Benno van den Berg
Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
b.vandenberg1@uu.nl

Geschiedenis

Hilbert en de bewijstheorie

Het lijkt vaak alsof met de stelling van Gödel de kous van de formele methode af was. In dit artikel doorloopt Benno van den Berg, wiskundig logicus te Utrecht, de geschiedenis van de bewijstheorie van Hilbert via Gödel en Brouwer tot in de moderne tijd, en laat zien dat de historie ook het beginpunt vormde van spannende ontwikkelingen in de eigentijdse bewijstheorie.

Het gebeurt niet iedere dag dat een tak van de wiskunde door één man in het leven wordt geroepen met als missie het redden van de eer van de wiskunde zelf. Het overkwam de bewijstheorie. Makkelijk heeft ze het er niet mee gehad.

Hilbert

De schepper van de bewijstheorie, David Hilbert, was natuurlijk niet alleen dat: hij was een van de meest invloedrijke wiskundigen van de twintigste eeuw. Hij is geboren op 23 januari 1862 en was na de dood van Poincaré in 1912 de belangrijkste wiskundige van zijn tijd en de leidende figuur in Göttingen, het centrum van de wiskunde tijdens het interbellum. Maar zijn invloed bestond niet alleen daaruit dat hij belangrijke stellingen bewees of met publicaties als het *Zahlbericht* de resultaten uit het verleden zo herschikte en uitbreidde dat ze richtinggevend werden voor de toekomst. Misschien wel net zo belangrijk was dat hij een bepaalde visie op de wiskunde had en die zeer effectief wist te verspreiden.


David Hilbert

Zo was hij al vroeg een uitgesproken voorstander van de wiskunde als abstracte discipline. Het eerste resultaat waarmee hij de aandacht van de wiskundige wereld op zich wist te vestigen, was de basisstelling van Hilbert. Dat een jong broekie het belangrijkste open probleem in de invariantentheorie, een toentertijd populaire tak van wiskunde, wist op te lossen, was nog tot daar aan toe: het was de stijl van het bewijs dat als een schok kwam. Niet alleen was het bewijs abstract en conceptueel van aard, het was ook niet constructief, en dat in een gebied waar algoritmische methoden de norm waren. De reactie van Paul Gordan, ‘de koning van de invarianten’, was: “Dat is geen wiskunde! Dat is theologie!” Dat al snel een constructief bewijs gevonden werd, deed aan het effect geen afbreuk: conceptuele bewijzen vonden ingang en Hilbert bleef het bestaansrecht van niet-constructieve methoden verdedigen. En Gordan gaf al snel toe dat theologie ook zo zijn nut heeft.

De axiomatische methode

“After finishing off the invariants” (in de woorden van Hermann Weyl, zie [5, pag. 253]) verlegde Hilbert eerst zijn aandacht naar de algebraïsche getaltheorie om vervolgens over te stappen naar de grondslagen van de meetkunde. Daar probeerde hij de verwarring die was ontstaan door de ontdekking van allerlei niet-euclidische meetkundes het hoofd te bieden door zich op een streng formeel standpunt te stellen: we stappen af van de vraag naar de ware betekenis van de woorden ‘punt’ en ‘lijn’ en zien af van een beroep op de meetkundige intuïtie. Een bewijs is correct als het de regels der logica volgt, die zuiver formeel van aard zijn, en wat ‘punt’ en ‘lijn’ betekenen: het kan van alles zijn. We zijn volledig vrij in hoe we onze axioma’s kiezen en hoe we onze begrippen interpreteren: als de interpretatie maar zodanig is dat ze de axioma’s kloppend maakt. Als we besluiten het axioma aan te nemen dat zegt dat er geen tweetal lijnen in een vlak bestaan die geen enkel punt gemeenschappelijk hebben, dan moet de betekenis van ‘punt’ en ‘lijn’ een andere zijn dan die Euclides in gedachten had. Gaat het hier echter om de punten en lijnen in een elliptische meetkunde, dan is het axioma correct. Desnoods interpreteren we ‘punt’ en ‘lijn’ door ‘tafels, stoelen en bierpullen’. Als het niet in tegenstrijd is met de axioma’s die we gekozen hebben, dan is er niets op af te dingen. Op deze manier houden we niet alleen moeilijke filosofische kwesties buiten de deur, we hoeven ook geen uitspraak over empirische vragen te doen als: “Wat is de ware meetkunde van de natuur?” Alle meetkundes hebben binnen de wiskunde hun plaats, onafhankelijk van het antwoord op zulke vragen.

Na het schrijven van de *Grundlagen der Geometrie* maakte Hilbert van weer een heel andere tak van wiskunde zijn werkterrein. Maar Hilbert bleef zijn hele leven hartstochtelijk het idee verdedigen dat wiskunde gekenmerkt wordt door de axiomatische methode. Deze overtuiging was daarom zo belangrijk voor Hilbert omdat het de axiomatische methode is die de wiskunde als autonome discipline definieert. Dit klinkt misschien filosofisch of vrijblijvend, maar voor Hilbert was het dat zeker niet. Dankzij haar abstracte en formele karakter kan de wiskunde op eigen benen staan en kan ze zich zelfstandig ontwikkelen, onafhankelijk van de natuurwetenschappen. Geen onbelangrijke reden waarom Göttingen het centrum van de wiskunde werd, was dat Hilbert deze visie op de wiskunde op een inspirerende manier op de jongere generatie wist over te dragen. Ze gaf de jonge wiskundige het broodnodige *Selbstgefühl*, een gevoel van eigenwaarde.

Dit verklaart ook Hilberts reactie op de verzamelingenleer van Cantor. De meeste wiskundigen reageerden uiterst terughoudend op Cantors opvattingen over verschillende niveaus van oneindigheid. Maar Hilbert was een aanhanger van het eerste uur. Hij zag in de theorieën van Cantor geen dubieuze metafysica, maar de ideale taal voor de abstracte en formele wiskunde die hem voor ogen stond. Ook hier is voor mijn gevoel voor Hilbert de filosofie van ondergeschikt belang. Hij zag in ‘Cantors paradijs’ vooral het kader waarin de wiskunde als formele, abstracte en autonome discipline tot grote bloei kon komen. En je kunt zeggen wat je wilt, maar de geschiedenis van de wiskunde in de twintigste eeuw bewijst zijn grote gelijk.

Basisstelling van Hilbert

In moderne taal geformuleerd, bewees Hilbert dat elk ideaal in de ring $\mathbb{Z}[X]$ eindig wordt voortgebracht. In het algemeen is het zo dat als R een commutatieve ring met eenheidselement is waarin elk ideaal eindig wordt voortgebracht, hetzelfde ook voor de polynoomring $R[X]$ geldt. Deze uitspraak wordt tegenwoordig de basisstelling van Hilbert genoemd en is van fundamenteel belang voor de algebraïsche meetkunde. Voor iets meer achtergrond, zie [3, p. 119].

Brouwer

Tegen deze achtergrond moet Hilberts felle reactie op de opvattingen van Brouwer worden gezien. Hilbert zag in de geïnteresseerde reactie op Brouwers constructivisme een gevaar voor de ontwikkeling van de wiskunde zelf, maar er zat ook een persoonlijke component aan.

In de ideeën van Brouwer zelf heeft Hilbert zich waarschijnlijk niet al te zeer verdiept. Wat hij er van wist, deed hem al te zeer denken aan de constructivistische opvattingen van Kronecker die in Hilberts jonge jaren opgeld deden en waartegen hij zijn basisstelling en de verzamelingenleer van Cantor moest verdedigen. Toen zijn sterstudent en beoogd opvolger in Göttingen, Hermann Weyl, besloot naar het kamp van Brouwer over te lopen, was de maat vol. Brouwer moest uit de redactie van de *Mathematische Annalen* worden gezet en er moest een antwoord worden geformuleerd dat eens en voor altijd aan alle constructivistische twijfels een eind zou maken. Dat antwoord zou moeten komen van de bewijstheorie.

Hilberts programma

In de missie die Hilbert de bewijstheorie in de twintiger jaren van de vorige eeuw meegaf, vinden we veel van zijn overtuigingen terug. De belangrijkste vraag waar een antwoord op gevonden moest worden, was die naar de betrouwbaarheid van de abstracte begrippen en methoden die door Brouwer als inhoudsloos werden verworpen. Om dat te doen moet volgens Hilbert een scherp onderscheid worden gemaakt tussen *finitaire* en *infinitaire* wiskunde.

Finitair is die wiskunde waaraan niet serieus kan worden getwijfeld. Het bestaat uit die uitspraken waarvan ook Brouwer of andere constructivisten moeten toegeven dat ze kloppen en betekenis hebben. Het is het domein van $3 + 4 = 7$, uitspraken die niet ter discussie kunnen worden gesteld. Je kunt ze namelijk direct narekenen.

Infinitaire wiskunde is anders: dat is het domein van de abstracte objecten en begrippen, zoals de verzamelingenleer van Cantor, waarvan bestaan en betekenis betwijfeld kunnen worden. Maar in plaats van hierover de discussie aan te gaan, gaat Hilbert deze uit de weg. Sterker nog, binnen ‘Hilberts programma’ moet de infinitaire wiskunde als een zuiver formeel spel worden opgevat. Dit kan, omdat de correctheid van wiskundige bewijzen een formele kwestie is. De redeneerstappen waaruit die bestaan, moeten de juiste vorm hebben. Betekenis en inhoud zijn daarvoor niet relevant.

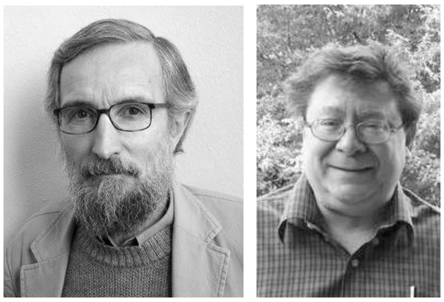
Als we infinitaire wiskunde echter als een symbolenspel opvatten, dan laat die zich *wiskundig* onderzoeken. En dat was wat de bewijstheorie zou moeten doen. Als we infinitaire wiskunde bestuderen met finitaire methoden, dan moeten de uitspraken die we dan bewijzen door alle deelnemers aan de grondslagenstrijd worden geaccepteerd. Zo kunnen we ons voorstellen dat we kunnen aantonen dat ze geen uitspraken doet die met de directe wiskundige waarneming in strijd zijn, zoals $3 + 4 = 8$. Of, wat op hetzelfde neerkomt, dat ze geen tegenstrijdige uitspraken bewijst: zowel A als niet A.

Dat was het programma in een notendop: bewijs met finitaire middelen de consistentie van de infinitaire wiskunde. In eerste instantie geven we de infinitaire wiskunde op en trekken we ons terug op het onaantastbare gebied van de finitaire wiskunde. Dit is een tactische zet, met de bewijstheorie in de hand kunnen we de infinitaire wiskunde heroveren door haar onproblematische karakter aan te tonen. Kortom, het idee was Brouwer met zijn eigen wapens te verslaan.

Finitaire wiskunde

Dat deze strategie zou slagen, Hilbert leek er niet aan te twijfelen. Op de voor hem karakteristieke manier wist hij de jeugd te inspireren om aan dit project te werken. Aan het eind van de jaren twintig meende Ackermann zelfs dat hij met finitaire middelen de consistentie van de eerste-orde-rekenkunde PA kon bewijzen en leek een finitisch bewijs van de consistentie van de tweede-orde-rekenkunde PA_2 binnen handbereik (deze systemen worden beneden gedefinieerd). Op het International Congress of Mathematicians in 1928 in Bologna deed Hilbert het voorkomen alsof het welslagen van het project nog slechts een kwestie van details was. Maar vermoedelijk was het optimisme en de vooruitgang die ogenschijnlijk werd geboekt, ook de reden waarom sommige aspecten van het project vaag bleven.

Zo heeft Hilbert nooit helemaal precies uitgelegd wat onder finitaire wiskunde moest worden verstaan. En het blijft een lastige interpretatiekwestie. Volgens sommigen valt finitaire wiskunde samen met het formele systeem PA (*Peano-rekenkunde*). Peanorekenkunde bestaat uit de definiërende vergelijkingen voor optelling en vermeningvuldi-



Links Per Martin-Löf en rechts Harvey Friedman

ging en het schema voor natuurlijke inductie

$$\varphi(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N} \left(\varphi(n) \to \varphi(n+1) \right) \\ \to \forall n \in \mathbb{N}\, \varphi(n)$$

voor aritmetische formules $\varphi(n)$ (een formule is aritmetisch als erin alleen over natuurlijke getallen worden gekwantificeerd). Maar het systeem dat de finitaire wiskunde het beste lijkt te benaderen is PRA (*primitief recursieve rekenkunde*), waarin het inductieschema alleen op kwantorvrije formules mag worden toegepast (dat zijn formules waarin geen enkele kwantor voorkomt); of althans, dit systeem lijkt het dichtst in de buurt te komen van wat Hilbert onder finitaire wiskunde verstond en het heeft die eigenschappen die Hilbert ook aan de finitaire wiskunde toeschreef (zoals Tait in een invloedrijk artikel [8] betoogd heeft).

Wat hieraan opvalt is dat Hilberts finitaire wiskunde een soort superconstructivisme is. In feite is binnen het finitaire deel van de wiskunde nog minder mogelijk dan in het Brouweriaanse intuïtionisme het geval is. Dus de hoop was dat zelfs met ultraconstructieve middelen de consistentie van alle infinitaire wiskunde kon worden bewezen.

Gödel

Het mocht niet zo zijn. In 1930 bewees Gödel zijn beroemde onvolledigheidsstellingen. Deze laten zien dat een systeem dat minstens de sterkte van PRA heeft, zijn eigen consistentie niet kan bewijzen. *A fortiori* kan PRA niet de consistentie van PA of alle infinitaire wiskunde aantonen. (Nadat hij van de stelling van Gödel had gehoord, vond von Neumann al snel de fout in het werk van Ackermann.)

Dit wordt vaak gepresenteerd als het roemloze einde van Hilberts programma, maar dat is wel erg kort door de bocht. De resultaten van Gödel maken duidelijk dat de bewijstheorie de hooggespannen verwachtingen van haar schepper niet kan waarmaken. Toch is er nog steeds een taak voor haar weggelegd. Om dat te begrijpen is het goed nog even stil te staan bij de implicaties van de stelling van Gödel.

Bewijstheoretische sterkte

Wat deze stelling laat zien, is dat er zoiets als bewijstheoretische sterkte bestaat. Gevolg is dat er een heel scala aan verschillende formele systemen bestaat, allen met een verschillende bewijstheoretische sterkte. Zo hebben we:

$$\mathrm{PRA} < \mathrm{PA} < \mathrm{PA}_2 < \mathrm{ZFC}.$$

PRA en PA kennen we al. PA_2 is tweede-orderekenkunde (door Hilbert en Ackermann 'analyse' genoemd): hierin kan niet alleen over natuurlijke getallen worden gepraat, maar ook over deelverzamelingen van natuurlijke getallen; het inductieschema wordt dienovereenkomstig uitgebreid en verder wordt een comprehensieschema toegevoegd (dat zegt dat elke formule $\varphi(x)$ met een vrije variabele x voor een natuurlijk getal aanleiding geeft tot een verzameling $\{x \in \mathbb{N} : \varphi(x)\}$). ZFC tenslotte is Zermelo–Fraenkel-verzamelingenleer met het keuzeaxioma, het systeem dat de gebruikelijke fundering voor de wiskunde vormt. Het betreft hier een geformaliseerde versie van de theorieën van Cantor en het paradigmatische voorbeeld van infinitaire wiskunde.

We weten nu dat elk systeem in het rijtje sterker is dan zijn voorgangers. Dit manifesteert zich op een aantal manieren, maar een aspect is dat elk systeem in staat is de consistentie van zijn voorgangers te bewijzen; het kan dat echter natuurlijk niet voor zichzelf (vanwege Gödel), laat staan voor zijn opvolgers.

Het beeld dat hieruit naar voren komt, is de duidelijkste weerlegging van de opvattingen van Hilbert. In feite ontkent Hilbert het bestaan van bewijstheoretische sterkte. In enkele artikelen doet hij het voorkomen alsof infinitaire begrippen kunnen worden opgevat als ficties, die handig en nuttig zijn in het omgaan met het finitaire domein, maar daarvoor geen werkelijke consequenties hebben. Dit instrumentalisme wordt door Gödel weerlegd: infinitaire begrippen hebben wel degelijk bewijstheoretische kracht en implicaties op het finitaire niveau. Het interessante hieraan is dat hiermee een filosofische opvatting wiskundig onderuit wordt gehaald.

Reverse Mathematics

Gelukkig voor de bewijstheorie rijzen er nu een heleboel nieuwe vragen. Zo kun je je afvragen hoeveel bewijstheoretische kracht de wiskundige in zijn alledaagse leven nodig heeft. De verzamelingenleer heeft de volle sterkte van ZFC nodig en enkele takken van de wiskunde die daarmee nauw verweven zijn ook (zoals de verzamelingstheoretische topologie). Een van de uitkomsten van *Reverse Mathematics* is echter dat het eigenlijk hoogst ongebruikelijk is dat een wiskundige meer bewijstheoretische kracht nodig heeft dan in PA aanwezig is.

Reverse Mathematics is een onderzoeksprogramma dat in de jaren zeventig van de vorige eeuw door Harvey Friedman is opgestart en zich tot doel gesteld heeft precies vast te stellen hoeveel bewijstheoretische sterkte nodig is om bepaalde stellingen uit de analyse of de algebra te bewijzen. (Het boek [6], besproken in *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/12(3), 2011, geeft een overzicht van dit onderzoeksgebied.) Een van de dingen die men vaststelt is dat er resultaten zijn die meer vragen dan PA. Zulke resultaten zijn echter zeldzaam en de bewijzen ervan zijn, vermoed ik, in de ogen van de meeste wiskundigen ietwat bevreemdend (ze gebruiken bijvoorbeeld inductie over aftelbare ordinaalgetallen).

Wat betekent dit voor Hilberts programma? Als we het idee opgeven om consistentiebewijzen te leveren en ons er in plaats daarvan mee tevreden stellen om zoveel mogelijk wiskunde tot finitaire wiskunde te herleiden, dan zijn de conclusies verrassend. Zeker als we finitaire wiskunde met PA gelijkstellen (wat waarschijnlijk niet helemaal correct is), is het overgrote deel van de wiskunde daartoe te reduceren. Maar zelfs als we, vermoedelijk juister, finitaire wiskunde met PRA gelijkstellen, kunnen we het leeuwendeel van de wiskunde binnen boord houden. Stephen Simpson speculeert over een percentage van 85 procent en spreekt in dit verband zelfs over een "partial realization of Hilbert's program" [7]. Met deze feiten in ogenschouw ben je geneigd over Hilberts programma te zeggen: "Wrong in principle, but right in practice."

Consistentiebewijzen

Ook als we aan het idee van consistentiebewijzen willen vasthouden, kunnen we nog een draai aan Hilberts programma geven die het verrassend succesvol maakt. Toen Bernays Hilbert van de resultaten van Gödel vertelde, reageerde hij klaarblijkelijk "somewhat angry" [5, p. 198]. Hij suggereerde echter ook al snel een afgezwakte versie van zijn programma.

Zoals gezegd was de finitaire wiskunde een soort superconstructivisme, maar juist omdat Hilbert in zijn programma roomser probeerde te zijn dan de Paus, laat dit de mogelijkheid open dat het zou kunnen werken als finitaire wiskunde door bijvoorbeeld het Brouweriaanse intuïtionisme zou worden vervangen.

Met deze afgezwakte variant komen we helemaal ver. Want, wat blijkt, Brouwer was inderdaad bereid principes als waar en zinvol te accepteren die bewijstheoretisch veel sterker zijn dan PRA of zelfs PA. Zo geloofde hij in het principe van 'bar induction' (soms vertaald als 'stompeninductie'), een ook klassiek geldig inductieprincipe voor welgefundeerde bomen. Zoals Gentzen liet zien, kunnen we met stompeninductie de consistentie van PA bewijzen. Maar we kunnen nog meer.

Volgens de *Reverse Mathematicians* laten de meeste wiskundige stellingen die meer bewijstheoretische sterkte vragen dan binnen PA voorhanden is, zich bewijzen binnen de systemen met de namen ATR_0 en $\Pi^1_1 - \mathrm{CA}_0$. (Het zou te ver voeren deze systemen te definiëren. Definities zijn te vinden in [6].) In feite zijn dit de sterkste systemen waar binnen *Reverse Mathematics* naar gekeken wordt. Ook de consistentie van deze systemen laat zich op een manier bewijzen die vermoedelijk door Brouwer zou zijn geaccepteerd. (Voor de echte experts: de zeer Brouweriaans aandoende theorie $\mathrm{ID}^i_{<\epsilon_0}(\mathcal{O})$ bewijst de consistentie van $\Pi^1_1 - \mathrm{CA}_0$. Hetzelfde geldt overigens voor de typentheorie van Per Martin-Löf, zie [2, 4].)

Misschien goed om te benadrukken wat dat inhoudt: er bestaan systemen waarin alle klassieke wiskunde geformaliseerd kan worden en waarvan Brouwer zou hebben toegegeven dat ze consistent zijn. Een uitzondering moet gemaakt worden voor Cantors paradijs, verzamelingenleer en takken van wiskunde die er zwaar op leunen zouden buiten deze systemen vallen. De bewijstheoretische sterkte van ZFC blijft ver buiten bereik.

Figuur 1 Schematische weergave van de diverse systemen

Hetzelfde geldt voor PA_2, tweede-orde-rekenkunde. Geen enkele constructivist die zijn opvattingen in een formeel systeem heeft vastgelegd, heeft ooit principes opgeschreven die je in staat zouden stellen de consistentie daarvan te bewijzen. Deze systemen zouden op een lijn waarop de bewijstheoretische sterkte van de verschillende systemen uitgezet zijn, veel dichter bij PA dan bij PA_2 getekend moeten worden. Hetzelfde geldt *a fortiori* voor de systemen ATR_0 en $\Pi^1_1 - \mathrm{CA}_0$. In Figuur 1 zijn de diverse systemen op een schematische manier weergegeven.

Conclusie

Dus Hilberts programma zou haalbaar zijn geweest als we infinitaire wiskunde vervangen door alle centrale wiskunde en finitaire wiskunde door het Brouweriaanse intuïtionisme. Of het de beide kemphanen Hilbert en Brouwer met elkaar zou hebben verzoend, is nog maar zeer de vraag. Brouwer heeft altijd duidelijk gemaakt niet in consistentie *an sich* geïnteresseerd te zijn. Voor hem stond zin en waarheid van de wiskunde voorop en deze kon nooit tot een formeel criterium worden gereduceerd. Hilbert zou waarschijnlijk de vrijheid van de wiskundige hebben verdedigd zich buiten systemen als $\Pi^1_1 - \mathrm{CA}_0$ te begeven en verzamelingenleer te gebruiken wanneer dat hem of haar zo uitkomt. Duidelijk is wel, zoals Beeson schrijft: "that both Hilbert and Brouwer had been wrong about an important point *on which they had agreed*. Namely, both of them thought that if one took constructive mathematics seriously, it would be necessary to 'give up' the most important parts of modern mathematics (such as, for example, measure theory and complex analysis)." [1, p. XV]

En daarmee is voor mijn gevoel de angel uit het conflict gehaald. Met dank aan de bewijstheorie.

Hilbert is zich nooit van deze successen van zijn geesteskind bewust geweest. In feite is dit allemaal pas aan het einde van de vorige eeuw duidelijk geworden. Het jaar waarin Gödel zijn onvolledigheidsstelling bewees, 1930, was het begin van het decennium waarin de nazi's in Duitsland de macht grepen. Veel van de wiskundigen die in Göttingen werkzaam waren verlieten Duitsland en kwamen in Amerika terecht. Toen Hitlers nieuwe minister van onderwijs Hilbert vroeg hoe het met de wiskunde in Göttingen gesteld was nu ze van niet-arische invloeden gezuiverd was, antwoordde hij: "Wiskunde in Göttingen? Die is er eigenlijk niet meer." Hilbert stierf 14 februari 1943, precies zeventig jaar geleden, 81 jaar oud.

Referenties

1 M.J. Beeson, *Foundations of Constructive Mathematics*, Springer-Verlag, 1985.

2 W. Buchholz, S. Feferman, W. Pohlers and W. Sieg, *Iterated Inductive Definitions and Subsystems of Analysis: Recent Proof-Theoretical Studies*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 897, Springer-Verlag, 1981.

3 K. Kendig, *Elementary Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, No. 44, Springer-Verlag 1977.

4 M. Rathjen, The constructive Hilbert Program and the Limits of Martin-Löf Type Theory, in: *Logicism, intuitionism, and formalism*, Synth. Libr. 341, Springer, 2009, pp. 397–433.

5 C. Reid, *Hilbert*, Springer-Verlag, 1970.

6 S.G. Simpson, *Subsystems of Second Order Arithmetic*, second edition. Cambridge University Press, 2009.

7 S.G. Simpson, Partial Realizations of Hilbert's Program, *Journal of Symbolic Logic* 53(2), 1988, pp. 349–363.

8 W. Tait, Finitism, *Journal of Philosophy* 78, 1981, pp. 524–546.