

Pieter Moree

Max-Planck-Institut für Mathematik

Bonn, Duitsland

moree@mpim-bonn.mpg.de

In Memoriam Nicolaas Govert de Bruijn (1918–2012)

De zeeftheorie

De Bruijn deed fundamenteel werk aan getallen met alleen kleine priemfactoren en de Dickman–De Bruijn-functie (die bij de bepaling van de dichtheid van die getallen optreedt). Zijn eerdere werk over oplossingen van differentiaal-differentievergelijkingen speelde hierbij een grote rol. Pieter Moree, onderzoeker aan het Max-Planck-Institut in Bonn, bespreekt De Bruijns belangrijkste resultaten en wat latere verscherpingen ervan.

Er is een duidelijke tweedeling in het getaltheoretische werk van De Bruijn: combinatorisch en analytisch getaltheoretisch. Hier beperken we ons tot het analytische getaltheoretische werk en verwijzen voor de combinatoriek naar de bijdrage van Kloks en Tijdeman in dit nummer. Het werk dat we bespreken is gepubliceerd in twee perioden: 1948–1953 en 1964–1966. In de eerste periode werkte De Bruijn alleen, in de tweede ook met Jacobus Hendricus ('Jack') van Lint (1932–2004) [13].

Definitie 1. Laat $P(n)$ de grootste priem factor van een gegeven positief geheel getal n . We zeggen dat een getal n een y -glad getal is, als $P(n) \leq y$. De verzameling van y -gladde getallen n met $n \leq x$ duiden we aan met $S(x, y)$. De kardinaliteit van de verzameling $S(x, y)$ noteren we met $\Psi(x, y)$. (Sommige auteurs gebruiken in plaats van y -glad de term y -brokkelig (y -friable), zie bijvoorbeeld [43–44].)

Definitie 2. Zeeftheorie houdt zich bezig met het afschatten in termen van elementaire functies van het aantal getallen met een voorgeschreven factorisatiepatroon in een vooraf gegeven rij getallen. (Standaardwerken zijn bijvoorbeeld [22, 24].)

Als basisvoorbeelden kan men $\Psi(x, y)$ en $\Phi(x, y)$ nemen, met $\Phi(x, y)$ het aantal getallen $n \leq x$ met $P(n) > y$. Deze functie treedt op als men de getallen zeeft zoals Eratosthenes dat al deed (dit ver-

klaart de titel van De Bruijns artikel [7]) en wordt hier alleen de laatste paragraaf aangestipt.

Laat $u \geq 1$ een reëel getal zijn. Dickman [17] bewees in 1930 dat

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Psi(x, x^{1/u})}{x} = \rho(u), \quad (1)$$

met

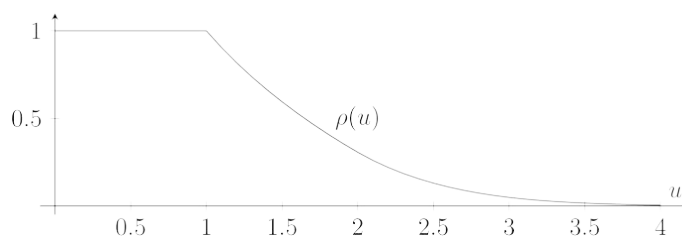
$$\rho(u) = \rho(N) - \int_N^u \frac{\rho(v-1)}{v} dv \quad (N < u \leq N+1, N = 1, 2, 3, \dots),$$

en $\rho(u) = 1$ voor $0 < u \leq 1$ (zie Figuur 1).

Het is niet moeilijk in te zien dat $\rho(u)$ eenduidig door de volgende lineaire functionaalvergelijking vastgelegd wordt:

$$\rho(u) = \begin{cases} 1 & \text{als } 0 \leq u \leq 1, \\ \frac{1}{u} \int_0^1 \rho(u-t) dt & \text{als } u > 1. \end{cases} \quad (2)$$

De Bruijn heeft een zeer precieze asymptotiek voor $\rho(u)$ gegeven (Stel-



Figuur 1 De Dickman–De Bruijn-functie $\rho(u)$



Bep en Dick de Bruijn en Betty en Jack van Lint in 1991, tijdens de uitreiking van de AKZO-prijs aan De Bruijn

ling 2), en later ook zeer precieze afschattingen voor $\Psi(x, y)$ (Stelling 3 en 4). Zijn werk was een enorme sprong voorwaarts in vergelijking met dat van de auteurs in de periode 1930–1950 [37]. Vrijwel alle moderne artikelen over gladde getallen noemen een of meerdere artikelen van De Bruijn in de inleiding. De methodes die hij gebruikte om de asymptotiek van $\rho(u)$ te bepalen, zijn nu standaard voor de bestudering van analoge functies in de zeeftheorie, zie bijvoorbeeld [22, Appendix B]. Het duurde tot de tachtiger jaren (toen eerst Hildebrand en daarna Tenenbaum in dit gebied gingen werken), voordat het werk van De Bruijn wezenlijk verbeterd werd.

In dit beknopte bestek kan ik helaas op de vele toepassingen van de theorie der gladde getallen niet ingaan, zie daarvoor bijvoorbeeld Granville [23].

Dick en de Dickman–De Bruijn-functie $\rho(u)$

Elementaire eigenschappen van ρ

Ik ga ervan uit dat de lezer een beetje vertrouwd is met de O -notatie van Landau–Bachmann (zie Wikipedia of bijvoorbeeld [34, 42]). In plaats van $\log \log x$ schrijf ik soms $\log_2 x$ en voor $(\log x)^A$, $\log^A x$.

Uit (2) volgt dat $\rho'(u) = -\rho(u - 1)/u$ en dus kunnen we alternatief $\rho(u)$ definiëren door

$$\rho(u) = \begin{cases} 1 & \text{als } 0 \leq u \leq 1, \\ 1 - \int_1^u \frac{\rho(t-1)}{t} dt & \text{als } u > 1. \end{cases} \quad (3)$$

Uit (3) volgt dat $\rho(u)$ continu is. Het is gemakkelijk in te zien dat $\rho(u) > 0$. Zo niet, bekijk dan

$$u_0 := \liminf \{u : \rho(u) = 0\}.$$

Daar $\rho(u)$ continu is, moet gelden dat $\rho(u_0) = 0$. Substitutie van u_0 in (2) laat zien dat de rechterzijde positief is. Tegenspraak.

Omdat $\rho'(u) = -\rho(u - 1)/u$ voor $u > 1$ en $\rho(u) > 0$ voor $u > 0$, volgt dat $\rho'(u) < 0$ en dus is $\rho(u)$ monotoon dalend voor $u > 1$.

Uit (2) volgt dan dat $u\rho(u) \leq \rho(u - 1)$, en middels inductie zien we dan $\rho(u) \leq 1/[u]!$ voor $u \geq 0$. Dus $\rho(u)$ is een positieve zeer snel afvallende functie.

Merk op dat $\rho(u) = 1 - \log u$ voor $1 \leq u \leq 2$. Voor $2 \leq u \leq 3$ kunnen we $\rho(u)$ nog uitdrukken in termen van de dilogarithme, voor nog wat grotere u moeten we onze toevlucht tot numerieke methoden nemen (zie bijvoorbeeld [30]), of tot de asymptotiek zoals De Bruijn dat deed en waarop we ons vanaf nu zullen concentreren.

De Laplace-getransformeerde van $\rho(u)$

De functie $(e^x - 1)/x$ speelt een belangrijke rol in de theorie der gladde getallen. Om te begrijpen waarom is het een nuttige oefening om de Laplace-getransformeerde van $\rho(u)$,

$$\hat{\rho}(s) = \int_0^\infty \rho(u)e^{-us} du,$$

te bepalen. De allereerste die dit deed was De Bruijn. Daar $0 < \rho(u) \leq 1/[u]!$ zien we dat deze integraal absoluut convergent is voor alle complexe s . Onder gebruikmaking van (2) vinden we dan dat

$$\begin{aligned} -\hat{\rho}'(s) &= \int_0^\infty u\rho(u)e^{-us} du \\ &= \int_0^1 ue^{-us} du + \int_1^\infty \left(\int_{u-1}^u \rho(t) dt \right) e^{-us} du \\ &= \int_0^\infty \rho(t) \left(\int_t^{t+1} e^{-us} du \right) dt \\ &= \frac{1 - e^{-s}}{s} \hat{\rho}(s). \end{aligned}$$

Op een constante na vinden we dan het volgende resultaat.

Lemma 1. *Er geldt dat*

$$\hat{\rho}(s) = \exp \left\{ \gamma - \int_0^s \frac{1 - e^{-t}}{t} dt \right\}. \quad (4)$$

(Voor de bepaling van de constante zie bijvoorbeeld de uitgebreidere Engelse versie van dit artikel [36].) Een wat curieus gevolg van Lemma 1 en (2) is dat voor $0 \leq \delta \leq 1$,

$$\hat{\rho}(0) = e^\gamma = \int_0^\infty \rho(t) dt = \delta + \sum_{n \geq 1} (n + \delta)\rho(n + \delta).$$

Toepassen van de inverse Laplace-transformatie op (4) geeft, met σ_0 willekeurig reëel,

$$\rho(u) = \frac{e^\gamma}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \exp \left\{ \int_0^s \frac{e^z - 1}{z} dz + us \right\} ds. \quad (5)$$

Lemma 1 en formule (5) zijn voor het eerst bewezen door De Bruijn [8].

De Bruijns ξ -functie

Laat $f(x) = (e^x - 1)/x$. Merk op dat $f(0) = 1$ en dat f monotoon stijgend is. Hieruit volgt dat de vergelijking

$$\frac{e^v - 1}{v} = u \quad (6)$$

voor $u > 1$ een unieke oplossing $v = \xi(u)$ heeft. Uit (6) volgt dat

$$\xi = \log \xi + \log u + O\left(\frac{1}{u\xi}\right). \quad (7)$$

Uitgaand van een benadering van ξ kunnen we deze uitdrukking benutten om steeds preciezere benaderingen van ξ te vinden ('bootstrapping'). Voor u voldoende groot geldt $1 < \xi < 2 \log u$ en dus $\log \xi = O(\log \log u)$. Door dit in de rechterkant van (7) te substitueren vinden we $\xi = \log u + O(\log \log u)$, als we dat dan weer in de rechterkant van (7) substitueren vinden we

$$\xi = \log u + \log \log u + O\left(\frac{\log \log u}{\log u}\right).$$

Door dit proces lang genoeg voort te zetten kunnen we een uitdrukking met foutterm $O(\log^{-k} u)$ vinden met $k \geq 1$ willekeurig groot.

Oefening 1. Laat zien dat

$$\int_1^u \xi(t) dt = u \left\{ \log u + \log_2 u - 1 + \frac{\log_2 u - 1}{\log u} + O\left(\left(\frac{\log_2 u}{\log u}\right)^2\right) \right\}. \quad (8)$$

De notatie $\xi(u)$ is afkomstig van De Bruijn [8].

Ramanujans hand

R.W. Gosper merkte in een lezing op: "How can you love Ramanujan? He continually reaches his hand from his grave to snatch your theorems from you". Voor een aantal opmerkelijke voorbeelden zie het artikel van Berndt [2]. Een voorbeeld betreft Dickmans resultaat (1). Ramanujan [39, p. 337] schreef (in mijn notatie):

Claim. Definieer, voor $u \geq 0$,

$$I_0(u) = 1, I_k(u) = \int \cdots \int_{\substack{t_1, \dots, t_k \geq 1 \\ t_1 + \dots + t_k \leq u}} \frac{dt_1 \cdots dt_k}{t_1 \cdots t_k}, k \geq 1.$$

Dan geldt, voor $u \geq 0$, (1) met

$$\rho(u) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} I_k(u).$$

Opgeschreven tenminste tien jaar voor de verschijning van Dickmans artikel [17] (voor meer informatie, zie Moree [37]). Dus eigenlijk moet $\rho(u)$ de Ramanujan–Dickman–De Bruijn-functie heten!

Mahlers partitieprobleem

Rond 1946 woonde De Bruijn voordrachten van Kurt Mahler bij. (Ik dank Jaap Korevaar voor deze informatie.) Daarin ging het onder meer over Mahlers partitieprobleem [31]; op hoeveel manieren $p_r(n)$ kan men n als $n_0 + n_1 r + n_2 r^2 + \cdots$ schrijven met $r \geq 2$ een geheel getal en n_0, n_1, n_2, \dots niet-negatieve getallen. Het lijkt erop dat Mahlers partitieprobleem, waarbij oplossingen van de functionaalvergelijking

$$F'(x) = e^{\alpha x + \beta} F(x - 1), \quad (9)$$

een belangrijke rol spelen, de bron was voor De Bruijns interesse voor differentiaal-differentievergelijkingen en gerelateerde lineaire functionaalvergelijkingen (zo is de differentiaal-differentievergelijking (3) equivalent met de lineaire functionaalvergelijking (2)). In 1948 [3] verbeterde De Bruijn de asymptotiek van Mahler [31] voor $\log p_r(n)$ en kwam terug op (9) in 1953 [10].

Differentiaal-differentievergelijkingen

Direct na zijn artikel van 1948 [3] waarin (9) een rol speelt, schreef De Bruijn een aantal artikelen over lineaire functionaalvergelijkingen, [4–6, 10], waarvan ik wat nader op [6] uit 1950 inga, waarin hij vergelijkingen van het type $f(x) = \int_0^1 K(x, t)f(x - t)dt$ bestudeert. Hij legt condities op $K(x, t)$ op die garanderen dat $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ bestaat en eindig is. Het volgende resultaat uit [6] is een toepassing.

Stelling 1. Stel dat F continu is en voldoet aan

$$xF(x) = \int_0^1 F(x - t)dt \quad (x > 1),$$

dan bestaat er een constante C zodat asymptotisch

$$F(x) = (C + O(x^{-1/2}))\rho(x).$$

De Bruijns asymptotische formule voor $\rho(u)$

In 1951 [8] leidde De Bruijn de volgende asymptotiek voor $\rho(u)$ af.

Stelling 2. Voor $u \rightarrow \infty$ geldt

$$\rho(u) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} \exp\left(\gamma - \int_1^u \xi(t) dt\right).$$

Zijn bewijs is ingenieus en nogal indirect en maakt wezenlijk gebruik van Stelling 1. Uit Stelling 2 en (8) volgt nu

$$\log \rho(u) = -u \left\{ \log u + \log_2 u - 1 + \frac{\log_2 u - 1}{\log u} + O\left(\left(\frac{\log_2 u}{\log u}\right)^2\right) \right\}, \quad (10)$$

hetgeen scherper was dan de beste bekende afschatting van Buchstab [15] voor $\rho(u)$ toen De Bruijn zijn artikel schreef. Merk op dat (10) de onprecieze, maar gemakkelijker te onthouden, afschattingen

$$\rho(u) = \frac{1}{u^{u+o(u)}}, \quad \rho(u) = \left(\frac{e + o(1)}{u \log u}\right)^u,$$

impliceert.

Zowel van afchatting (10) als van Stelling 2 zijn nu eenvoudiger bewijzen bekend.

Evertse et al. [18, pp. 109-110] laten zien dat voor $u \geq 1$,

$$\exp\left(-\int_2^{u+1} \xi(t) dt\right) \leq \rho(u) \leq \exp\left(-\int_1^u \xi(t) dt\right). \quad (11)$$

Het bewijs is kort en elementair. Deze ongelijkheden samen met (8) geven dan een alternatief bewijs van de afchatting (10).

Canfield [16] heeft later een veel korter en natuurlijker bewijs van Stelling 2 gevonden. Zijn basisidee is om $\rho(u)$ te benaderen door stap functies.

Alladi [1] bewees de volgende verscherping van Stelling 2.

Verbetering 1. Voor $u \geq 1$ geldt

$$\rho(u) = \left(1 + O\left(\frac{1}{u}\right)\right) \sqrt{\frac{\xi'(u)}{2\pi}} \exp\left(y - \int_1^u \xi(t) dt\right).$$

Het is niet moeilijk in te zien dat $\lim_{u \rightarrow \infty} u\rho\xi'(u) = 1$ en dus is Stelling 2 een gevolg van Verbetering 1. Alladi schrijft over het bewijs: "This improvement is in fact obtained by iterating de Bruijn's method a second time, more carefully!"

Alhoewel het bewijs van De Bruijn (zie [16, 36] voor een bewijs-schets) van Stelling 2 veel eenvoudiger kan, is de techniek van het werken met een duale differentiaal-differentievergelijking nu een standaardhulpmiddel geworden in de asymptotische analyse van $\rho(u)$ -achtige functies die in de zeeftheorie optreden (zie bijvoorbeeld [22, Appendix B]).

Gladde getallen voor beginners

De Buchstab- en Hildebrand-functionaalvergelijking

Het is mogelijk om zeer precieze afchattingen voor $\Psi(x, y)$ te verkrijgen. Een heel belangrijk hulpmiddel hierbij is de *Buchstab-vergelijking* [15]

$$\Psi(x, y) = \Psi(x, z) - \sum_{y < p \leq z} \Psi\left(\frac{x}{p}, p\right), \quad (12)$$

waarbij p over de priemgetallen in het interval $(y, z]$ loopt en $z > y$. In de uitgebreide Engelse versie bewijs ik de correctheid van deze vergelijking en laat zien hoe hiermee snel plausibel gemaakt kan worden dat (1) waar is.

Een aantal resultaten van De Bruijn kan sterk verbeterd worden door in plaats van (12) de zogenaamde *Hildebrand-vergelijking* [25] te gebruiken. Deze is exact, maar meestal is het genoeg om de eenvoudigere variant

$$\Psi(x, y) \log x = \sum_{p \leq y} \Psi\left(\frac{x}{p}, y\right) \log p + O(x)$$



te gebruiken. Het voordeel van deze functionaalvergelijking over (12) is dat de tweede parameter overal dezelfde waarde heeft.

Simpele afchattingen voor $\Psi(x, y)$

Een simpele observatie, afkomstig van Rankin in 1938 [40], leidt tot een scherpe bovengrens voor $\Psi(x, y)$. Rankin merkte op dat voor willekeurige $\sigma > 0$ en $z \geq 1, z^\sigma \geq 1$ en dus

$$\Psi(x, y) \leq \sum_{n \in S(x, y)} \left(\frac{x}{n}\right)^\sigma \leq x^\sigma \sum_{p(n) \leq y} \frac{1}{n^\sigma} = x^\sigma \zeta(\sigma, y), \quad (13)$$

met $\zeta(\sigma, y) = \prod_{p \leq y} (1 - p^{-\sigma})^{-1}$.

Door nu σ geschikt te kiezen en analytische priemgetaltheorie te gebruiken om $\zeta(\sigma, y)$ af te schatten, vindt men dan een bovengrens voor $\Psi(x, y)$.

Een simpel afchattingsidee, dit keer voor een ondergrens, gaat als volgt. Laat $2 = p_1 < p_2 < p_3 < \dots$ de opeenvolgende priemgetallen zijn. Laat p_k het grootste priemgetal $\leq y$ zijn.

Er geldt dat $n \in S(x, y)$ dan en slechts dan als we n kunnen schrijven als $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}$, met de e_i niet-negatieve getallen zodat

$$e_1 \log p_1 + e_2 \log p_2 + \dots + e_k \log p_k \leq \log x. \quad (14)$$

Omdat $\log p_i \leq \log p_k \leq \log y$, geeft iedere oplossing van

$$e_1 + e_2 + \dots + e_k \leq \left\lfloor \frac{\log x}{\log y} \right\rfloor = [u]$$

een oplossing van (14) met $x = y^u$. We concluderen dat

$$\Psi(x, x^{1/u}) \geq \sum_{\substack{e_1 + \dots + e_k \leq [u] \\ e_i \geq 0}} 1 = \binom{[u] + k}{k}. \tag{15}$$

(De lezer die de laatste gelijkheid niet inzielt, kan bijvoorbeeld [34, p. 208] raadplegen.)

De Bruijns resultaten betreffend $\Psi(x, y)$

De Bruijns functie $\Lambda(x, y)$

In het meest geciteerde artikel, [9], van De Bruijn dat we hier bespreken, voert hij de functie $\Lambda(x, y)$ in en gebruikt deze om de belangrijke Stelling 3 te bewijzen.

De Bruijns functie $\Lambda(x, y)$ is een integraal waarin de Dickman–De Bruijn-functie voorkomt. De basiseigenschap van deze functie is dat het een oplossing is van een gladde versie van de Buchstab-vergelijking. Er geldt dat $\Lambda(x, y) = \Psi(x, y) = [x]$ voor $0 < x \leq y$ en

$$\Lambda(x, y) = \Lambda(x, z) - \int_y^z \Lambda\left(\frac{x}{t}, t\right) \frac{dt}{\log t}. \tag{16}$$

De functie $\Lambda(x, y)$ is een hulpfunctie om $\Psi(x, y)$ af te schatten. In [11] gaf De Bruijn afschattingen voor

$$|\Psi(x, y) - \Lambda(x, y)| \text{ en } |\Lambda(x, y) - x\rho(u)|.$$

Wanneer deze grenzen met de scherpste vorm van de priemgetalstelling gecombineerd worden krijgen we de volgende uniforme versie van (1).

Stelling 3. De afschatting

$$\Psi(x, y) = x\rho(u) \left\{ 1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right\}, \tag{17}$$

geldt voor

$$y > \exp(\log^{5/8+\epsilon} x).$$

Het blijkt dat in een bepaald (x, y) -gebied $\Lambda(x, y)$ een goede afschatting is voor $\Psi(x, y)$. Dat dit ook in een nog veel groter gebied waar is, liet Saias [41] in 1989 zien. Hildebrand [26] bewees dat de afschatting (17) in het veel grotere gebied

$$y > \exp((\log \log x)^{5/3+\epsilon}),$$

ook nog waar is. Hiertoe gebruikte hij de Hildebrand-vergelijking en niet de Buchstab-vergelijking. Dit gebied kan niet onbepert groter gemaakt worden: Hildebrand [25] bewees dat de afschatting (17) uniform geldt voor

$$y > \log^{2+\epsilon} x,$$

dan en slechts dan als de Riemann-hypothese waar is.

De Bruijns afschatting voor $\log \Psi(x, y)$

In 1966 gaf De Bruijn [11] een afschatting voor $\log \Psi(x, y)$.

Stelling 4. Laat

$$Z := \frac{\log x}{\log y} \log\left(1 + \frac{y}{\log x}\right) + \frac{y}{\log y} \log\left(1 + \frac{\log x}{y}\right).$$

Er geldt uniform voor $x \geq y \geq 2$,

$$\log \Psi(x, y) = Z \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\log y} + \frac{1}{u+1} + \frac{1}{\log \log 2x}\right) \right\}.$$

Als voorbeeld kunnen we $y = \log^A x$ nemen, met $A > 1$ vast gekozen. Dan volgt uit Stelling 4 dat

$$\Psi(x, \log^A x) = x^{1-1/A+O(1/\log \log x)}.$$

Het basisidee van het bewijs van Stelling 4 is eenvoudig (een paar bladzijdes zijn echter nodig om het uit te werken). De bovengrens volgt uit Rankins bovengrens (13) met een optimale keuze van de parameter σ . De ondergrens volgt uit (15) samen met Stirlings formule voor $\log n!$.

Opmerking 1. Vandaag de dag weten we dat de term $(u+1)^{-1}$ in Stelling 4 weggelaten kan worden (zie Tenenbaum [42, pp. 359–362] voor een bewijs).

Opmerking 2. Stelling 4 maakt duidelijk dat er een verandering van gedrag van $\Psi(x, y)$ optreedt als $y \approx \log x$.

En verder

De Bruijn gebruikte zijn Λ -functie in [9] om te laten zien dat gemiddeld gesproken voor een getal met n decimalen de grootste priemfactor λn decimalen heeft, met

$$\lambda = \int_0^\infty \frac{\rho(t)}{(1+t)^2} dt.$$

Mitchell [33] berekende dat $\lambda = 0.62432998854355\dots$ De constante λ heet nu de *Golomb–Dickman-constante*, voor meer informatie zie het boek van Finch [19, paragraaf 5.4].

In 1964 bestudeerden De Bruijn en Van Lint [12] sommen van de vorm $\sum_{n \in S(x,y)} f(n)$, met f een niet-negatieve multiplicatieve functie. Veel van de technieken gebruikt bij het bestuderen van $\Psi(x, y)$ kunnen hier ook worden toegepast. Voor een inleiding zie Tenenbaum en Wu [43], voor zeer recente resultaten in deze richting zie Tenenbaum en Wu [44].

Voor $\Phi(x, y)$ (zie de inleiding) treedt als analogon van $\rho(u)$ de Buchstab-functie $\omega(u)$ op. (Alf van der Poorten (1942–2010) noemde de getallen n met $P(n) > y$ grappend ‘hairy’ en iemand die aan het schatten van $\Phi(x, y)$ werkt een Esau.) De Bruijn gaf als eerste hier een analytisch bewijs dat e^{-y} de limietwaarde van $\omega(u)$ is. Verder schreef hij dat waarschijnlijk $\omega(u) = e^{-y} + O(\exp(-u \log u - u \log_2 u))$. Dit werd later bewezen door L.-K. Hua [28] (“de vader van de moderne Chinese wiskunde”). De functie $\omega(u)$ schommelt om e^{-y} en deze eigenschap speelt een cruciale rol in een doorbraak van Maier in de analytische getaltheorie [32]. Zijn resultaat vormt het begin van een hele reeks resultaten die laten zien dat de verdeling van priemgetallen

over rekenkundige rijen niet zo ‘random’ is als tot dan toe gedacht, zie bijvoorbeeld [20–21].

Literatuur

Voor de lezers die het adagium van H.M. Edwards “read the masters, not the secondary sources” volgen, moet ik natuurlijk hier allereerst de artikelen van De Bruijn noemen! Voor beginners kan ik Granvilles overzichtsartikel [23] uit 2008 van harte aanbevelen, waarin de nadruk ligt op gladde getallen in algoritmen en in de computationele getaltheorie. Wat dieper gravend is het overzichtsartikel uit 1993 van Hildebrand en Tenenbaum [27]. Hoofdstuk III.5 in Tenenbaums boek

[42] gaat over $\rho(u)$ en benaderingen van $\Psi(x, y)$ middels de zadel-puntmethode, Hoofdstuk III.6 gaat over $\Phi(x, y)$.

Ik wijs ook graag op de uitgebreidere Engelse versie van dit artikel, [36]. Ik schets daar bijvoorbeeld hoe men heuristisch (1) kan afleiden door gebruik te maken van de Buchstab-vergelijking (12) en priemgetaltheorie. Voor een overzicht betreffende het werk aan gladde getallen gedaan voor de Bruijn, zie [37–38].

Dankwoord. Bij het schrijven van dit artikel heb ik dankbaar gebruik gemaakt van de overzichtsartikelen van Granville [23] en Hildebrand en Tenenbaum [27].

Referenties

- 1 K. Alladi, The Turán-Kubilius inequality for integers without large prime factors, *J. Reine Angew. Math.* **335** (1982), 180–196.
- 2 B.C. Berndt, Ramanujan reaches his hand from his grave to snatch your theorems from you, *Asia Pac. Math. Newsl.* **1** (2011), no. 2, 8–13.
- 3 N.G. de Bruijn, On Mahler’s partition problem, *Indag. Math.* **10** (1948), 210–220.
- 4 N.G. de Bruijn, The asymptotically periodic behavior of the solutions of some linear functional equations, *Amer. J. Math.* **71** (1949), 313–330.
- 5 N.G. de Bruijn, On some linear functional equations, *Publ. Math. Debrecen* **1** (1950), 129–134.
- 6 N.G. de Bruijn, On some Volterra integral equations of which all solutions are convergent, *Indag. Math.* **12** (1950), 257–265.
- 7 N.G. de Bruijn, On the number of uncanceled elements in the sieve of Eratosthenes, *Indag. Math.* **12** (1950), 247–256.
- 8 N.G. de Bruijn, The asymptotic behaviour of a function occurring in the theory of primes, *J. Indian Math. Soc. (N.S.)* **15** (1951), 25–32.
- 9 N.G. de Bruijn, On the number of positive integers $\leq x$ and free of prime factors $> y$, *Indag. Math.* **13** (1951), 50–60.
- 10 N.G. de Bruijn, The difference-differential equation $F'(x) = e^{\alpha x + \beta} F(x-1)$, I, II, *Indag. Math.* **15** (1953), 449–458, 459–464.
- 11 N.G. de Bruijn, On the number of positive integers $\leq x$ and free of prime factors $> y$, I, *Indag. Math.* **28** (1966), 239–247.
- 12 N.G. de Bruijn and J.H. van Lint, Incomplete sums of multiplicative functions. I, II, *Indag. Math.* **26** (1964), 339–347, 348–359.
- 13 N.G. de Bruijn, Jack van Lint (1932–2004), *Nieuw Arch. Wiskd. (5)* **6** (2005), 106–109 (Dutch).
- 14 N.G. de Bruijn, Lecture during the symposium on the occasion of his 90th birthday, Eindhoven, 2008, <http://www.win.tue.nl/debruijn90/video/debruijn.html>
- 15 A.A. Buchstab, On those numbers in arithmetical progression all of whose prime factors are small in order of magnitude (Russian), *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **67** (1949), 5–8.
- 16 E.R. Canfield, The asymptotic behavior of the Dickman-de Bruijn function, Proceedings of the thirteenth Southeastern conference on combinatorics, graph theory and computing (Boca Raton, Fla., 1982), *Congr. Numer.* **35** (1982), 139–148.
- 17 K. Dickman, On the frequency of numbers containing primes of a certain relative magnitude, *Ark. Mat. Astr. Fys.* **22** (1930), 1–14.
- 18 J.-H. Evertse, P. Moree, C.L. Stewart and R. Tijdeman, Multivariate Diophantine equations with many solutions, *Acta Arith.* **107** (2003), 103–125.
- 19 S.R. Finch, *Mathematical constants*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **94**, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- 20 J. Friedlander and A. Granville, Limitations to the equi-distribution of primes. I, *Ann. of Math. (2)* **129** (1989), 363–382.
- 21 J. Friedlander, A. Granville, A. Hildebrand and H. Maier, Oscillation theorems for primes in arithmetic progressions and for sifting functions, *J. Amer. Math. Soc.* **4** (1991), 25–86.
- 22 J. Friedlander and H. Iwaniec, *Opera de cribro*, American Mathematical Society Colloquium Publications **57**, AMS, Providence, RI, 2010.
- 23 A. Granville, Smooth numbers: computational number theory and beyond, *Algorithmic number theory: lattices, number fields, curves and cryptography*, Math. Sci. Res. Inst. Publ. **44**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (2008), 267–323.
- 24 H. Halberstam and H.-E. Richert, *Sieve methods*, London Mathematical Society Monographs **4**, Academic Press, London-New York, 1974.
- 25 A. Hildebrand, Integers free of large prime factors and the Riemann hypothesis, *Mathematika* **31** (1984), 258–271.
- 26 A. Hildebrand, On the number of positive integers $\leq x$ and free of prime factors $> y$, *J. Number Theory* **22** (1986), 289–307.
- 27 A. Hildebrand and G. Tenenbaum, Integers without large prime factors, *J. Théor. Nombres Bordeaux* **5** (1993), 411–484.
- 28 L.-K. Hua, Estimation of an integral, *Sci. Sinica* **4** (1951), 393–402.
- 29 T. Kloks, De combinatoriek van De Bruijn, arXiv:1208.1361 (Dutch).
- 30 J. van de Lune and E. Wattel, On the numerical solution of a differential-difference equation arising in analytic number theory, *Math. Comp.* **23** (1969), 417–421.
- 31 K. Mahler, On a special functional equation, *J. London Math. Soc.* **15** (1940), 115–123.
- 32 H. Maier, Primes in short intervals, *Michigan Math. J.* **32** (1985), 221–225.
- 33 W.C. Mitchell, An evaluation of Golomb’s constant, *Math. Comp.* **22** (1968), 411–415.
- 34 H.L. Montgomery and R.C. Vaughan, *Multiplicative number theory. I. Classical theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **97**, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- 35 P. Moree, Psixyology and Diophantine equations, Dissertation, Rijksuniversiteit te Leiden, Leiden, 1993.
- 36 P. Moree, Nicolaas Govert de Bruijn, The enchanter of friable integers, uitgebreide Engelse versie van dit artikel, arXiv:1212.1579, *Indag. Math.*, to appear.
- 37 P. Moree, Integers without large prime factors: from Ramanujan to de Bruijn, arXiv:1212.1581.
- 38 K.K. Norton, *Numbers with small prime factors, and the least kth power non-residue*, Memoirs of the American Mathematical Society **106**, American Mathematical Society, Providence, R.I. 1971.
- 39 S. Ramanujan, *The lost notebook and other unpublished papers*, Narosa, New Delhi, 1988.
- 40 R.A. Rankin, The difference between consecutive prime numbers, *J. London Math. Soc.* **13** (1938), 242–247.
- 41 É. Saias, Sur le nombre des entiers sans grand facteur premier, *J. Number Theory* **32** (1989), 78–99.
- 42 G. Tenenbaum, *Introduction to analytic and probabilistic number theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **46**, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- 43 G. Tenenbaum and J. Wu, Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables, *J. Reine Angew. Math.* **564** (2003), 119–166.
- 44 G. Tenenbaum and J. Wu, Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables. IV, Anatomy of integers, CRM Proc. Lecture Notes **46**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2008), 129–141.