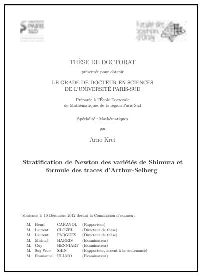
In de verdediging

| In defence


THÈSE DE DOCTORAT

présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD

Préparée à l'École Doctorale
de Mathématiques de la région Paris-Sud

Spécialité : Mathématiques

par

Arno Kret

Stratification de Newton des variétés de Shimura et formule des traces d'Arthur-Selberg

Soutenue le 10 Décembre 2012 devant la Commission d'examen :

M.	Henri	CARAYOL	(Rapporteur)
M.	Laurent	CLOZEL	(Directeur de thèse)
M.	Laurent	FARGUES	(Directeur de thèse)
M.	Michael	HARRIS	(Examinateur)
M.	Guy	HENNIART	(Examinateur)
M.	Sug Woo	SHIN	(Rapporteur, absent à la soutenance)
M.	Emmanuel	ULLMO	(Examinateur)

Stratification de Newton des variétés de Shimura et formule des traces d'Arthur–Selberg

Arno Kret

Na zijn bachelor wiskunde in Leiden vertrok Arno Kret in het kader van het ALGANT-programma naar Parijs om aldaar aan de Université Paris-Sud, Orsay, een jaar van zijn masteropleiding te doen. Hij keerde terug naar Leiden voor zijn masterscriptie bij Bas Edixhoven en ging vervolgens weer naar Orsay om er promotieonderzoek te gaan doen. Onder begeleiding van promotoren Laurent Clozel en Laurent Fargues schreef hij het proefschrift *Stratification de Newton des variétés de Shimura et formule des traces d'Arthur–Selberg* waarop hij op 10 december 2012 promoveerde.

Dat zijn onderzoek in Frankrijk plaatsvond, maakte voor Kret eigenlijk niet zoveel uit. Hij houdt simpelweg van wiskunde, van nieuwe dingen leren en onderzoek doen. Hij vindt het het leukste om in de bibliotheek te zitten met niks anders aan zijn hoofd en gewoon rustig wiskunde te doen.

Algebraïsche variëteiten

Algebraïsche variëteiten zijn het fundamentele studieobject in de algebraïsche meetkunde. Het zijn meetkundige objecten die corresponderen met oplossingen van stelsels van veeltermvergelijkingen. Voorbeelden zijn algebraïsche krommen in een vlak, zoals lijnen, cirkels, parabolen of lemniscaten. Een punt (x, y) in het vlak behoort tot een algebraïsche kromme, als zijn coördinaten voldoen aan de bijbehorende gegeven veeltermvergelijking $F(x, y) = 0$.

De oplossingsverzameling van een gegeven stelsel van veeltermen wordt sterk beïnvloed door het getallenlichaam waarin oplossingen worden gezocht. Dit is al duidelijk bij een polynoom in één variabele: de vergelijking $x^2 - 2 = 0$ heeft twee oplossingen $x \in \mathbb{R}$, maar geen enkele in het lichaam $\mathbb{Q}$. Evenzo is voor twee variabelen de oplossingsverzameling van $x^2 + y^2 + 1 = 0$ leeg als x en y reëel worden verondersteld, maar is het een 'complexe cirkel' als $x, y \in \mathbb{C}$.

Shimura-variëteiten

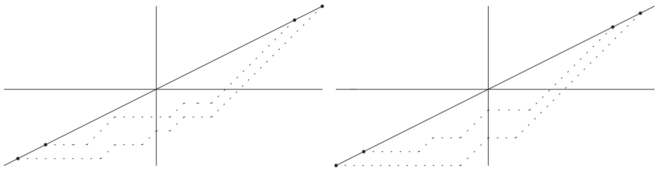
Het proefschrift van Kret gaat over zogenaamde Shimura-variëteiten. Shimura-variëteiten verkrijg je door (onder bepaalde axioma's) het quotiënt te nemen van een symmetrisch Hermitisch domein voor de actie van een congruentie-ondergroep van een rationale reductieve groep. Een standaard voorbeeld zijn de modulaire krommen; in dit geval werkt de algebraïsche groep GL_2 op het complexe dubbel bovenhalfvlak $\mathfrak{h}^{\pm} = \{z \in \mathbb{C} | \Im(z) \neq 0\}$ via de formule

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z := \frac{az+b}{cz+d}$$

voor alle $z \in \mathfrak{h}^{\pm}$ en alle matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht. Heeft u tips voor deze rubriek of bent u zelf pas gepromoveerd? Laat het weten aan onze redacteur.

Redacteur: Geertje Hek
la Voie-du-Coin 7
1218 Grand-Saconnex
Zwitserland
verdediging@nieuwarchief.nl



Een typisch voorbeeld van een congruentie ondergroep is de groep

$$\Gamma := \left\{ g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) | g \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \text{ modulo } N \right\},$$

voor N een positief geheel getal. De quotiëntruimte $Y_1(N) := \Gamma \backslash \mathfrak{h}^{\pm}$ is een modulaire kromme.

Kret bestudeerde gladde Shimura-variëteiten van PEL-type, gereduceerd modulo priemgetallen. ‘Glad’ wil zeggen dat de variëteiten geen singulariteiten hebben, en variëteiten van PEL-type zijn moduliruimten van abelse variëteiten met extra *Polarization, Endomorphism and Level*-structuren. Dit betekent dat de Shimura-variëteit alle mogelijke isomorfieklassen van de abelse variëteiten parametriseert: voor ieder punt op de Shimura-variëteit is er een abelse variëteit met extra PEL-structuren, en voor iedere abelse variëteit met extra PEL-structuren is er een punt op de Shimura-variëteit. Punten vinden op de Shimura-variëteit betekent dus meetkundig gezien existentieproblemen oplossen. Kret legt uit: “Je hebt het over vragen als ‘Bestaat een abelse variëteit met deze en deze eigenschappen wel of niet over een gegeven eindig lichaam?’ En moeilijker: ‘Hoeveel abelse variëteiten (met bepaalde eigenschappen) bestaan er over een eindig lichaam?’ ”

Een andere belangrijke reden om Shimura-variëteiten te onderzoeken zijn de toepassingen in de getaltheorie. Op dit moment wordt er heel veel onderzoek gedaan naar de Langlands-vermoedens, die de getaltheorie en de representatietheorie van bepaalde groepen met elkaar verbinden. De vermoedens zijn op het moment nog grotendeels open, maar recentelijk zijn er veel deelresultaten gevonden, en dit is waar Shimura-variëteiten belangrijk worden. Alle huidige bewijzen gebruiken de cohomologie van Shimura-variëteiten op een essentiële manier. De cohomologie van Shimura-variëteiten blijkt namelijk een groot deel van de Langlands-correspondenties te realiseren.

Newton-strata

Aan elke abelse variëteit A kan je zijn p-deelbare groep met PEL-structuur toekennen, en vervolgens de isogenieklasse daarvan. Preciezer, de p-deelbare groep $A[p^\infty]$ van A is de datum bestaande uit, voor elke n, de p^n-torsie-ondergroep van A. De p-deelbare groep ‘ziet’ dus alle p-machttorsies van de abelse variëteit. In karakteristiek p is de p-deelbare groep van een abelse variëteit interessant omdat het *niet* glad is; als variëteit is $A[p^\infty]$ zeer singulier. Dit in tegenstelling tot de priemgetallen l verschillend van p: Voor $l \neq p$ is de l-deelbare groep $A[l^\infty]$ wel altijd glad. Twee p-deelbare groepen zijn *isogeen* als er een surjectie met eindige kern tussen de twee groepen bestaat.

De loci op de Shimura-variëteit waar de isogenieklasse constant is, zijn de Newton-strata. De modulaire kromme heeft bijvoorbeeld twee strata, omdat er twee mogelijkheden zijn voor de (isogenieklasse van de) p-deelbare groep van een elliptische kromme (ordinair en supersingulier).

Voor hogerdimensionale Shimura-variëteiten is het een probleem om te bepalen welke isogenieklassen er precies voorkomen. Dit probleem is opgelost door Wedhorn en Viehmann. In zijn proefschrift bestudeert Kret de Newton-strata en geeft hij een nieuw bewijs voor een belangrijk geval van de stelling van Wedhorn en Viehmann. Zijn methode is compleet anders dan die van Wedhorn en Viehmann, omdat hij de spoorformule van Arthur–Selberg en automorfe vormen gebruikt. Die nieuwe methode vindt Kret het belangrijkste aan zijn proefschrift: “Het wonderlijke aan de methode is dat je analyse gebruikt om eigenschappen van variëteiten modulo priemgetallen af te leiden.” Kret heeft ook resultaten bewezen die precieze formules geven voor het aantal punten in specifieke Newton-strata in bepaalde Shimura-variëteiten.

Blijdschap en frustratie

Afgelopen zomer rondde Kret zijn bewijs af. Het vinden van een nieuw, compleet verschillend bewijs voor deze ‘heel mooie stelling’ gaf veel voldoening. Niet alleen lost de stelling een probleem op dat vrij lang heeft opengestaan, maar het bewijs toont voor Kret ook aan dat zijn methode gebruikt kan worden om bepaalde moeilijke problemen op te lossen.

Het moeilijkste moment tijdens zijn promotieperiode is ook gerelateerd aan het bewijzen van een stelling. Toen na anderhalf jaar promotieonderzoek iemand anders de stelling bewees waar hij mee bezig was, moest Kret een groot deel van zijn werk weggooien en eigenlijk helemaal opnieuw beginnen. Erg frustrerend. Maar zijn promotor Clozel heeft hem goed geholpen. Samen hebben ze meteen de draad weer opgepikt met een nieuw idee en na een half jaar rekenen was het duidelijk dat ze nieuwe stellingen hadden gevonden.

Zoals gezegd houdt Kret van wiskunde en brengt hij het liefst zijn tijd door in een bibliotheek. Het is dan ook niet verbazend dat hij hoopt op een toekomst in het onderzoek. Of dat nou in Nederland of Frankrijk of elders zal zijn, maakt niet uit, als hij maar lekker rustig wiskunde kan doen!