

Philippe Cara

Vakgroep Wiskunde

Vrije Universiteit Brussel, België

pcara@vub.ac.be

Boekbespreking

Papiervouwen: leuk, mooi en wiskundig interessant

Vijf recente boeken over origami belichten vele facetten van deze hobby die de laatste jaren weer in opmars is en sterk verbonden blijkt met wiskunde. Philippe Cara, docent wiskunde aan de Vrije Universiteit Brussel en liefhebber van origami, beschrijft wat deze vijf boeken te bieden hebben.

De kunst van het papiervouwen of *origami* is ongeveer zo oud als het papier. Het ontstaan van origami situeert zich dan ook omstreeks het jaar 100 in China. Door Chinese monniken werd de kunst dan geëxporteerd naar Japan waar deze een eerste bloei kende in de zesde eeuw. In de twaalfde eeuw begonnen ook Europeanen papier te vouwen en in 1797 verscheint het eerste boek met *vouwpatronen*. De naam 'origami' verschijnt in 1880 en is Japans voor papier(kami)-plooi(en) (oru). Een laatste belangrijk moment is 1935, het jaar waarin Yoshizawa een standaard invoert voor het noteren van vouwpatronen. Sindsdien verschijnen er talrijke boeken met uitleg voor het vervaardigen van allerlei kunstwerkjes met papier. Deze notatie wordt vandaag de dag nog gebruikt en wordt in vier van de vijf boeken in deze recensie herhaald.

Origami en wiskunde

Het is duidelijk dat origami nauw verbonden is met meetkunde en symmetrie. Een blad in tweeën vouwen zorgt voor een spiegel, een vouw loodrecht op een andere maken is kinderspel, et cetera. Daarom hebben vouwkunstenaars een bijna gedwongen interesse voor wiskunde. Als je bijvoor-

beeld een regelmatige vijfhoek wil vouwen, ga je op zoek naar een plooi techniek die een hoek van 72° oplevert. Of een goede benadering ervan... Het is namelijk zo dat exacte constructies soms ingewikkeld zijn, terwijl er (veel) eenvoudiger een benadering kan gevouwen worden die met het blote oog toch niet te onderscheiden is van de juiste versie. In [5] vinden we bijvoorbeeld een vouwalgoritme voor een 'regelmatige' vijfhoek waarbij de hoek tussen twee hoekpunten eigenlijk $71,57^\circ$ bedraagt. De juiste waarde achterhalen van een zekere hoek of bewijzen dat een vouwconstructie exact is, komt dikwijls neer op een pittige oefening in vlakke meetkunde. In [5] en [4] vind je tal van zulke oefeningen (met uitgewerkte oplossingen voor iets meer dan de helft ervan).

Wiskunde en origami

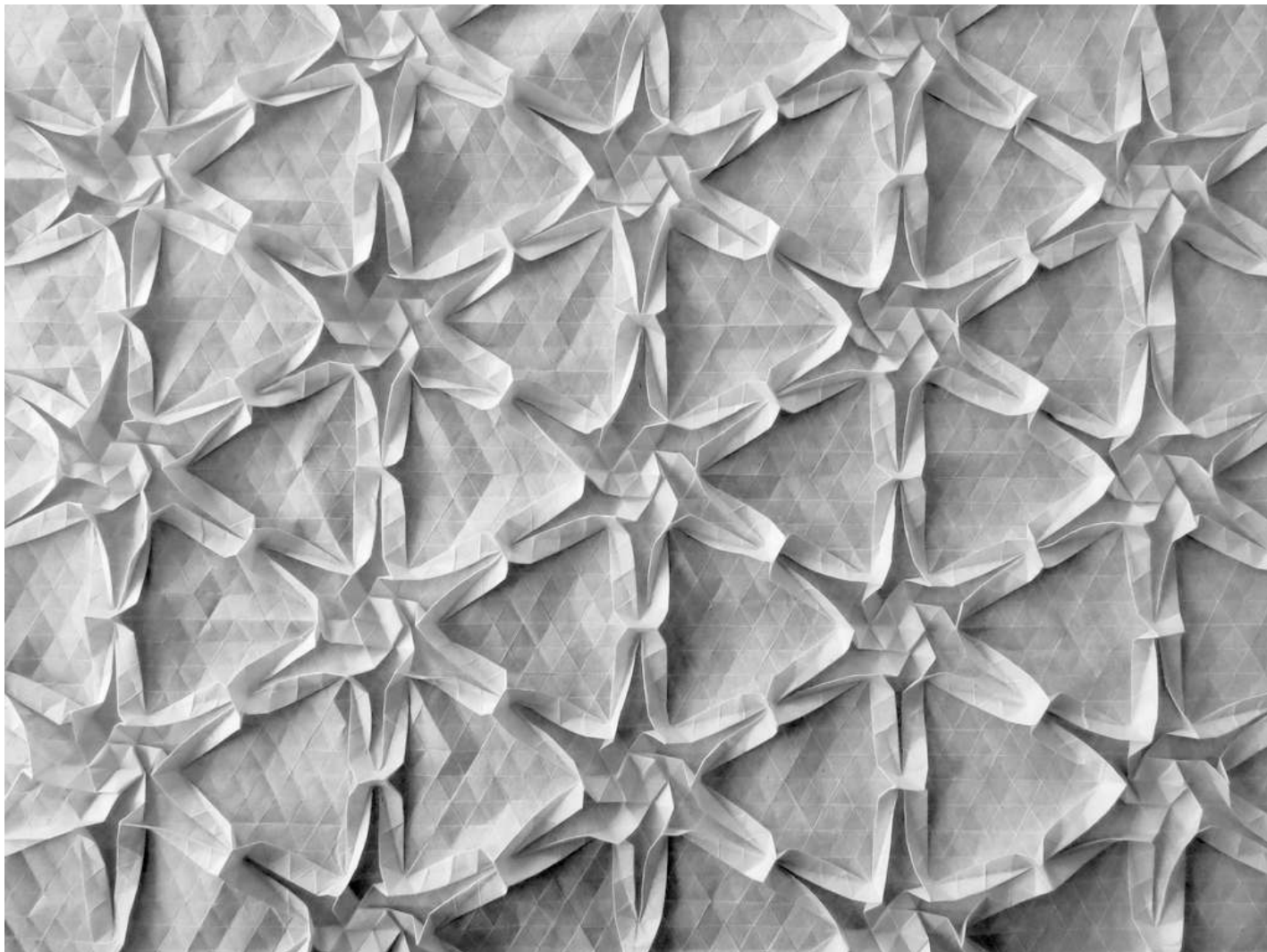
Het is helemaal niet verwonderlijk dat wiskunde zeer toepasbaar is bij het papiervouwen. Je kan dus origami zien als een van de vele toepassingsgebieden van onze lievelingswetenschap. De hedendaagse geschiedenis van het papiervouwen toont dat het ook omgekeerd kan. Vanaf de jaren '60 en waarschijnlijk onder invloed van het werk van Harold Coxeter (1907–2003, blies de klassieke meet-

kunde nieuw leven in en gebruikte graag modellen van allerlei polyeders) liet de origami-kunst zich veel inspireren door de symmetrie en schoonheid van de wiskunde.

Op onderwijskundig gebied werd ook duidelijk dat papiervouwen helpt bij het verwerven van meetkundig inzicht en toelaat om op goedkope manier zeer nuttige modellen te maken van (bijvoorbeeld) ruimtelichamen. Hier ontstaat ook zogenaamde *modulaire*



Figuur 1 Enkele modules die samengevoegd worden tot twee verweven kubussen.



Figuur 2 Een betegeling met driehoeken die verfraaid werd met reliëf.

origami. Door de regelmaat van vele ruimtefiguren kunnen ze meestal opgebouwd worden door het samenvoegen van verschillende identieke onderdelen of *modules*. De vijf platonische lichamen bijvoorbeeld kunnen opgebouwd worden uit evenlange stokjes die overeenkomen met de ribben, of uit identieke regelmatige veelhoeken die je gebruikt als zijvlakken, of identieke stervormige modules voor de hoekpunten (of toppen). Er bestaan ondertussen heel veel modules waarvan je dan vele identieke exemplaren moet vouwen. De modules zijn zo gemaakt dat ze in elkaar geschoven kunnen worden. Op die manier bouw je dan een polyeder of een ander figuur dat hiervan is afgeleid. In [5] wordt creatief omgegaan met de kleur van verschillende modules of worden modules voorzien van allerlei versieringen zodat je mooie sferische kunstwerken krijgt. Je kan ook verschillende (maar gelijkvormige) polyeders met elkaar verweven om meer complexe constructies te maken.

Betegelingen

Regelmatige vlakvullingen of *betegelingen* wekken veel fascinatie op. Hun symmetrie heeft vele kunstenaars zoals Maurits Escher (1898–1972) weten te inspireren. Boek [1] presenteert zeer artistieke *origamibetegelingen*. Een blad papier wordt zo gevouwen dat er een regelmatig rooster ontstaat. Verder in het boek leer je hoe je op deze roosters reliëf kan aanbrenge.

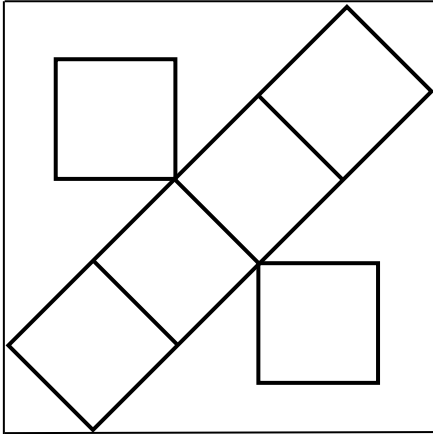
Door gebruik van speciaal papier kan je nog meer fraaie effecten krijgen. De auteur van het boek heeft een website met vouwschema's en vele foto's: www.origamitessellations.com.

Uit één blad papier

John Montroll (www.johnmontroll.com) is zeer bekend in het origamiwereldje. Hij schreef tal van boeken over papiervouwen voor jong en oud. Zijn boek [3] behandelt het vouwen van veelvlakken uit *één enkel blad papier*. Montroll gaat hier echt wiskundig te

werk en start met een overzicht van enkele families veelvlakken zoals de Archimedische, de prisma's, piramides, et cetera. Zijn aandacht gaat ook naar het efficiënt gebruik van papier. Voor een gegeven polyeder zoekt hij een ontvouwing die zó op een vierkant blad papier past dat de verhouding tussen de lengte van een ribbe van de polyeder en de zijde van het blad maximaal wordt. Voor het handig vouwen is de symmetrie van de ontvouwing dan weer van belang.

Voor het ontwikkelen van een vouwpatroon bepaalt Montroll op algebraïsche wijze de cruciale punten (of *landmarks*) van een constructie. Voor die punten wordt dan een zo eenvoudig en zo precies mogelijke vouwconstructie ontworpen. Hierbij wordt gebruik gemaakt van Robert J. Langs *Reference Finder* (<http://www.langorigami.com/referencefinder.htm>). Dit is een computerprogramma dat origamiconstructies oplevert voor ingegeven punten. Wie een idee wil krijgen van de wiskunde achter zulke software, kan nog eens



Figuur 3 Een ontvouwing van de kubus die optimaal is volgens de criteria van Montroll. De verhouding tussen de lengtes van de ribbe van de kubus en de zijde van het papier bedraagt hier $\sqrt{2}/5$.

de constructie nalezen voor breuken van de vorm $\frac{m}{2^n}$ in [6].

Er worden ook methodes ontwikkeld voor het vouwen van hoeken en bepaalde verhoudingen zoals de beroemde *gouden snede*. Hiermee worden dan eerst vlakke veelhoeken gemaakt. Dan gaat men naar drie dimensies en worden ook kleurpatronen bestudeerd. Vele origamikunstwerken maken gebruik van zogenaamd *kami papier* waarvan een zijde wit is en de achterkant gekleurd. Tenslotte worden 'gedeelte' varianten gemaakt die toelaten om veelvlakken artistiek te stapelen.

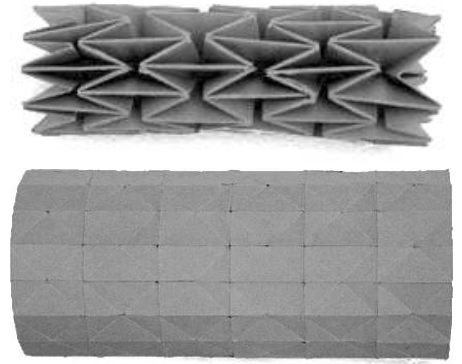
De modellen krijgen elk een moeilijkheidsgraad toegekend met stersymbolen. Een van de moeilijkste modellen is de dodecaëder die

in 59 niet-triviale stappen uit één blaadje papier kan gevouwen worden.

Meer wiskunde

Wie echt de smaak te pakken heeft, kan verder dan het plooiën gaan en de wiskunde erachter gaan ontrafelen. Meetkunde, getaltheorie en algebra zijn de meest gebruikte takken bij origami. Een goede bron aan informatie is [2]. Het zijn de verhandelingen van de *4th International Meeting of Origami, Science, Mathematics and Education*. Je krijgt hier op 550 bladzijden 45 artikelen over verschillende aspecten van origami. Het boek is opgedeeld in vijf hoofdthema's. Een eerste thema illustreert het duidelijk verband met kunst. Hierin vind je onder andere een artikel over *curvigami*, waarbij de vouwen niet meer recht zijn maar gekromd. Er wordt ook een zeer veelzijdige familie van modules beschreven. In een tweede hoofdstuk wordt het nut van origami beschreven voor verschillende technologieën zoals het vouwen van airbags of de verwijding van aders.

Een groot deel van dit boek valt onder de noemer *computational origami*. Dit gaat bijvoorbeeld over algoritmes om vouwpatronen te vinden of het onderzoeken van de stijfheid van een model. Er is ook een artikel over eGami, een virtuele papiervouwer op computer. Het vierde hoofdstuk bevat negen artikelen over de wiskunde van het papiervouwen. De onderwerpen variëren van axiomatiek van origami over het tellen van kleuringen



Figuur 4 Een opgevouwen buisje kan in een ader gebracht worden en dan magnetisch ontplooid worden.

tot algebraïsche constructies. Het boek eindigt met artikelen over het nut van origami in het onderwijs. Papiervouwen is inderdaad een bezigheid die creativiteit, behendigheid en ruimtelijk inzicht stimuleert.

Conclusie

We hebben hier een vijftal boeken over origami naast elkaar gelegd. Er is voor elk wat wils. Esthetische aspecten komen ruim aan bod maar de rode draad is hier duidelijk de wiskunde, die in [3] en [2] toch prominent aanwezig is. De kwaliteit van elk van deze boeken ligt zeer hoog en naargelang je interesse of origaminiveau ga je het ene liever lezen dan het andere.

In elk geval blijft papiervouwen een leuke ontspanning die de wiskundeknobbels blijft stimuleren. ←



Van links naar rechts de besproken boeken [1], [2], [3], [4] en [5].

Referenties

- 1 Eric Gjerde, *Origami tessellations: awe-inspiring geometric designs*, A.K. Peters, 2009.
- 2 Robert J. Lang (ed.), *Origami 4: Fourth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education*, A.K. Peters, 2009.
- 3 John Montroll, *Origami Polyhedra Design*, A.K. Peters, 2009.
- 4 Meenakshi Mukerji, *Ornamental Origami: Exploring 3D Geometric Designs*, A.K. Peters, 2008.
- 5 Meenakshi Mukerji, *Origami Inspirations*, A.K. Peters, 2010.
- 6 Rob van Oord, 17de Nationale Wiskunde Dagen: Tijdloos en cultuuroverstijgend, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/12(2) 2011, pp. 127–128.