

Chris Stolk

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
 Universiteit van Amsterdam
 c.c.stolk@uva.nl

De wiskunde van reflectieseismiek

Voor de bestudering van de aardkorst wordt veelvuldig gebruik gemaakt van reflectieseismiek. Aan het aardoppervlak worden met behulp van akoestische bronnen golven opgewekt die zich voortplanten en gereflecteerd worden in de aardbodem. Trillingen ten gevolge van de gereflecteerde golven worden aan het oppervlak gemeten en geven informatie over de bodemstructuur. Het construeren van die structuur uit de gemeten reflecties kan beschouwd worden als een *invers probleem*. Chris Stolk gaat in op de wiskundige theorie en oplossingsmethodiek van dit *inverse probleem*.

Reflectieseismiek is de belangrijkste methode in de olie- en gasindustrie om fossiele brandstoffen op te sporen in de ondergrond. Varianten van de methode worden gebruikt in bodemonderzoek voor engineering toepassingen en in de academische geofysica voor de bestudering van de aardkorst en de mantel. Reflectieseismiek werkt met akoestische (seismische) golven. Deze planten zich over grote afstanden voort in de aarde en met de informatie die ze bevatten kunnen vaak beelden met hoge resolutie worden gemaakt. De

geschiedenis van het vakgebied gaat terug tot de jaren twintig van de vorige eeuw. De eerste olievondst mogelijk gemaakt door reflectieseismiek was in 1928 in de Verenigde Staten.

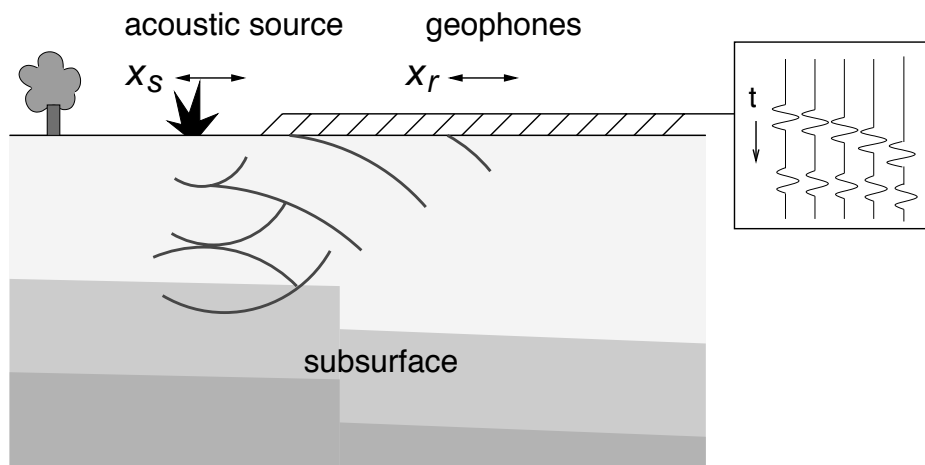
De opzet van een experiment is schematisch weergegeven in Figuur 1. Bronnen aan het aard- of zeeoppervlak genereren golven die zich in de aarde voortplanten en reflecteren. Aan het oppervlak worden de trillingen gemeten met een groot aantal speciale microfoons, geofoons of hydrofoons genaamd. Dit

experiment wordt vele malen herhaald, met bronnen op verschillende locaties.

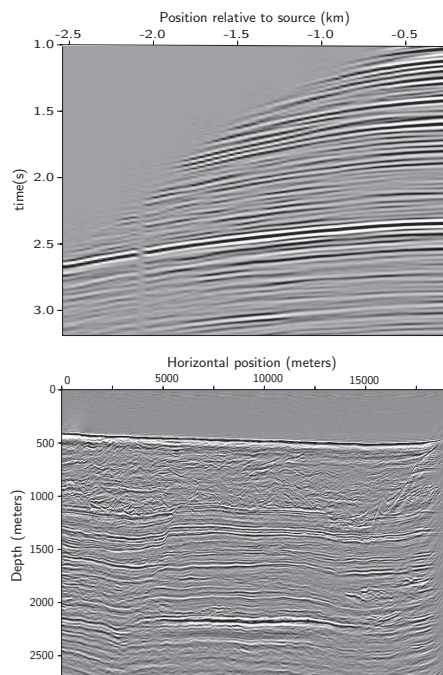
Golfvoortplanting wordt beschreven door tijdsafhankelijke partiële differentiaalvergelijkingen die lineair zijn aangezien de trillingen in de bodem een kleine uitslag hebben (behalve in de directe omgeving van de bron). De mechanische eigenschappen van het gesteente, zoals de dichtheid en compressibiliteit, vormen positieafhankelijke coëfficiënten in dit stelsel van partiële differentiaalvergelijkingen. De verwerking van reflectieseismische data kan dus worden gezien als een *invers probleem*. De data van dit inverse probleem zijn de metingen van oplossingen van partiële differentiaalvergelijkingen aan het oppervlak. De oplossing is een collectie van coëfficiëntfuncties, en de impliciete relatie tussen data en oplossing wordt gegeven door een stelsel partiële differentiaalvergelijkingen.

Een voorbeeld van seismische data en het resultaat van de dataverwerking zijn weergegeven in Figuur 2 (op de data is een filter toegepast om de gereflecteerde golven beter te laten zien). De volgende stap na de reconstructie van de coëfficiëntfuncties is seismische interpretatie, waarbij het doel is om de geologische structuur zo goed mogelijk te begrijpen.

In dit artikel bespreken we twee aspecten van het probleem. Het belangrijkste onderwerp is de wiskundige theorie voor imaging van enkelvoudig gereflecteerde golven. De theorie hiervan is grotendeels ontwikkeld in de laatste dertig jaar. Deze heeft geleid tot een veel beter begrip van (de prestaties van)



Figuur 1 Schematische weergave van een seismisch experiment op land



Figuur 2 Voorbeeld van seismische data, ingezoomd op een deel van de data van één experiment (boven); seismische afbeelding van de ondergrond ergens in de Golf van Mexico (onder). (Met dank aan The Rice Inversion Project).

de methodes, tot algoritmes om voorheen ontoegankelijke informatie uit de data te verkrijgen en tot nieuwe benaderingen van het probleem. Voordat we zover zijn, bespreken we de partiële differentiaalvergelijkingen met discontinue coëfficiënten die het voorwaartse probleem vormen. Goede referenties zijn het review artikel van Symes [14] voor de wiskundige aspecten, en boeken van Sheriff en Geldart [10] en Yilmaz [16].

Voorwaarts model

We zullen niet lang stilstaan bij de keuze van een model voor seismische golfvoortplanting, hoewel hier wel degelijk veel over te zeggen valt. Lineaire elastodynamica wordt algemeen beschouwd als een goed model. In tweede-orde-vorm zijn de vergelijkingen

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \sum_{j,k,l} \frac{\partial}{\partial x_j} (C_{ijkl} \frac{\partial}{\partial x_l} u_k) = f_i. \quad (1)$$

Hierin is $u_i(x)$ een vectorveld dat de uitwijking (richting en grootte) van het medium beschrijft, $\rho(x)$ de dichtheid, $C_{ijkl}(x)$ de elastische tensor en $f_i(x)$ een vectorveld dat de krachtverdeling beschrijft die op het medium werkt [4].

Vergelijking (1) beschrijft golfvoortplanting in vaste stoffen, en is daarmee op het eerste gezicht het meest voor de hand liggende model. In de praktijk is ook de scalaire akoesti-

sche golfvergelijking van groot belang, gegeven door

$$\frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla \cdot \frac{1}{\rho} \nabla u = g. \quad (2)$$

Hierin is $u(x)$ de akoestische druk, $\rho(x)$ de massadichtheid, $c(x)$ de golfsnelheid en $g(x)$ een combinatie van brontermen. Net als (1) wordt deze vergelijking aangevuld met geschikte begin- en randvoorwaarden. Strikt genomen beschrijft (2) de voortplanting van akoestische golven in een vloeistof en niet in een vaste stof zoals de ondergrond van de aarde. Dat deze toch wordt gebruikt, komt omdat het essentiële gedrag van voortplantende golven al bevat is in de vergelijking en deze vaak een redelijke beschrijving van de longitudinale golven in een vaste stof geeft. Vanuit het oogpunt van inversie is het een logische keuze omdat het moeilijk is om meer parameters dan de functies c en ρ bevat in (2) te reconstrueren. Voor de verdere discussie beperken we ons daarom tot de scalaire akoestische vergelijking. Voor constante ρ en c heeft (2) de bekende uitgaande golfoplossingen

$$u(x, t) = \frac{w(t - r/c)}{4\pi r}, \quad r = |x - x_s|. \quad (3)$$

Uit metingen blijkt dat de eigenschappen van het aardmateriaal sterk variëren, zowel over korte als langere lengteschalen. De cartoonachtige afbeelding in Figuur 1 is niet juist: ook binnen de afgebeelde lagen treden bijvoorbeeld veel variaties op terwijl de laagovergangen vaak veel minder duidelijk zijn. De vraag is daarom hoe de golfvergelijking geïnterpreteerd moet worden in het geval van sterk variërende, bijvoorbeeld discontinue coëfficiënten.

In de klassieke, sterke formulering zijn beide kanten van de partiële differentiaalvergelijking continue functies, en geldt de vergelijking voor alle (x, t) in het domein, noem dit $\Omega \times [0, T]$ met $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Dit is niet mogelijk met discontinue coëfficiënten. De oplossing is om de vergelijking in de *zwakke vorm* te schrijven. We eisen dat

$$\iint \left[\frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla \cdot \frac{1}{\rho} \nabla u - g \right] \cdot v(x, t) dx dt = 0 \quad (4)$$

voor alle $v \in C_0^\infty(\Omega \times [0, T])$. Na partiële integratie wordt dit

$$\iint \left[\frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) - \frac{1}{\rho} \nabla v \cdot \nabla u + gv \right] dx dt = 0, \quad (5)$$

voor alle v in $C_0^\infty(\Omega \times [0, T])$. Deze vergelijking heeft zin als $u, \nabla u, \frac{\partial u}{\partial t}$ en g kwadratisch integreerbaar zijn, en ρ en c meetbaar en begrensd. Voor ρ en c eisen we bovendien dat ze van 0 weg begrensd zijn, dus

$$\rho, c \in L^\infty(\Omega), \quad 0 < \alpha < \rho(x) < \beta \quad (6)$$

en $0 < \alpha < c(x) < \beta$.

De goedgesteldheid van het probleem is behandeld in [7], met verdere ontwikkelingen in [3, 11], met als resultaten onder andere:

- Existentie en eenduidigheid van oplossingen en continue afhankelijkheid van de coëfficiënten.
- Differentieerbare afhankelijkheid van de coëfficiënten met een verlies van Sobolev-regulariteit van een orde. Deze informatie is van belang voor de keuze van optimalisatiemethodes in het inverse probleem.

Het hierboven geschetste kader is nog niet direct toepasbaar. We nemen namelijk aan dat de bron g van de vorm

$$g(x, t) = \delta(x - x_s)w(t) \quad (7)$$

is, waarin δ de Dirac-deltafunctie is, x_s de positie van de bron en $w(t)$ een korte, smalle puls, zonder zeer lage frequenties. Dit is geen kwadratisch integreerbare functie. Ook geldt dat de oplossingen bevat zijn in ruimtes van kwadratisch integreerbare functies en dus niet zonder meer continu zijn in x , wat nodig is om puntmetingen te doen. Met de extra aanname dat c en ρ extra regulariteit hebben rond de positie van de bron en de ontvangers, bijvoorbeeld lokaal constant zijn, kan ook dit geval worden behandeld [14].

De verzameling van paren van bron- en ontvangerposities (x_s, x_r) waarvoor metingen worden gedaan, noteren we met Y . Deze liggen aan het oppervlak, zodat $Y \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Metingen worden gedaan gedurende een tijdsinterval $[0, T]$. De *voorwaartse afbeelding* is dan de afbeelding van de functies c en ρ naar de waarden van de oplossing u van (2) in de meetpunten, genoteerd met

$$\mathcal{F}[c, \rho](x_r, t; x_s) = u(x_r, t; x_s), \quad (8)$$

$(x_r, x_s) \in Y, \quad 0 \leq t \leq T$.

Lineaire inverse verstrooiing

De huidige techniek van imaging van seismische data is bijna uitsluitend gebaseerd op het gebruik van de linearisatie van de operator \mathcal{F} in c . Een fysische omschrijving is dat gebruik gemaakt wordt van enkelvoudig gereflecteerde golven. De betekenis van ‘enkelvoudig gereflecteerd’ is in dit geval echter niet zo duidelijk: We kennen allemaal het principe van reflectie van licht in bijvoorbeeld een ruit. Daarbij is het duidelijk wat de gereflecteerde golf is, en dat de reflectie precies aan de overgang tussen lucht en glas optreedt. In een variabel medium kunnen reflectie en refractie echter overal optreden.

Zoals gezegd lineariseren we \mathcal{F} in c , waarbij we aannemen dat ρ een gegeven constante is. Dat betekent dat we een kleine verstoring $\delta c(x)$ toevoegen aan de snelheid $c(x)$, en vervolgens een vergelijking voor de resulterende verstoring δu van u afleiden. Het blijkt eenvoudig te zijn om te werken met de relatieve verstoring $r = \delta c/c$, het achtergrondmodel c noteren we ook wel met v . Dit resulteert in de volgende vergelijking voor de perturbatie δu :

$$\left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) \delta u = \frac{2r}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (9)$$

$$\delta u = 0 \quad \text{voor } t < 0.$$

Deze vergelijking is lineair in r en de gelineariseerde voorwaartse afbeelding wordt gedefinieerd door

$$F[v]r = \delta u|_{Y \times [0, T]}. \quad (10)$$

De reconstructie van r gegeven δu wordt het gelineariseerde inverse probleem genoemd. Daarbij is de functie v , het zogenaamde snelheidsmodel, gegeven. Uiteindelijk moet ook v bepaald worden. Ook wordt ervan uitgegaan dat u en δu kunnen worden gescheiden in de gemeten data. In de praktijk zijn de niet-gereflecteerde golven te herkennen aan de hoek waaronder ze aankomen aan het oppervlak en aan de aankomsttijd.

Een belangrijke aanname in het model (9) is dat v en r verschillende delen van het snelheidsveld c beschrijven: v is een gladde functie en bevat alleen laag-frequente componenten, en r bevat alleen hoog-frequente, oscillerende componenten (scheiding van schalen). Met de scheiding van schalen geeft de linearisatie een beschrijving van de data die opvallend veel beter is dan wanneer r ook een laag-frequent deel heeft, zo blijkt uit numerieke berekeningen [14].

Vergelijking (9) voor δu kunnen we interpreteren met het principe van Huygens. Aan de rechterkant staat een bronterm die het product van r en $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ bevat. Een bron van golven ontstaat dus voor (x, t) waar r en $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ allebei ‘groot’ zijn. Dit is in overeenstemming met het principe van Huygens, dat zegt dat een secundaire bron van golven ontstaat wanneer het golfvront u een reflector bereikt. (Inderdaad is $r(x)$ groot waar de variatie in het medium groot is en het is bekend dat met name daar de reflecties optreden.)

Wiskundigen legden de link tussen seismische imaging algoritmes en het gelineariseerde inverse probleem eind jaren zeventig en in de jaren tachtig. Een belangrijk artikel was dat van G. Beylkin [1], met bijdragen op twee vlakken:

- De precisering in welke zin een inverse afbeelding van F wordt geconstrueerd, gegeven het feit dat het geen exacte inverse is.
- De constructie van een dergelijke inverse in de vorm van een gegeneraliseerde Radon-transformatie.

Het blijkt dat de geconstrueerde inverse een reconstructie geeft van de *discontinuïteiten* in r .

We geven de belangrijkste ingrediënten van dit resultaat. De afleiding van de voorwaartse afbeelding maakt gebruik van de *functie van Green*, de oplossing $G(x, t; x_s)$ van

$$\left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) G(x, t; x_s) = \delta(t) \delta(x - x_s). \quad (11)$$

Met een geometrische optica-aanname geldt

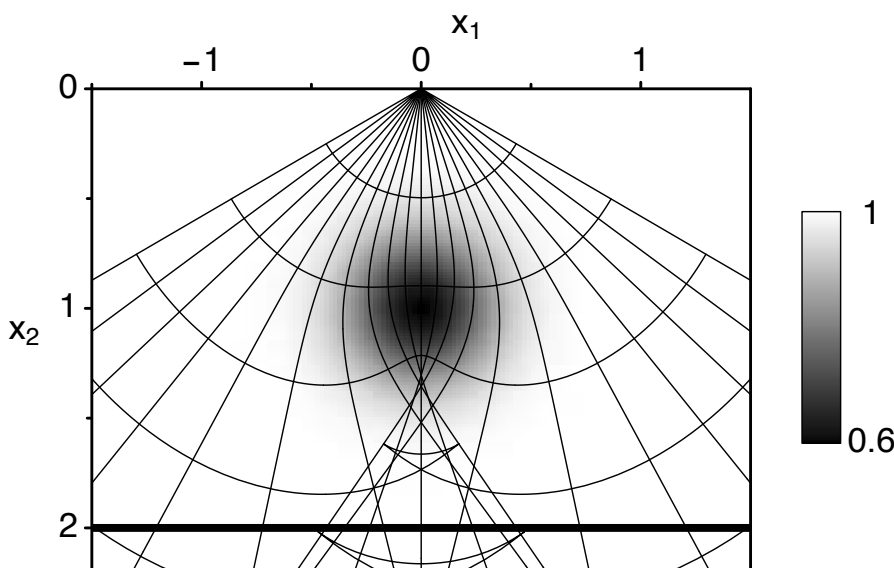
$$G(x, t; x_s) \approx a(x; x_s) \delta(t - \tau(x, x_s)). \quad (12)$$

Hierin is $\tau(x, x_s)$ de reistijd functie. Voor constante v wordt deze gegeven door $\frac{|x-x_s|}{v}$, in het algemene geval door een oplossing van de eikonaalvergelijking. De amplitude a voldoet aan de zogenaamde transportvergelijking. Beide zijn gladde functies weg van x_s en kunnen op diverse manieren numeriek worden bepaald. Het symbool \approx in (12) betekent ‘modulo een gladdere fout’ en de vergelijking is geldig voor kleine tijd, waarbij de aanname is dat er voor elk paar (x, x_s) er precies één ‘lichtstraal’ is die de twee punten verbindt. De situatie dat de gekromde stralen focuseren, en dat meerdere golfvronten ontstaan, zie Figuur 3, wordt daarmee uitgesloten.

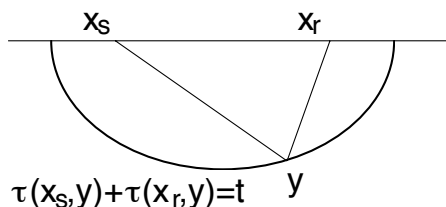
Gebruikmakend van (12) vinden we

$$F[v]r(x, t; x_s) \approx \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int dx \frac{2r(x)}{v(x)^2} a(x, x_r) a(x, x_s) \cdot \delta(t - \tau(x, x_r) - \tau(x, x_s)). \quad (13)$$

Dit is de zogenaamde gegeneraliseerde Radon-transformatie: een integraal over gekromde oppervlakken (of tweedimensionale krommes) gegeven door de vergelijking $\tau(x, x_r) + \tau(x, x_s) = t$, de zogenaamde isochronen, zie Figuur 4.



Figuur 3 Lichtstralen uit de oorsprong in een medium met een lage-snelheidszone rond (0, 1). Buiging van de stralen leidt tot focuseren van de stralen rond (0, 1.3) en tot meerdere golfvronten daaronder. Hiermee wordt de geometrische optica-aanname geschonden.



Figuur 4 Isochronen: Integratie-oppervlakken in de gegeneraliseerde Radon-transformatie.

In [1] werd een inverse van (13) gegeven. De precieze beschrijving in welke zin de geconstrueerde operator een inverse is, vereist kennis van de *microlokale analyse*, een verzameling technieken die voortbouwt op distributietheorie en wordt gebruikt in de studie van lineaire partiële differentiaaloperatoren [5–6]. Belangrijk hierbij is dat singulariteiten een positie en een richting hebben. Voor een discontinuïteit die optreedt langs een oppervlak wordt de ermee geassocieerde richting gegeven door de normaal op het oppervlak. In het algemeen kan deze bepaald worden door te bestuderen in welke richtingen de Fourier-getransformeerde al dan niet snel afneemt. Voor een distributie u wordt de verzameling van paren (positie, richting) in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ waar singulariteiten optreden, de golffrontverzameling $WF(u)$ genoemd.

Singulariteiten in r leiden tot singuliere bijdrages in het gereflecteerde golfveld δu . Echter, niet alle gereflecteerde golven worden waargenomen aan het oppervlak. Alleen het deel van de singulariteiten in r waarvan de reflecties worden waargenomen, kan worden gereconstrueerd. Dit leidt tot een *microlokale*

reconstructie. Zij Γ de verzameling van singulariteiten die we op grond hiervan kunnen reconstrueren. Beylkin liet zien dat er een functie $b(x_r, t; x_s)$ is zo dat

$$F[v]^\dagger d(x) = \iiint dx_r dt b(x_r, t; x_s) \cdot \delta(t - \tau(x, x_s) - \tau(x, x_r)) d(x_r, t; x_s) \quad (14)$$

geeft dat

$$F[v]^\dagger F[v]r \simeq r \quad (15)$$

als $WF(r)$ bevat is in Γ .

Het bovenstaande resultaat betreft imaging algoritmes die gebruik maken van de gegeneraliseerde Radon-transformatie in de situatie dat $\dim Y = 2$, en heeft als beperking de aanname bij formule (12). In een groot aantal artikelen is het gebruik van gelineariseerde inversie verder onderzocht. Dat betrof bijvoorbeeld inversie op basis van het elastische model, situaties met minder sterke aannames op de stralen, met andere bronontvangerverzamelingen ($\dim Y = 3$ of 4), en over speciale imaging algoritmes die bijvoorbeeld hoekafhankelijke reflectiecoëfficiënten proberen te reconstrueren, zie bijvoorbeeld [2, 9] en verder de referenties in [14].

Slotopmerkingen

We sluiten af met een korte discussie van twee aspecten die nog weinig aan bod zijn gekomen: De bepaling van v en niet-lineaire

kleinste-kwadrate inversie. In de laatste methode is het doel om de coëfficiënten zo te kiezen dat het verschil tussen gemodelleerde data en gemeten data minimaal wordt in de L^2 -norm [15]. Gezien de hoge dimensies van de ruimtes van data en modelparameters is dit een kostbare methode. Echter, het grootste probleem is dat het minimum niet makkelijk te vinden is omdat de functie die geminimaliseerd moet worden veel lokale minima heeft, zie [8] voor een benadering die dit probleem soms oplost.

Voor de bepaling van het snelheidsmodel zijn met name de aankomsttijden van de gereflecteerde golven van belang. Een discontinuïteit in het medium kan vaak worden waargenomen vanuit meerdere bronontvangercombinaties, deze redundantie maakt het mogelijk om v te reconstrueren. Voor gelaagde media kan de zogenaamde Dix-formule worden gebruikt, in het algemeen is dit een interactief proces waarbij verschillende methodes in combinatie gebruikt worden. *Differential semblance optimization* (DSO) is een geautomatiseerde methode hiervoor. Het sterke punt hiervan is dat de te minimaliseren functie zich veel beter gedraagt dan in kleinste-kwadrate inversie. Naar deze methode, bedacht door W.W. Symes, is daarom veel onderzoek verricht. De methode lijkt echter gehinderd te worden door de linearisatiefout. De vraag is daarom of er methodes zijn die het grote aantrekkingsgebied van DSO behouden en ook de niet-lineaire effecten aankunnen, zie [12–13].

Referenties

- 1 G. Beylkin, Imaging of discontinuities in the inverse scattering problem by inversion of a causal generalized Radon transform, *J. Math. Phys.* 26(1) (1985), 99–108.
- 2 G. Beylkin en R. Burrige, Linearized inverse scattering problems in acoustics and elasticity, *Wave Motion* 12(1) (1990), 15–52.
- 3 K. D. Blazek, C. C. Stolk en W. W. Symes, A mathematical framework for inverse wave problems in heterogeneous media, *Inverse Problems* 29(6) (2013), 065001.
- 4 C.H. Chapman, *Fundamentals of seismic wave propagation*, Cambridge University Press, UK, New York, 2004.
- 5 J.J. Duistermaat, *Fourier integral operators*, Progress in Mathematics 130, Birkhäuser, Boston, MA, 1996.
- 6 L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators. Vol. I-IV*, Springer, Berlin, 1983.
- 7 J.-L. Lions en E. Magenes, *Non-homogeneous boundary value problems and applications. Vol. I*, Springer, New York, 1972. Translated from the French by P. Kenneth, *Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, Band 181.
- 8 R. Pratt, Seismic waveform inversion in the frequency domain, Part 1: Theory and verification in a physical scale model, *Geophysics* 64(3) (1999), 888–901.
- 9 Rakesh, A linearised inverse problem for the wave equation, *Comm. Partial Differential Equations* 13(5) (1988), 573–601.
- 10 R.E. Sheriff en L.P. Geldart, *Exploration Seismology*, Cambridge University Press, second edition, 1995.
- 11 C.C. Stolk, On the modeling and inversion of seismic data, *Utrecht University*, PhD thesis, December 2000.
- 12 C.C. Stolk en W.W. Symes, Smooth objective functionals for seismic velocity inversion, *Inverse Problems* 19(1) (2003), 73–89.
- 13 W.W. Symes, Migration velocity analysis and waveform inversion, *Geophys. Prospect.* 56 (2008), 654–663.
- 14 W.W. Symes, The seismic reflection inverse problem, *Inverse Problems* 25(12) (2009), 123008, 39.
- 15 A. Tarantola, *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 2005.
- 16 O. Yilmaz, *Seismic Data Analysis: Processing, Inversion, And Interpretation Of Seismic Data*, Society of Exploration Geophysicists, 2001.