukte alle nieuwe σ -termen uit in partiële differentiaal van u , v en w . Om te beginnen schreef hij voor de nieuwe diagonaaltermen σ_{xx} , σ_{yy} en σ_{zz} :

$$\sigma_{xx} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (4)$$

$$\sigma_{yy} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (5)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (6)$$

waarin λ en μ uit metingen bekende eigen-

schappen zijn van de specifieke beschouwd vloeistof (water, lucht of wat dan ook). Dit zijn de viscositeitscoëfficiënten, getallen die de mate van viscositeit (stroperigheid) van de vloeistof kwantificeren. De belangrijkste van de twee is μ , de afschuifviscositeit, de mate van weerstand die een vloeistof biedt tegen afschuiving (uitsmering). Hoe groter μ , hoe stroperiger (minder goed uitsmeerbaar) de vloeistof. Honing heeft bijvoorbeeld een grotere μ dan water. Bij temperatuurverlaging neemt μ in het algemeen toe; honing wordt minder goed uitsmeerbaar als het kouder wordt. De viscositeitscoëfficiënt λ hangt samen met de visceuze weerstand die een vloeistof biedt tegen samendrukking of uitzetting. Het vakgebied waarin vloeistofkrachten worden gemodelleerd, beschreven in termen van vervormingstermen, heet reologie. De door Stokes voorgestelde reologische relaties (4), (5) en (6) lijken misschien ingewikkeld, maar zijn in feite eenvoudig; ze veronderstellen een lineair (en dus eenvoudig) verband tussen krachten en vervormingsnelheidstermen. Voor de niet-diagonaalelementen in (3), de schuifkrachten, schreef Stokes nog eenvoudiger lineaire verbanden:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right),$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right).$$

Het argument dat hij gebruikte voor het symmetrisch laten zijn van de krachttensor ($\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$, $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$, $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$) was vergelijkbaar met het argument dat al door Pascal was gebruikt in het isotroop laten zijn van de druk: de hoekversnellingen van het vloeistofkubusje zijn eindig aldus Stokes. Stokes ging nog verder in zijn vereenvoudiging: hij stelde voor om de zogenaamde bulkviscositeit $\tilde{\mu} \equiv \lambda + \frac{2}{3}\mu$, de visceuze weerstand tegen samendrukking en uitzetting, gelijk aan nul te nemen, dus:

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu.$$

Tot zover de bijdrage van Stokes.

Vergelijkingen van Navier en Saint-Venant

Als we aannemen dat $\rho = \rho(x, y, z, t) = \text{constant}$, dat wil zeggen, als we aannemen dat onze vloeistof incompressibel (onsamendruk-

baar) is, dan vereenvoudigen de door Stokes afgeleide bewegingsvergelijkingen nog verder, en wel tot:

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} p \\ &+ \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

Stelsel (7) is een gekoppeld stelsel van drie partiële differentiaalvergelijkingen, met vier te bepalen oplossingscomponenten: $u = u(x, y, z, t)$, $v = v(x, y, z, t)$, $w = w(x, y, z, t)$, $p = p(x, y, z, t)$. Om het stelsel vergelijkingen sluitend te maken wordt de wet van behoud van massa toegevoegd, welke zich voor een incompressibele vloeistofstroming laat schrijven als

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (8)$$

Vergelijking (8) is al stilzwijgend gebruikt bij het afleiden van (7). Stelsel (7) met daaraan toegevoegd vergelijking (8) vormen tezamen de wijd en zijd gebruikte incompressibele Navier–Stokes-vergelijkingen, de vergelijkingen waarvoor een van de zes nog openstaande millenniumproblemen is geformuleerd [7].

Het stelsel vergelijkingen (7)–(8) is reeds in 1822 afgeleid door de Fransman Navier [10]. Navier was niet uitgegaan van de in Figuur 3 geschetste situatie, de situatie met normaal- en tangenciaalkrachten werkend op de zijvlakjes van de oneindig kleine vloeistofkubus. Naviers uitgangspunt was het aanpassen van de Euler-vergelijkingen voor krachten die tussen vloeistofmoleculen kunnen werken. Navier nam aan dat deze krachten afstotend zijn bij kleine afstanden tussen de moleculen en aantrekkend bij grotere afstanden. Daarnaast nam hij aan dat deze krachten evenredig zijn met de snelheid van moleculen ten opzichte van elkaar. Navier leidde op basis hiervan als stelsel vergelijkingen af: de Euler-vergelijkingen met daaraan toegevoegd termen voor intermoleculaire krachten;



Claude Louis Marie Henri Navier (1785–1836)

Claude Louis Marie Henri Navier werd geboren op 10 februari 1785 in Dijon en bracht zijn kinderjaren grotendeels door in Parijs, waar zijn vader juridisch medewerker was in de Nationale Assemblee. Toen de kleine Claude acht jaar oud was overleed zijn vader en werd hij voor zijn opvoeding toevertrouwd aan een oom van zijn moeder, Emiland Gauthey. Oudoom Emiland was een uitstekend ingenieur. Onder zijn invloed ging Claude Navier in 1802 studeren aan de École Polytechnique. In 1806 studeerde hij af, als ingenieur in de weg- en waterbouwkunde. Hij pakte door; hij ging studeren bij Fourier. Fouriers invloed op Navier was groot en blijvend; Navier werd zijn beschermeling en vriend voor het leven.

Navier werkte zich op tot een van Frankrijks beste ingenieurs. Hij publiceerde ook; hij gaf het werk van zijn oudoom uit en schreef ook zelf. In zijn publicaties legde hij, met zijn bij Fourier verworven analytische inslag, mede de wetenschappelijke basis voor de ingenieurswetenschappen, een basis die tot dan toe tamelijk empirisch was. Het belang van Naviers vernieuwende ingenieursstijl werd erkend. In 1819 werd hij docent aan de École des Ponts et Chaussées. Zijn ster als wetenschapper begon ook te rijzen. In 1826 werd hij lid van de Academie van Wetenschappen in Parijs. Hij ontwikkelde zich steeds meer tot wiskundige, maar bleef ook ingenieur; in 1831 volgde hij Cauchy op als docent aan de prestigieuze École Polytechnique, maar bleef ook nog bruggen ontwerpen.

termen die precies hetzelfde waren als die welke later formeel werden afgeleid als zijnde schuifkrachten in incompressibele vloeistofstromingen. Navier kende het begrip schuifkrachten in vloeistofstromingen vermoedelijk niet eens, maar vond deze indirect in feite toch. Naviers afleiding en resultaat waren geen kwestie van geluk. Uit de kinetische gastheorie weten we nu dat de viscositeitscoëfficiënt μ te maken heeft met de vrije weglengte tussen de moleculen. Al met al knap fundamenteel werk van Navier, die was opgeleid als ingenieur en was gespecialiseerd in het ontwerpen van bruggen.

Navier overleed op betrekkelijk jonge leeftijd, in 1836. Zijn werk aan de beschrijving van vloeistofstromingen was echter niet onopgemerkt gebleven. Op zijn hypothese over de intermoleculaire krachten werd voortgeborduurd door Cauchy en Poisson. En de ingenieur Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant (1797–1886) was er ook mee bekend, zoals blijkt uit een boek van hem [2]. Zeven jaar na Naviers dood leidde Saint-Venant de door Navier gevonden vergelijkingen opnieuw af, nu echter wel uitgaande van schuifkrachten in de vloeistofstroming, en zonder gebruik te maken van Naviers moleculaire aanpak. Hij had het helemaal bij het juiste eind en publiceerde de resultaten van zijn onderzoek [3], twee jaar voor de publicatie van Stokes! Eigenlijk zouden we van de *Navier–Barré de Saint-Venant–Stokes-vergelijkingen* moeten spreken, maar dat is natuurlijk wel een hele mond vol. De geschiedenis vertelt dat Stokes ook niet van dit werk van Saint-Venant wist.

Paradox

Met de introductie van de Navier–Stokes-vergelijkingen, nu al bijna twee eeuwen geleden, leek het probleem van het begrijpen en beheersen van een grote klasse stromingen onder handbereik. Het probleem was immers teruggebracht tot het oplossen van een handvol partiële differentiaalvergelijkingen.

Hoewel de Navier–Stokes-vergelijkingen grote vooruitgang brachten, bleek de analytische oplossing van de complete vergelijkingen, de ‘oplossing met potlood en papier’, te hoog gegrepen. Het gevolg was het ontstaan van een groot aantal van Navier–Stokes afgeleide, vereenvoudigde vergelijkingen voor speciale gevallen, die *wel* analytisch waren aan te pakken. Het was paradoxaal om te zien dat de invoering van de Navier–Stokes-vergelijkingen leidde tot een steeds grotere fragmentatie in verschillende stromingsmodellen, die *allemaal* de stroming beschreven van hetzelfde medium, een theoretisch hoogst ongewenste situatie.

Experimentele stromingsleer ontwikkelde zich sterk tijdens de industriële revolutie. Theoretische stromingsleer daarentegen stagneerde langs een front van niet-lineaire problemen. Het doorbreken daarvan zou uiteindelijk pas in de tweede helft van de twintigste eeuw gebeuren, met numeriek-wiskundige methoden: met getallen, bij benadering, en ten koste van veel, vaak heel veel rekenwerk. Een sleutelrol hierbij zou worden gespeeld door de oorspronkelijk uit Hongarije afkomstige wiskundige John von Neumann. Hoe dit is gegaan illustreren we aan de hand van het probleem van weersvoorspelling.

Numerieke Stromingsleer

Numerieke weersvoorspelling

Een alledaagse toepassing van de Navier–Stokes-vergelijkingen is weersvoorspelling. Voor de Tweede Wereldoorlog was weersvoorspelling meer een kunst dan een kunde. Elke dag werden weergegevens van verschillende plaatsen verzameld. Deze gegevens werden op land- en zeekaarten uitgezet, waarna er lijnen van constante druk en temperatuur op deze kaarten werden geschetst. Door vergelijking met oude druk- en temperatuurverdelingen en bijbehorende, bekende weersverlopen werd vervolgens door een weerkundige een weersvoorspelling gedaan. De persoonlijke deskundigheid van deze meteoroloog drukte een zwaar subjectief stempel op de weersvoorspelling. Wat wiskunde betreft werd slechts gebruik gemaakt van elementaire statistiek en wat eenvoudige interpolatie- en extrapolatiemethoden.

In een poging om tot een meer wetenschappelijk gefundeerde weersvoorspelling te komen had de Noor Vilhelm Bjerknes aan het begin van de twintigste eeuw het idee geopperd om het weer te voorspellen op basis van de Navier–Stokes-vergelijkingen, waar nodig aangevuld met andere vergelijkingen [4]. Voor een weersvoorspelling wil je verdelingen weten in ruimte en tijd — de toekomst uiteraard — van onder andere windsnelheid en luchtdruk. Deze verdelingen zitten diep in de Navier–Stokes-vergelijkingen verpakt; ze zijn er niet gemakkelijk uit op te lossen. Exacte oplossing van de Navier–Stokes-vergelijkingen is vandaag de dag nog steeds onmogelijk. Bjerknes kwam



John von Neumann (1903–1957)

niet verder dan zijn idee, wel een belangrijk idee.

Het niet exact, maar bij benadering oplossen van de Navier–Stokes-vergelijkingen is wel te doen. In het geval van weersvoorspelling gaat dat bijvoorbeeld als volgt. In de atmosfeer om de gehele aarde leggen we een grote verzameling netjes verdeelde punten neer (bijvoorbeeld 1000 punten in lengterichting, helemaal rondom de aarde; 500 punten in breedterichting, van pool tot pool; en 100 punten in hoogterichting, vanaf het aardoppervlak tot ergens hoog in de atmosfeer, totaal in dit voorbeeld dus $1000 \times 500 \times 100 = 50$ miljoen punten). De driedimensionale verzameling punten noemen we het rooster. Het rooster zit aan de aarde vast. In elk roosterpunt willen we de snelheidsvector en de druk uitrekenen op één of meerdere tijdstippen in de toekomst. We nummeren de roosterpunten in elk van de drie coördinaatrichtingen, bijvoorbeeld met $i = 1, 2, 3, \dots, i_{\max}$, $j = 1, 2, 3, \dots, j_{\max}$, $k = 1, 2, 3, \dots, k_{\max}$. In het getalvoorbeeld van hiervoor geldt: $i_{\max} = 1000$, $j_{\max} = 500$, $k_{\max} = 100$. Deze discrete (puntsgewijze) benadering van de continue driedimensionale ruimte kan nauwkeuriger worden gemaakt door met kleinere onderlinge afstanden tussen de roosterpunten te werken; door meer roosterpunten te gebruiken. Echter, hoe meer roosterpunten, hoe meer rekenwerk en dus rekestijd. We willen geen ‘weersnaspelling’.

Niet alleen in de ruimte maar ook in de tijd passen we een discrete benadering toe; we vervangen de continue tijd t door de discrete tijd $l\Delta t$, $l = 0, 1, 2, \dots, l_{\max}$, waarbij Δt een te kiezen, kleine stap vooruit in de tijd is, en l_{\max} het nummer van een eindtijdstip tot waaraan toe we willen rekenen. Voor $l = 0$ zitten we op het begintijdstip van *waaraf* we willen gaan rekenen.

De Navier–Stokes-vergelijkingen (7)–(8) worden nu herschreven op dit discrete ruimtetijdrooster. We vervangen hiertoe alle partiële differentiaal in de Navier–Stokes-vergelijkingen door eindige differenties. Hier enige voorbeelden (alternatieven zijn mogelijk) van deze eindige differenties, waarbij een viervoudig subscript aangeeft in welk punt we ons bevinden in ruimte en tijd:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j,k,l} &\rightarrow \frac{u_{i,j,k,l+1} - u_{i,j,k,l}}{\Delta t}, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j,k,l} &\rightarrow \frac{u_{i+1,j,k,l} - u_{i-1,j,k,l}}{x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k}}, \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j,k,l} &\rightarrow \frac{u_{i+1,j,k,l} - u_{i,j,k,l} - \frac{u_{i,j,k,l} - u_{i-1,j,k,l}}{x_{i+1,j,k} - x_{i,j,k}} - \frac{u_{i,j,k,l} - u_{i-1,j,k,l}}{x_{i,j,k} - x_{i-1,j,k}}}{\frac{1}{2}(x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k})}, \end{aligned}$$

enzovoort. (Tweede-orde-differentiaal worden dus herschreven als differenties van differenties.) Op deze manier vervangen we het stelsel van vier partiële differentiaalvergelijkingen door een stelsel van, in ons voorbeeld, 4×50 miljoen eindige-

differentievergelijkingen. Dus geen onoplosbare partiële differentiaalvergelijkingen meer, maar relatief gemakkelijke algebraïsche vergelijkingen. De algebraïsche vergelijkingen zijn wel groot in aantal, niet-lineair en bovendien gekoppeld. Het laatste omdat elk roosterpunt is gekoppeld aan buurpunten.

Het rekenwerk kan nu beginnen. Op basis van meetgegevens van het weer over de gehele aarde op een bepaald tijdstip kunnen we een beginoplossing voor onze numerieke weersvoorspelling definiëren: in elke roosterpunt de daar ter plaatse *gemeten* waarden van windsnelheid en luchtdruk. Voor roosterpunten waar meetgegevens ontbreken moet de beginoplossing door interpolatie of extrapolatie vanuit de meetgegevens worden aangemaakt. Deze beginoplossing kunnen we vervolgens invullen in het stelsel eindige-differentievergelijkingen, en uit dat stelsel kunnen we dan in alle roosterpunten de oplossing op het nieuwe tijdsniveau $l = 1$ uitrekenen, dus voor alle i, j, k de numerieke oplossing op tijdstip $t = \Delta t$: $u_{i,j,k,l=1}$, $v_{i,j,k,l=1}$, $w_{i,j,k,l=1}$, $p_{i,j,k,l=1}$, $i = 1, 2, 3, \dots, i_{\max}$, $j = 1, 2, 3, \dots, j_{\max}$, $k = 1, 2, 3, \dots, k_{\max}$. Een complicatie is dat in het stelsel (7)–(8) geen term $\frac{\partial p}{\partial t}$ voorkomt. Met de druk kunnen we dus niet rechthoekig rechtaan vooruit stappen in de tijd. Voor wie wil weten hoe dit probleem is opgelost, zij verwezen naar bijvoorbeeld het klassieke numerieke stromingsleerboek van Pieter Wesseling [16]. Een subtiliteit tenslotte is de keuze van de tijdstap Δt . Deze kan gemakkelijk te groot worden genomen, met numerieke instabiliteit tot gevolg.

We hebben hier in grote lijnen al een numeriek algoritme te pakken. We zagen: hoe fijnmaziger het rooster, hoe nauwkeuriger de ruimtelijke weergave van het weer. Hetzelfde geldt voor het verloop van het weer in de tijd; hoe kleiner de stap Δt vooruit in de tijd, hoe nauwkeuriger de voorspellingen, maar ook hier: hoe meer rekenwerk tot we bij de gewenste eindtijd zijn. De hoeveelheid rekenwerk voor betrouwbare weersvoorspelling over een redelijk lange termijn is gigantisch.

De Britse meteoroloog Lewis Fry Richardson was de eerste die aan echte numerieke weersvoorspelling ging doen [12]. Richardson deed in de jaren twintig van de vorige eeuw een poging om het reeds voorbijgeen van 20 mei 1910 over een tijdsduur van zes uur te ‘voorspellen’. Hij koos die dag omdat het een internationale ballonvaartdag was geweest, een dag waarvoor veel weergegevens voor zijn beginoplossing beschikbaar waren. Richardsons numerieke weersvoorspelling werd een grote teleurstelling, in twee opzichten. De

voorspelling was helemaal fout en kostte bovendien veel te veel tijd: zes weken hard rekenen voor zes uur ‘weersnaspelling’. Alle rekenwerk was nog met de hand gedaan, in teamverband, dat wel. Bjerknes’ idee van numerieke weersvoorspelling op basis van de Navier–Stokes-vergelijkingen ging weer de mottenballen in, tot de Tweede Wereldoorlog.

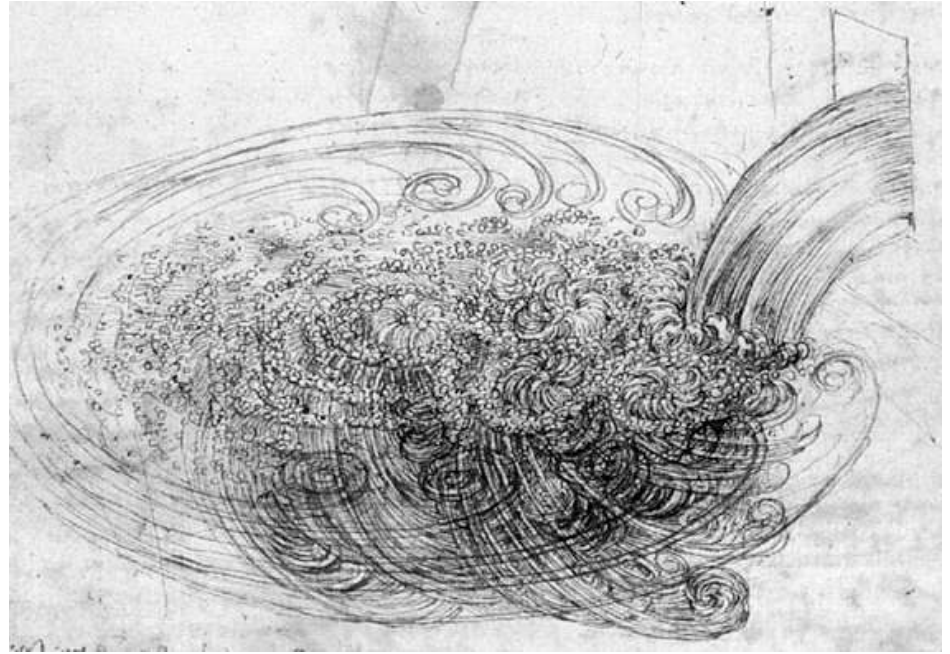
Een goede weersvoorspelling is van groot militair-strategisch belang. Toen de Verenigde Staten in de Tweede Wereldoorlog werden betrokken besloot men daar tot opleiding van maar liefst 5000 extra weerambtenaren. En in 1942 pakte de Hongaars-Amerikaanse wiskundige John von Neumann er de handschoen van numerieke weersvoorspelling weer op. Voor numerieke berekeningen waarin heel veel keer dezelfde soort sommen worden herhaald is numerieke stabiliteit, het niet buitensporig groeien van kleine foutjes (afrondfoutjes bijvoorbeeld), van cruciaal belang. Von Neumann bedacht een goede methode voor het vooraf analyseren (en zo nodig verbeteren) van de stabiliteit van numerieke methoden. De eerder door Richardson gebruikte numerieke methode voor weersvoorspelling bleek altijd instabiel te zijn volgens Von Neumanns stabiliteitsanalyse, dat wil zeggen voor elke positieve tijdstap Δt . Dat verklaart mogelijk ook waarom Richardsons resultaten niet klopten.

Von Neumann ging verder. Hij zag de ontwikkeling van een automatische, elektronische, digitale rekenmachine met interne programma-opslag — de computer zoals we die nu kennen — als de manier om onder de te lange rekentijden uit te komen. Hij stortte zich ook op de ontwikkeling van zo’n machine, in al zijn facetten: van abstracte computerarchitectuur tot concrete invoer- en uitvoerapparatuur, en van algemene richtlijnen voor programmeren tot details over getallenrepresentatie.

Von Neumann had veel succes met al dit werk. Hij is de grondlegger van het vak numerieke stromingsleer. Numerieke weersvoorspelling is de manier van weersvoorspellen van vandaag de dag. Een gedetailleerd overzicht van Von Neumanns werk aan numerieke weersvoorspelling, aan numerieke wiskunde en informatica in het algemeen, is te vinden in [1].

Numerieke wiskunde

Met het werk van Von Neumann kwam de numerieke stromingsleer en daarmee numerieke wiskunde tot grote groei en bloei. Er kwam financiering voor onderwijs en onderzoek in de numerieke wiskunde. Wiskundig



Figuur 4 Tekening van turbulente stroming aan de voet van een waterval, Leonardo da Vinci (1508).

talent voelde zich steeds meer aangetrokken tot het vak. Allerlei elegante en krachtige numerieke algoritmen werden en worden nog steeds ontwikkeld. Numerieke wiskunde is een breed vakgebied geworden met daarbinnen allerlei specialismen.

Numerieke algoritmen speciaal ontwikkeld voor de Navier–Stokes-vergelijkingen zijn misschien wel het verst ontwikkeld van alle numerieke algoritmen. Nog steeds echter — ondanks het zeer wijdverbreide numeriek-wiskundige gebruik van de Navier–Stokes-vergelijkingen — is het niet met zekerheid bekend of er nog wel een oplossing bestaat in het limietgeval waarin roosterpuntafstanden en tijdstapgrootte naar nul gaan (de existentie-vraag).

Millenniumprobleem

Turbulentie

Oplossing van het Navier–Stokes-millenniumprobleem is niet alleen vanuit wetenschappelijk maar ook vanuit praktisch oogpunt van groot belang. Binnen de stromingsleer is bijvoorbeeld turbulentie een uitgebreid, reeds lang bestaand onderzoeksterrein. Turbulentie is het (ogenschijnlijk?) wanordelijk door elkaar heen bewegen van wervels in stromingen, wervels van allerlei lengteschalen, van groot tot zeer klein. Leonardo Da Vinci had dat al gezien, waarbij hij ook coherente structuren meende te zien in de wirwar van wervels (Figuur 4).

Turbulentie treedt op in bijna alle vloeistofstromingen, ten goede of ten kwade. Tur-

bulentie is goed bij bijvoorbeeld het roeren van melk door koffie. U maakt met een lepelje één korte beweging in uw kopje waardoor er één of twee grote wervels in de koffie ontstaan. De grote wervels vervallen snel in vele, steeds kleinere en steeds chaotischer bewegende wervels. De vele kleine wervels zorgen voor een prima menging van de melk door uw koffie; turbulentie als nuttig proces. Turbulentie treedt echter ook op in bijvoorbeeld de torusvormige vaten waarin, in een magneetveld en bij extreem hoge temperatuur een plasma van deuterium en tritium wordt opgesloten ten behoeve van de opwekking van energie uit de fusie van hun atoomkernen. Hierbij is turbulentie juist ongewenst; het deel van het plasma waarin kernfusie optreedt mag namelijk niet te veel mengen met koeler plasma; de kernfusie zou daardoor immers kunnen stilvallen.

Turbulentie is een onderzoeksonderwerp met nog veel onbeantwoorde vragen.

Existentie

Het Navier–Stokes-millenniumprobleem betreft de bewegingsvergelijkingen (7) plus massabehoudsvergelijking (8). Om stelsels partiële differentiaalvergelijkingen te kunnen oplossen moet de oplossing (of differentiaal daarvan) op het begintijdstip en op de ruimtelijke randen van het rekengebied worden voorgeschreven; er moeten begin- en randvoorwaarden worden gespecificeerd. Begin- en randvoorwaarden zijn meestal probleemspecifiek; ze beschrijven bijvoorbeeld de initiële stromingstoestand (de beginvoorwaar-

de) van de koffie in het koffiekopje van hier-voor, alsmede de geometrie van het kopje en de stromingstoestand van de koffie op de binnenkant van het kopje (de randvoorwaarden).

In de beschrijving van het Navier–Stokes-millenniumprobleem [7] zijn ook beginvoorwaarden gegeven. Deze zijn echter niet probleemspecifiek, maar zeer algemeen. Aan de beginoplossing wordt ‘slechts’ de voorwaarde opgelegd dat deze oneindig vaak differentieerbaar is. En voor wat betreft de randvoorwaarden: deze zijn er in feite niet; de randen mogen worden beschouwd als aan elkaar vastgeplakt; de rechter rand op de x -as is vastgeplakt aan de linker rand op die as, idem voor de randen op de y - en z -as: zogenaamde periodieke randvoorwaarden. Van de volumekracht tenslotte wordt geëist dat deze oneindig vaak differentieerbaar is op alle tijdstippen.

Oplossingen van het aldus gespecificeerde algemene begin-randwaardenprobleem kunnen dus in principe slechts in zeer algemene termen worden bepaald, aannemende dat er een oplossing bestaat. Dit laatste is nu een vraag in het Navier–Stokes-millenniumprobleem: heeft het hiervoor beschreven algemene begin-randwaardenprobleem geen, één, of meerdere oplossingen,

waarbij van deze oplossingen wordt geëist dat zij oneindig vaak differentieerbaar zijn en blijven, en tevens dat de totale hoeveelheid bewegingsenergie die zij bevatten begrensd is op elk tijdstip na het begintijdstip. Voor het Navier–Stokes-millenniumprobleem hoeft dus geen exacte, algemene oplossing van de Navier–Stokes-vergelijkingen te worden bepaald. ‘Slechts’ het *wel of niet bestaan* van zo’n oplossing hoeft te worden bewezen, een oplossing die voldoende differentieerbaar is en begrensd in bewegingsenergie. Voor het aantonen dat er een oplossing bestaat mag de volumekracht zelfs gelijk aan nul worden genomen; een moeilijkheid minder. Wat dit millenniumprobleem toch nog zo moeilijk blijft maken is dat er in de vergelijkingen (7) niet-lineaire termen voorkomen, termen als $u \frac{\partial u}{\partial x}$ bijvoorbeeld.

Onderzoek

In de vorige eeuw is al veel onderzoek gedaan aan de existentie van Navier–Stokes-oplossingen. Te denken valt aan het werk van Oseen [11], Leray [9], Hopf [8], Scheffer [13], en Caffarelli en collega’s [5]. Onderzoek op het snijvlak van klassieke en numerieke analyse is dat van Temam [15]. Het is precies dit overgangsgebied in de wiskunde waar mijns inziens vooruitgang is te

verwachten met betrekking tot het Navier–Stokes-millenniumprobleem. Binnen de numerieke analyse wordt onderzoek gedaan aan de existentie van numerieke oplossingen, onderzoek dat niet gericht is op het oplossen van het Navier–Stokes-millenniumprobleem, maar dat mogelijk wel van belang kan zijn daarvoor.

Behalve het prestigieuze wetenschappelijke belang van het oplossen van het Navier–Stokes-millenniumprobleem is er dus ook het minstens even grote praktische belang van het vinden van antwoorden op openstaande vragen over turbulentie. Oplossing van het Navier–Stokes-millenniumprobleem zou wel eens direct, veel voor de praktijk belangrijke turbulentievragen kunnen beantwoorden. Over turbulentie, als berucht moeilijk onderwerp, heeft iemand ooit gezegd, als variatie op wat Sir Winston Churchill ooit over een bepaalde politieke stroming heeft gezegd: ‘Als je als onderzoeker in de stromingleer voor je dertigste niet aan turbulentie hebt gewerkt, dan heb je geen hart. Als je na je dertigste echter nog aan turbulentie werkt dan heb je geen verstand.’ Veel onderzoekers zijn gelukkig nog geen dertig jaar oud. En veel senior-onderzoekers *voelen* zich nog geen dertig; wiskundeonderzoek houdt je jong. ↵

Referenties

- 1 W. Aspray, *John von Neumann and the Origins of Modern Computing*, MIT Press, 1990.
- 2 A.J.C. Barré de Saint-Venant, *Mécanique appliquée de Navier*, Paris, 1858.
- 3 A.J.C. Barré de Saint-Venant, Note à joindre au mémoire sur la dynamique des fluides, *Comptes Rendus des Scéances de l’Académie des Sciences* 17 (1843), 1240.
- 4 V. Bjerknes, Das Problem der Wettervorhersage, betrachtet von Standpunkte der Mechanik und der Physik, *Meteorologische Zeitschrift* 21 (1904), 1–7.
- 5 L. Caffarelli, R. Kohn and L. Nirenberg, Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier–Stokes equations, *Communications on Pure and Applied Mathematics* 35 (1982), 771–831.
- 6 L. Euler, Principes généraux du mouvement des fluides, *Mémoires de l’Académie des Sciences de Berlin* 11 (1755), 274–315.
- 7 C.L. Fefferman, Existence and smoothness of the Navier–Stokes equations, www.claymath.org/millennium/Navier-Stokes.Equations
- 8 E. Hopf, Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen, *Mathematische Nachrichten* 4 (1951), 213–231.
- 9 J. Leray, Sur le mouvement d’un liquide visqueux emplissant l’espace, *Acta Mathematica* 63 (1934), 193–248.
- 10 C.L.M.H. Navier, Mémoire sur les lois du mouvement des fluides, *Mémoires de l’Académie des Sciences* 6 (1822), 389–440.
- 11 G.W. Oseen, Sur les formules de Green généralisées qui se présentent dans l’hydrodynamique et sur quelques-unes de leurs applications, *Acta Mathematica* 34 (1911), 205–284.
- 12 L.F. Richardson, *Weather Prediction by Numerical Process*, Cambridge University Press, 1922.
- 13 V. Scheffer, Hausdorff measure and the Navier–Stokes equations, *Communications in Mathematical Physics* 55 (1977), 97–112.
- 14 G.G. Stokes, On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 8 (1845), 287.
- 15 R. Temam, *Navier–Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis*, American Mathematical Society, 1984.
- 16 P. Wesseling, *Principles of Computational Fluid Dynamics*, Springer, 2000.