

Bennie Mols

Kijkduinstraat 121-2

1055 XW Amsterdam

benniemols@gmail.com

Maatschappij Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2011

# Wiskunde die overstromingen opvangt

Een van de doelen van het Nederlandse bedrijf Deltares is om de waterhuishouding van het landelijke rivierensysteem zo goed mogelijk te controleren. Deltares wil van de Studiegroep Wiskunde met de Industrie graag weten of de ingenieursaanpak die het zelf heeft ontwikkeld, verbeterd kan worden door de wiskundige achtergrond beter te begrijpen.

## Deelnemers van de studiegroep

Peter Dickinson (RUG)  
Joost Hulshof (VU)  
André Ran (VU)  
Majid Salmani (Universiteit Bremen)  
Martijn Zaal (VU)

Nederland Waterland ligt vol met dijken, dammen, kanalen, uiterwaarden, sluisen, pompen en gemalen, die zorgen dat polders niet onder lopen, het wassende rivierwater binnen de perken blijft en het land droge voeten houdt. Het Nederlandse instituut Deltares probeert fundamenteel onderzoek op het terrein van waterbeheer van rivierdelta's, kustregio's en riviergebieden te vertalen naar de praktijk. Deltares staat voor de uitdaging om het Nederlandse waterbeheer slimmer te sturen, om energiekosten te besparen en de veiligheid te verbeteren. Daarnaast moet idealiter ook de wisselwerking tussen verschillende waterwerken worden meegenomen, iets wat tot nu toe niet gebeurt maar in de nabije toekomst wel gaat veranderen. Deltares heeft zo'n achthonderd mensen in dienst, gevestigd in Delft en Utrecht. Het bedrijf ontstond in 2008 uit een fusie van GeoDelft, Delft Hydraulics en delen van TNO en Rijkswaterstaat.

Veel sturing van de Nederlandse waterwerken gebeurt nog handmatig. Gaat de waterstand lokaal ergens omhoog, dan kan ie-

mand een pomp aanzetten. "Momenteel worden alleen de huidige waterstanden bekeken", vertelt senioronderzoeker Dirk Schwanenberg van Deltares. "In de toekomst willen we ook de weersvoorspelling meenemen in de sturing. Als je weet dat er over een paar uur veel regen gaat vallen, dan kun je een pomp eerder aanzetten, om het waterniveau al wat omlaag te brengen en ruimte te maken voor het regenwater dat nog gaat komen. We zoeken nu naar manieren waarop we de weersvoorspelling het beste kunnen meenemen."

In 2011 voerde Deltares al twee pilotprojecten uit die rekening houden met de weersvoorspelling: een project voor het waterschap Dommel en het waterschap Aa en Maas, en een tweede project voor het waterschap Noorderzijlvest in Groningen, Friesland en Drenthe.

"Een bepaald watersysteem wordt beschreven met wiskundige vergelijkingen die vertellen hoe het watersysteem zich gedraagt", zegt Schwanenberg over de wiskundige achtergrond van het sturingsprobleem. "Dat is een stelsel niet-lineaire gewone differentiaalvergelijkingen. Één belangrijke randvoorwaarde wordt bepaald door de weersvoorspelling. De weersvoorspelling geeft aan hoe veel water je op een bepaald moment verwacht. De tweede randvoorwaarde wordt bepaald door de manieren waarmee we de waterafvoer kunnen beïnvloeden, bijvoorbeeld

met pompen of sluisen. Nu kijken wij bij Deltares als ingenieurs naar het sturingsprobleem. Wij weten dat bepaalde dingen werken, maar we weten niet wat er wiskundig precies achter zit en daar wilden we achter komen. Onze vraag aan de Studiegroep Wiskunde met de Industrie was dan ook of we de sturing beter kunnen optimaliseren wanneer we de achterliggende wiskunde beter begrijpen."

## Lagrangemethode

"Het heeft ons veel tijd gekost om de wiskundige achtergrond van het probleem precies in kaart te brengen", vertelt wiskundige en promovendus Martijn Zaal namens de studiegroep die het Deltares-probleem eind januari 2011 bestudeerde. "Deltares gebruikt een intuïtieve methode om de optimale strategie te vinden. Hun methode begint met een bepaalde gok voor de oplossing van het optimalisatieprobleem en probeert de oplossing vervolgens stap voor stap te verbeteren. De manier waarop deze verbeteringen werken begrepen we eerst niet."

Het concrete probleem dat de studiegroep heeft bekeken, bestaat uit vier gekoppelde waterreservoirs, waarbij de waterstroom naar het eerste reservoir op een redelijke tijdschaal voorspelbaar is. Dit probleem staat model voor vier reservoirs in de Rijn-Maasdelta. "Ons idee was nu om hun optimalisatieprobleem te formuleren als een Lagrange-multiplierprobleem. De Lagrangemethode werkt goed bij optimalisatieproblemen waarbij de randvoorwaarden gelijkheden zijn, bijvoorbeeld wanneer er bepaalde behoudswetten gelden. Dingen die je niet kunt kiezen, vat je in deze methode op als

dingen die je wel kunt kiezen, maar dan moeten de wiskundige vergelijkingen wel voldoen aan een paar extra voorwaarden.”

Deze methode geeft in het algemeen een groter stelsel vergelijkingen dan het oorspronkelijk geformuleerde stelsel. Maar het voordeel is dat de oplossing met de Lagrange-methode wel optimaliteit garandeert. Met de Lagrange-multipliermethode kwam de studiegroep uit op een stelsel van zes vergelijkingen. Zaal: “De volgende vraag is of de volgorde waarin je de vergelijkingen gaat oplossen uitmaakt voor hoe gemakkelijk de oplossing te berekenen is. Voor ons was het interessant om te zien dat de Deltares-methode overeen bleek te komen met een van de oplossingsmethoden voor het Lagrangeprobleem dat wij hebben bekeken.”

De methode van de Deltares-onderzoekers gebruikt een slim algoritme om een bepaalde afgeleide uit te rekenen en die gebruiken ze om de volgende gok in hun strategie te verbeteren. Dat slimme algoritme bleek veel te maken te hebben met Lagrange-multipliers en dat dwarsverband verraste de wiskundigen van de studiegroep. Zaal: “Uit een vergelijking van hun oplossingsmethode met onze oplossingsmethode zijn wij tot de conclusie gekomen dat hun strategie goed werkt. Aan de ene kant is het misschien teleurstellend voor hen dat het niet beter lijkt te kunnen, maar aan de andere kant kunnen ze er een bevestiging in zien van de kwaliteit van hun eigen methode.”

### Tijdshorizon

De wiskundigen hebben de Lagrange-multipliermethode vervolgens geïmplementeerd voor het concrete probleem van de vier gekoppelde waterreservoirs. “Die berekeningen laten zien dat het heel belangrijk is wat de tijdshorizon van de weersvoorspelling is”, vertelt Zaal. “Wanneer je de weersvoorspelling voor de komende tien uur goed kent, dan kan dat tot een andere strategie leiden dan wanneer je alleen maar de weersvoorspelling voor de komende twee uur kent. Hoe korter de tijdshorizon, hoe minder mogelijkheden je hebt om te anticiperen.”

Weersvoorspellingen worden voortdurend geactualiseerd. Als dan telkens helemaal opnieuw moet worden berekend wat er met de waterstromen gebeurt, is dat meestal inefficiënt. De weersvoorspelling van nu hangt namelijk sterk samen met die van over een paar uur. De vraag is dan wat een efficiënte manier is om rekening te houden met de weersvoorspelling zonder dat je telkens tachtig tot negentig procent van het gereken eerst weg-



De Maeslantkering

gooit en later weer opnieuw gaat doen. Zaal: “Wij zijn tot de conclusie gekomen dat het efficiënter is om de tijdshorizon langer te houden dan vier uur, en de resultaten van de vorige berekening deels te hergebruiken om met een betere schatting te komen.”

De studiegroep heeft het optimalisatieprobleem ook nog met een tweede methode aangepakt. Het stelsel vergelijkingen kan ook numeriek worden opgelost met Niet-Lineair Programmeren (NLP). “Je kunt NLP gebruiken om een beter inzicht in de gevoeligheid voor parameters te krijgen”, zegt Zaal. “En dat is weer handig om inzicht te krijgen in welke invloed een verandering van de weersvoorspelling heeft op de oplossing van het optimalisatieprobleem. Met deze methode hebben we laten zien hoe je de oplossing van het optimalisatieprobleem in theorie kunt laten meeveranderen met een verandering van de weersvoorspelling. Maar dit is niet meer dan een aanzet van hoe het in de praktijk kan. We hebben niet de tijd gehad om deze aanpak in een computerprogramma te implementeren.”

### Kennisexport

“Wij kunnen er geen beter product mee maken,” zegt Dirk Schwanenberg van Deltares over de resultaten van de studiegroep, “maar hun werk heeft ons wel een beter begrip gegeven van de wiskundige achtergrond van het probleem. Ik heb het heel nuttig gevonden om te zien hoe mensen met wiskundige achtergrond aankijken tegen een typisch ingenieursprobleem als het onze. Wij hadden ook

niet direct een grote doorbraak verwacht. Eigenlijk heeft de studiegroep aangetoond dat wij het probleem al vrij goed oplossen. De studiegroep heeft ook laten zien dat je onder bepaalde omstandigheden het sturingsprobleem sneller en slimmer kunt oplossen. Nadeel is wel dat de oplossingsmethode dan minder generiek wordt. Dat is voor ons geen optie.”

Deltares is inmiddels begonnen om het meenemen van de weersvoorspelling te implementeren in hun producten. Schwanenberg: “Dit jaar zijn we begonnen onze kennis te exporteren naar de Verenigde Staten, Brazilië en Uruguay. Daar gaat het vaak om watersystemen die waterkrachtcentrales bevatten. Dat levert een soort omgekeerd systeem van wat we in Nederland hebben, maar veel componenten zijn identiek aan wat we in Nederland hebben.”

De betere sturing waarop Deltares zich richt maakt ook onderdeel uit van het nationale onderzoeksproject Flood Control 2015, dat onder andere via sensoren in dijken en real-time informatie over weer en waterstanden de wateroverlast beter probeert te voorspellen en te beheersen. “De sturing van het watersysteem biedt nog veel mogelijkheden om het beter te doen”, besluit Schwanenberg.

Dit is een verslag van de Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2011, van 24–28 januari op de VU in Amsterdam. Voor de bijbehorende wetenschappelijke publicatie, waarin de gebruikte wiskundige modellen en methoden uitvoerig staan beschreven, verwijzen we u naar de website [www.few.vu.nl/swi2011](http://www.few.vu.nl/swi2011).