

Ed de Moor

Sloterkade 22-A

1058 HE Amsterdam

e.w.a.demoor@planet.nl

Wim Groen

A.W. van Voordenlaan 15

1241 AN Kortenhoef

we-groen@casema.nl

Geschiedenis

Kijkmeetkunde, een ander uitgangspunt (1970–1980)

In het juninummer van dit blad beschreven Ed de Moor en Sieb Kemme hoe het meetkundeonderwijs er voor de invoering van de Mammoetwet uitzag. Na de invoering van de Mammoetwet in 1968 verandert er veel in het meetkundeonderwijs. Euclidische meetkunde maakt plaats voor vectormetkunde en lineaire algebra. Kijkmeetkunde vindt zijn intrede. Ed de Moor en Wim Groen beschrijven in dit artikel hoe deze nieuwe ontwikkelingen tot stand kwamen. In een derde artikel in deze reeks zal ingegaan worden op de matig vertegenwoordigde theoretische meetkunde in de hoogste klassen van het voortgezet onderwijs.

Zoals in het eerste artikel in deze reeks te lezen is, is gedurende de eerste helft van de twintigste eeuw de inhoud van het wiskundeonderwijs nauwelijks aan veranderingen onderhevig geweest.¹ Dit geldt ook voor het rekenonderwijs op de lagere school. Maar in 1968 – tegelijk met de invoering van de Mammoetwet – vonden rigoureuze veranderingen plaats in het voortgezet onderwijs. Dit was onder invloed van de toen in de Verenigde Staten ontstane New Math-beweging, die het wiskundeonderwijs gedurende zo'n twee decennia heeft beheerst. Op de effecten daarvan op het Nederlandse meetkundeonderwijs in het vwo zullen we in een volgend artikel ingaan. Ook in kringen van de kweekscholen voor onderwijzers (pabo) ontstond een groep die voor het rekenonderwijs een heel andere inhoud en vorm voor ogen had dan dat van het nog van Willem Bartjens stammende 'koopmansrekenen'.

Men zegt vaak dat de New Math-omslag een gevolg was van de lancering van de Spoetnik in Rusland in 1957. De Sovjets zouden toen met hun kunstmaan een voorsprong op de Verenigde Staten genomen hebben in de

ruimtevaart en daardoor ook in wetenschap en technologie. Om deze wedloop te beslechten ontstond in de Verenigde Staten het idee dat ook het wiskundeonderwijs op de schop moest. Deze verklaring voor het ontstaan van de New Math-beweging, die ook in West-Europa aandacht kreeg, vereist onzes inziens toch enige nuancering. In het vrije Westen was al aan het eind van de jaren vijftig een vuur smeulend dat zou leiden tot de culturele en maatschappelijke revolutie van de jaren zestig, hetgeen ook zijn uitstraling had op het onderwijs. De tijd was rijp voor een dergelijke omslag.²

Het waren echter niet alleen politieke en maatschappelijke veranderingen, maar ook wetenschappelijke en technologische ontwikkelingen die hebben bijgedragen aan de wonderlijke New Math-revolutie.³ Aandrag vanuit de wetenschap om de inhoud van het wiskundeonderwijs aan te passen aan nieuwe ontwikkelingen vond al in de negentiende eeuw plaats. In 1872 had Felix Klein (1849–1925) in zijn 'Erlanger Programm' gewezen op het belang van bestudering van structuren in de wiskunde, zoals de unificatie van

groepentheorie en transformatiemetkunde. Daarmee leek hij de tijden van de New Math, waarin het structuurkarakter van de wiskunde het centrale element was, ver vooruit. Wat overigens vaak vergeten wordt is dat Klein ook een groot voorstander was van een aanschouwelijke start van het meetkundeonderwijs.

Was Klein een betrekkelijke eenling op onderwijskundig gebied binnen de wiskunde van de negentiende eeuw, vanuit de sociale wetenschappen was de invloed in de negentiende eeuw apert. Het zijn met name Duitse filosofen, pedagogen en psychologen geweest, die zich in de negentiende eeuw met de inhoud van het wiskundeonderwijs hebben bezig gehouden. Zo had de romanticus Friedrich Fröbel (1782–1852) met zijn blokken, mozaïeken en ander speelleermateriaal voor meetkunde in 1826 al een nieuw programma voor het meetkundeonderwijs voor kinderen van 4 tot 14 jaar bedacht. Hij heeft aan zijn beschouwingen ook een praktische vorm gegeven, waardoor het mogelijk was (en is) het lerende kind reeds in een vroeg stadium met symmetrieën kennis te laten maken. Zijn werk heeft grote invloed gehad, maar bleef beperkt tot de kleuterschool.⁴

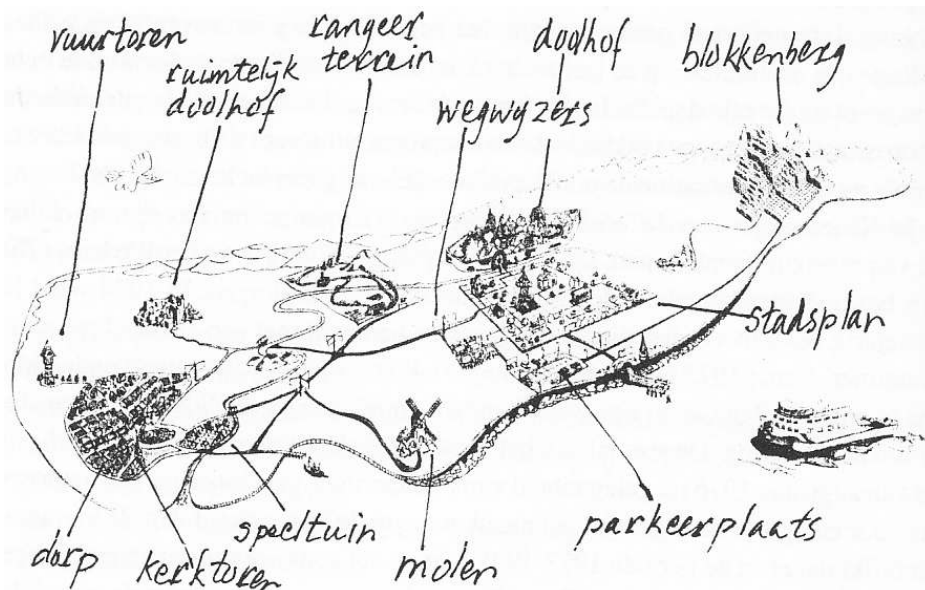
In de jaren zestig van de twintigste eeuw waren het vooral psychologen als Jean Piaget (1896–1980), Jerome Bruner (1915–) en de wiskundige/psycholoog Zoltan Dienes (1916–), die geijverd hebben voor een totaal andere aanpak voor rekenen, meten en meetkunde in het lager onderwijs. Juist door

de bemoeienissen van deze sociale wetenschappers kreeg de New Math in een aantal landen ook in het lager onderwijs voet aan de grond. Later bleek deze structuralistische aanpak van het rekenen voor het jonge kind een totale mislag. Ook in Nederland heeft de New Math invloed gehad, met name op de programma's, die in 1968 voor het voortgezet onderwijs werden ingevoerd. Dit kwam voort uit het werk van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde (CMLW), die in 1961 door de overheid was ingesteld en die zich in eerste instantie op her- en bijscholing van de leraren wiskunde in het vwo richtte. Ook hierin hadden wiskundige wetenschappers een flinke lepel in de pap. Kort gezegd, het was een samenloop van omstandigheden en vooral de tijdgeest die de wiskundige onderwijsrevolutie van de New Math heeft veroorzaakt. In het volgende zullen we nagaan hoe met deze hype gedurende de jaren zeventig in Nederland is omgegaan en wat de effecten voor het aanvankelijk meetkundeonderwijs zijn geweest.

Mede voortkomend uit de activiteiten van de CMLW werd in 1971 het Instituut voor Ontwikkeling van het WiskundeOnderwijs (IOWO) opgericht. Hans Freudenthal (1905–1990) werd hoogleraar-directeur, Edu Wijdeveld (1932–) algemeen directeur. Het is vooral de laatste geweest, die zich ingezet heeft voor de ontwikkeling van een integraal (voor alle typen onderwijs) en longitudinaal (van vier tot achttien jaar) leerplan wiskunde.⁵ Men heeft hieraan gedurende de jaren '70 in twee afdelingen gewerkt: Wiskobas (wiskunde op de basisschool) en Wiskivon (wiskunde in het voortgezet onderwijs). Zo werd meetkunde opnieuw een onderwerp van onderzoek en hernieuwde ontwikkeling, ook voor het basisonderwijs.

Wiskundige wereldoriëntatie (Wiskobas)

Aanvankelijk hield de Wiskobas-groep zich ook bezig met de verschillende uitwerkingen, die er inmiddels internationaal uit de New Math waren ontstaan, maar dit werd gezien als een periode van oriëntatie. Al snel werd een richting gekozen die aansloot bij de traditie van het Nederlandse rekenonderwijs. Wel werden naast de traditionele stof ook nieuwe leerstofvlakken als 'relaties en functies', 'waarschijnlijkheid en statistiek' en 'taal en logica' — in eenvoudige vorm — in onderzoek genomen. Het Wiskobaswerk heeft tussen 1971 en 1981 een enorm arsenaal van ontwerpen over rekenen, meten, redeneren, meetkunde en kansrekening voor de basisschool opgeleverd. Sommige onderdelen, zoals combinatoriek en kans-



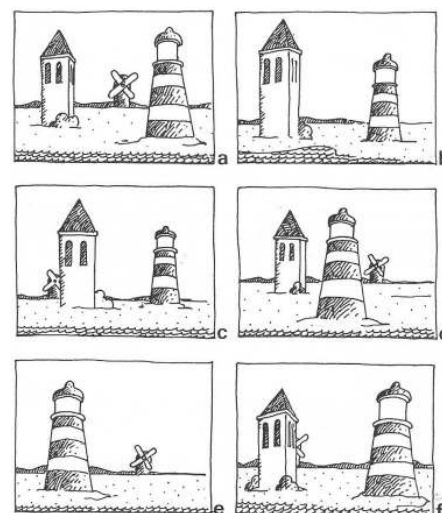
Figuur 1 Wandplaat Waterland met aanwijzingen voor meetkundige activiteiten

rekening bleken niet haalbaar. Ook de meer formele aspecten bleken te ver van de realiteit en de gewone schoolpraktijk af te staan. Uiteindelijk heeft dit er toe geleid dat de leerstof thans opgedeeld wordt in de domeinen rekenen, meten en meetkunde. Na de opheffing van het IOWO is er in de jaren '80 op instigatie van de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-Wiskundeonderwijs (NVORWO) een viertal publicaties tot stand gekomen onder de titel *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs*.⁶ Deze boeken hebben duidelijk invloed gehad op de officiële eindtermen voor de basisvorming, welke later meer gedetailleerd uitgewerkt zijn in de zogenoemde TAL-publicaties.⁷ We beperken ons in dit artikel tot de meetkunde.

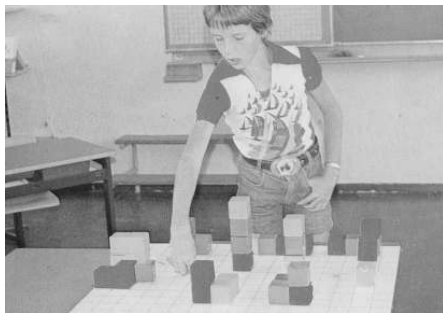
Meetkunde is gedurende de twintigste eeuw — althans tot 1993 — nooit een officieel vak van onderwijs in de lagere school geweest. Wel werd er in het kleuteronderwijs in de geest van Friedrich Fröbel en Maria Montessori (1870–1952) aandacht besteed aan ruimtelijke oriëntatie. Waren de eerste meetkundeontwerpen van Wiskobas nogal van formeel wiskundige aard, al snel veranderde dit. Voor de inhoud werd enerzijds eclectisch geput uit de experimenten uit de ontwikkelings- en leerpsychologische onderzoeken over ruimtelijk inzicht bij jonge kinderen, anderzijds bleek ook de realiteit tal van mogelijkheden te bieden tot meetkundige oriëntatie. Zo ontstond in 1973 het project *Waterland*, dat informele meetkundige activiteiten met kinderen van 7 tot 8 jaar tot doel had. Bij een wandplaat (zie Figuur 1) werden vragen gesteld als “Waarom verdwijnt een to-

ren achter een huis als je erop toeloopt?”, “Hoe verschuiven objecten op het eiland voor een waarnemer op een varende boot?”. Er waren ‘foto’s’ met de vraag “waar stond de fotograaf?” en opdrachten als “plaats wegwijzers bij een kruising” of “maak een kaart van het eiland”. Verder activiteiten als “routes beschrijven en symboliseren”, “kortste routes bepalen”, “aanzichten van blokkenbouwsels bepalen” en “meetkunde op een stadsplan(roostermeetkunde)”. De ontwerpers spraken niet van meetkunde, maar noemden deze activiteiten, die in interactieve lessen werden uitgevoerd, ‘wiskundige wereldoriëntatie’.

Voor de hogere leerjaren werden soortgelijke activiteiten, werkbladen en projecten ontworpen. Voorbeelden daarvan zijn ‘Schip



Figuur 2 Foto's vanaf een schip dat langs de kust vaart. Wat is de volgorde? (let op er zijn 2 oplossingen)

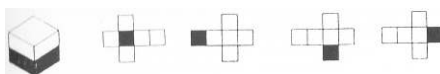


Figuur 3 Vind alle mogelijke vierkuberhuisjes

Ahoy' (een project over viseren, zie Figuur 2), de 'Vierkubers' over het vinden van alle mogelijke huisjes van vier kubusblokjes (zie Figuur 3) en 'Met de groeten van de Reus' (vergroten en verkleinen van figuren). Eigenschappen van projecties werden onderzocht door middel van activiteiten met zon- en lamschaduw. Onderzoek van de globe gaf aanleiding tot het afstandsbegrip op de bol en tot hoekberekeningen. De stand van zon, aarde en maan leidden tot meetkundige verklaringen van de wisseling der seizoenen en het dag en nachtritme.

Daarnaast kwamen ook meer traditionele onderwerpen aan de orde. Vlakke en ruimtelijke figuren werden bestudeerd met behulp van spiegelingen en draaiingen. Gelijkvormigheid werd gekoppeld aan vergroten en verkleinen. Een voorbeeld van een opgave over uitslagen van een kubus staat in Figuur 4.⁸

Het was een fenomenologische benadering van meetkunde, die Goffree als 'kijken, doen, denken en zien' omschreef. Hij bedoelde daarmee dat elke meetkundige ervaring begint met waarneming van een verschijnsel in de ons omringende ruimte (*kijken*). Daarna maak je een model of een tekening (*doen*), vervolgens breng je het verschijnsel onder woorden en plaats je het in



Figuur 4 Een kubus is voor de helft in zwarte inkt gedompeld. De onderkant is al ingekleurd. Maak de uitslagen af.



Figuur 5 Door twee punten gaat precies één rechte lijn



Figuur 6 Behoud van oppervlakte, afschuiving van rechthoek

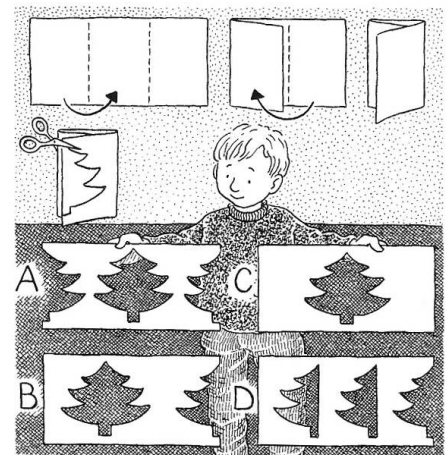
een meetkundige structuur (*denken*). Ten slotte ga je het verschijnsel ook echt zien oftewel begrijpen.⁹ Freudenthal vatte dergelijke informele, intuïtieve meetkundige ervaringen compacter samen met de term 'grasping space', het 'Be-Grijpen van de Ruimte'.

Vergelijking met een aantal voorbeeldvraagstukken uit de *Übungensammlung* van Tatiana Ehrenfest maakt duidelijk dat dit geschrift uit 1931 bewust of onbewust voor de ontwerpers van de Wiskobasmeetkunde mede een inspiratiebron geweest is.¹⁰ Een voorbeeld hiervan zien we in Figuur 5. Het gaat om een activiteit die mevrouw Ehrenfest als funderend zag om op intuïtieve wijze het begrip te doen postvatten dat een rechte lijn door twee punten bepaald wordt. In de hier afgebeelde vorm werd het als het ware het logo van de kijkmeetkunde.

Doelen en leerlijnen

Het ontbrak bij de meetkunde van Wiskobas echter aan welomschreven doelen. Ook kon niet van een duidelijke leerlijn voor dit nieuwe vak voor het basisonderwijs gesproken worden. Zo bleef het een knellende vraag wat nu eigenlijk onder meetkunde op dit niveau verstaan moest worden, waarom dit vak al op de basisschool aan de orde zou moeten komen en hoe. In praktijk werden (en worden) de domeinen meten en meetkunde nog al eens door elkaar gehaald. Voor rekenen en meten kan men lineaire leergangen opstellen, maar voor de bedoelde meetkunde-aanpak bleek dat minder gemakkelijk. Werd er in het vroegere kleuteronderwijs wel expliciete aandacht aan de *ontwikkeling van het ruimtelijke voorstellingsvermogen* besteed, op de toenmalige lagere school kwam dat niet aan de orde. Hoe precair dit onderwerp lag blijkt uit het feit dat de opstellers van de eindtermen voor de basisvorming in 1989 het domein meetkunde aanvankelijk wilden schrappen.¹¹

In 1993 werden de officiële doelen voor meetkunde voor de basisvorming nog tamelijk algemeen geformuleerd. Pas in 2004 wordt in de TAL-brochure *Jonge kinderen leren meten en meetkunde* een wat steviger houvast geboden voor de leraar. In dit boek wordt onder meer op het *praktische nut* van meetkunde en op het belang van de *voorbereidende waarde* voor het vervolgonderwijs gewezen. Tevens wordt in dit boek de meetkunde voor dit niveau ingedeeld volgens een drietal aspecten: *oriënteren*, *construeren* en *opereren*. Bij oriënteren gaat het om plaatsbepalen en viseren, waarbij toegewerkt wordt naar een eerste begrip van hoek, afstand en evenwijdigheid. Bij construeren denke men aan het



Frank vouwt een stuk papier in drieën. Daarna knipt hij deze vorm uit en vouwt hij het stuk papier weer open. Hoe ziet dat stuk opgevouwen papier er dan uit?

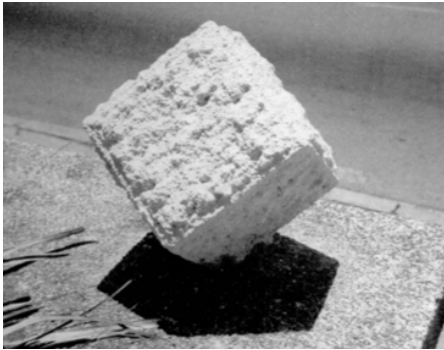
Figuur 7 Opgave 6 uit Cito-eindtoets Rekenen III uit 2011

maken van bouwsels, bouwplaten en tekeningen, bij opereren aan het kunnen toepassen van meetkundige begrippen en meetkundige operaties als het omstructureren van figuren, spiegelen, draaien, vergroten/verkleinen en projecteren. Voor een voorbeeld verwijzen we naar Figuur 6.

In de huidige reken-wiskundemethoden voor het basisonderwijs komt meetkunde voor, maar dit domein is slechts een miniem onderdeel van het totale rekenprogramma. Inhoudelijk gezien is het een schraal derivaat van het ambitieuze Wiskobasprogramma. In de schoolpraktijk wordt meetkunde vaak als een extraatje gezien. De Cito-eindtoets rekenen bevat elk jaar enkele meetkundeopgaven. In Figuur 7 zien we één van de twee meetkunde-items uit de toets van 2011, die in totaal 60 opgaven omvatte. De gemiddelde goedscore op deze vraag was 50%. Deze items zijn vrijwel ieder jaar van dezelfde vorm en inhoud: aanzichten, spiegelingen en uitslagen.

Kijkmeetkunde (Wiskivon)

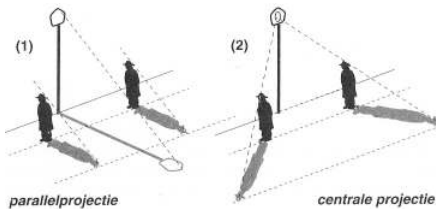
Bij de afdeling Wiskivon van het IOWO richtte men zich aanvankelijk vooral op het Lager Beroepsonderwijs (lbo) en op de eerste leerjaren van de mavo. Tussen 1973 en 1980 werden voor meetkunde twaalf 'pakketjes' (leerlingenmateriaal en handleidingen) ontwikkeld, die in scherp contrast stonden met het meetkundeprogramma van de 'moderne wiskunde'-methoden uit die tijd. Het ging de ontwerpers om begripvorming van en vaardigheid in het werken met traditioneel bekende onderwerpen als uitslagen, hoeken, op-



Figuur 8 Welke veelhoeken kun je als schaduw van een kubus krijgen als je die in de zon houdt?¹²

pervlakte, symmetrie, en de stelling van Pythagoras. Het waren tamelijk losstaande onderwerpen, die op aanschouwelijke wijze gepresenteerd werden. De bedoeling was dat het onderwijs een sterk doe-karakter zou hebben. Het verschil met het officiële programma kwam heel duidelijk naar voren in de ontwerpen *Zie je wel* van George Schoemaker (1934–2010) en *Licht op Schaduw* en *Met het oog op diepte* van Aad Goddijn (1947–). Het woord zegt het letterlijk, meetkunde begint met kijken en dat gaat volgens een rechte lijn (zie Figuur 5). Maar ook bij het afbeelden van ruimtefiguren en bij schaduwwerking, zoals te zien in Figuur 8, gaat het in feite alleen om meetkunde met de rechte lijn.

In de spullen van Schoemaker en Goddijn — de laatste heeft de term *kijkmeetkunde* als eerste gebruikt — komen de specifieke aspecten van deze aanpak van de meetkunde het meest pregnant tot uiting. Het gaat om experimenten in de klas met kijklijnen, kijkhoeken, viseren, lichtstralen, projecteren, schaduwen, en perspectief. Men zou ook van een ‘intuïtieve meetkunde van de rechte lijn’ kunnen spreken. De theoretische kern van de kijkmeetkunde ligt vervat in de principes van *parallelprojectie* en *centrale projectie* (zie Figuur 9). De intentie van de ontwerpers was om in de schoolpraktijk de leerlingen de eigenschappen van deze verschillende afbeeldingen echt te laten ervaren door experimenten uit te voeren met evenwijdige lichtstralen (zonlicht) en met een centrale lichtbron (lamp). Zo zou op intuïtieve wijze de basis gelegd kunnen worden voor het inzicht in de invariante eigenschappen van figuren bij de twee projectiemethoden. In wezen komt dat neer op enkele fundamentele eigenschappen van de elementaire meetkunde, die in Figuur 10 schematisch zijn weergegeven. Het ging dus om fundamentele meetkundige inzichten, die direct ‘gezien’ kunnen worden of zoals Goddijn het omschreef: “Het aardige van kijkmeetkunde is dat het zo gewoon



Figuur 9 Essentiële verschillen van zonnenschaduw en lampschaduw¹⁵

I: Lijn evenwijdig aan projectievlak, centrale projectie.

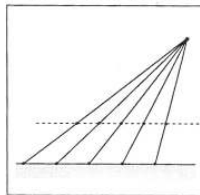


fig. 34

Situatie: schaduw door lamp.
Eigenschap: afstandsverhoudingen blijven kloppen.
Toepassing: rekenen met vergrotingsfactor en eventueel met verhoudingen in driehoeken.

II: Lijn evenwijdig aan projectievlak, parallelprojectie.

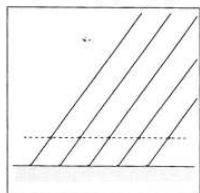


fig. 35

Situatie: schaduw door de zon, droog blijven bij regen.
Eigenschap: afstanden blijven hetzelfde.
Toepassing: bij elke situatie met twee stel evenwijdige lijnen.

III: Lijn niet evenwijdig aan projectievlak, centrale projectie.

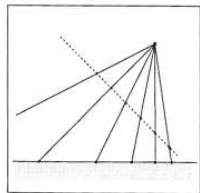


fig. 36

Situatie: algemene situatie bij schaduw door lamp.
Eigenschap: verhoudingen veranderen echt.
Toepassing: als waarschuwing bij figuur 34.

IV: Lijn niet evenwijdig aan projectievlak, parallelprojectie.

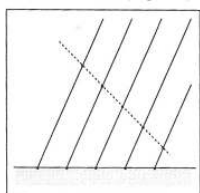


fig. 37

Situatie: schaduw door de zon.
Eigenschap: afstandsverhoudingen blijven kloppen.
Toepassing: bij rekenen met verhoudingen in diverse figuren.

V: Punten op een cirkel met gelijke afstanden, centrale projectie.

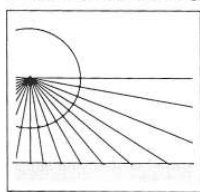


fig. 38

Situatie: schaduw van bol of cirkelvormige lampkap vanuit midden.
Eigenschap: afstanden worden ongelijk.
Toepassingen: bij redeneren over bijvoorbeeld foutieve hoogtemeting (zie bij ‘Kijkhoeken’).

VI: Gelijke afstanden op een lijn, centrale projectie vanuit midden van cirkel.

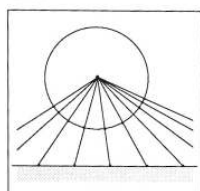


fig. 39

Situaties: kijken naar rij mensen, hoeken bepalen.
Eigenschappen: twee grenzen waar het tussen blijft, ongelijke hoeken die naar de buitenste punten kleiner worden.
Toepassing: opbouw van ervaringsbasis voor tangensbegrip.

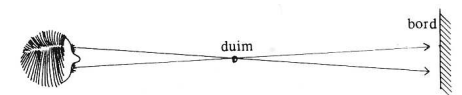
Figuur 10 Basisvormen van projectie in de kijkmeetkunde

is, dat het dicht ligt bij de gewone ervaringen van alledag. De proef met de duimsprong kan direct overal gedaan worden.” (Zie Figuur 11.) Dit alles staat uitvoerig beschreven in het boek *Achtergronden van het nieuwe leerplan wiskunde 12–16* (band 2).¹³ Zoals eerder opgemerkt, we zien gelijkenis met de ideeën van Tatiana Ehrenfest uit 1931, maar ook met het werk van Piet van Albada (1905–1997) uit 1946 en overeenkomsten met de Wiskobasmeetkunde.¹⁴

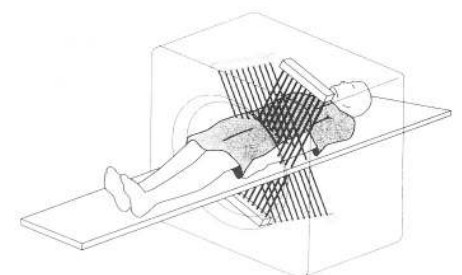
Het hierboven geschetste werk van Wiskobas en Wiskivon kunnen we zien als een nieuwe poging in de jaren 1970–1980 tot veraanschouwelijking van het aanvaankelijke meetkundeonderwijs. De nadruk lag op een aantal meetkundige oerbegrippen (rechte lijn, hoek, cirkel) en hun onderlinge relaties. Projectiemethoden speelden daarbij een centrale rol. Naast de impliciete doelen zien we hier ook de mogelijkheden tot diepere ontwikkeling van het ruimtelijk inzicht, iets dat ook van belang is in allerlei praktische beroepen (zie Figuur 12). De opzet was niet axiomatisch, maar gebaseerd op verschijnselen en ervaringen uit de realiteit. Daarbij sloot men niet alleen aan bij de historische ontwikkeling van de meetkunde (het *historisch-genetische* principe), maar men hield ook rekening met de intellectuele ontwikkeling van het kind (het *psychologisch-genetische* principe). Rest de vraag in hoeverre dit werk ook bijgedragen heeft aan de praktijk van het meetkundeonderwijs van alledag.

Invloed op schoolboeken en examens

In de jaren zeventig en tachtig was er in de praktijk niets te ontdekken van de kijkmeetkunde, omdat in het voortgezet onderwijs nog altijd het programma van 1968 gold.



Figuur 11 Doe één oog dicht en kijk met het andere oog naar de opgestoken duim aan een uitgestrekte arm. Wissel nu van oog, terwijl je duim stil blijft. Je ziet je duim verspringen ten opzichte van de achtergrond.



Figuur 12 Hoe werkt een CAT scanner? Ruimtelijk inzicht is ook een praktische vaardigheid.

De opgaven werden in verzamelingentaal geformuleerd, de meetkunde betrof eenvoudige vraagstukken over vectoren, enige analytische meetkunde en ruimtelijke berekeningen. In Figuur 13 zien we twee voorbeelden van het eindexamen mavo-D uit 1983. Voor opgave 3 waren de goedscores: 50%, 39% en 28%, voor opgave 4: 89%, 70%, 58% en 12%.

In het onderwijs van alledag bestond veel ontevredenheid over dit tamelijk structuralistische programma. Daarom stelde de overheid in 1987 de Commissie Ontwikkeling Wiskundeonderwijs (COW) in, ook wel de Commissie Van der Blij genoemd. Er moest een nieuw leerplan voor mavo/lbo en voor de eerste drie leerjaren havo/vwo komen evenals een eindexamenprogramma lbo/mavo op C-D-niveau. In 1992 werd dit programma door het zogenoemde '12–16-project' afgerond en lag er vrij vlot een nieuw 'leerplan 12–16'.¹⁶ Voor de meetkunde werden de volgende inhoudelijke gebieden onderscheiden: kijkmeetkunde, meetkunde van vormen en figuren, meetkunde over plaatsbepalen en rekenen in de meetkunde. Opnieuw een totaal andere aanpak, zoals blijkt uit de kerndoelen meetkunde voor de basisvorming:

- De leerlingen kunnen vlakke afbeeldingen van ruimtelijke figuren, zoals foto's, plattegronden, landkaarten, bouwtekeningen lezen, interpreteren, zich ruimtelijk voorstellen en weergeven op papier of scherm.
- De leerlingen kunnen concreet handelen aan de hand van voorstellingen van ruimtelijke figuren en aan tastbare voorwerpen. Zij kunnen uitslagen, patronen en dergelijke maken en vlakken uit ruimtelijke figuren op schaal (na)tekenen.

- De leerlingen kennen de stelling van Pythagoras en kunnen deze in eenvoudige situaties toepassen.
- De leerlingen kunnen eenvoudige berekeningen aan voorstellingen van ruimtelijke figuren uitvoeren.
- De leerlingen hebben inzicht in de begrippen richting, evenwijdig, rechte hoek, loodrecht en afstand.
- De leerlingen kunnen congruentie, symmetrie en patroonrelaties in of tussen figuren aangeven en eenvoudige transformaties herkennen en uitvoeren.
- De leerlingen kunnen de invloed van vergroten en verkleinen aangeven op de relatie tussen lengte en oppervlakte, tussen lengte en inhoud.

We zien dus een duidelijke afwending van het 'moderne wiskunde'-programma van 1968. Wel werd de mogelijkheid geboden om meetkunde op aanschouwelijke wijze in de brugjaren aan te bieden, maar de doelen zijn zo geformuleerd dat er geen noodzaak was om kijkmeetkunde te integreren in het programma. De uitgevers manoeuvreerden voorzichtig. De uitwerking in de schoolboeken van de jaren '90 leidde dan ook tot een meetkundeprogramma waarbij net aan de genoemde kerndoelen werd voldaan. Het idee van meetkunde als echte doe-activiteit is moeilijk in een schoolboek vorm te geven. Een begrip als kijkhoek moet echt eens ervaren worden door middel van een activiteit in de klas. De vorm is in de meeste boeken een reeks van sommen over telkens een nieuw begrip of een nieuwe vaardigheid (zie Figuur 14). Het ontbreekt veelal aan probleemstellingen met een echt wiskundige kern. Zogenoemde waarom-

vragen ontbreken, aan redeneren en bewijzen wordt beperkte aandacht besteed. Van een gestructureerde en samenhangende leerlijn kan niet gesproken worden. In feite zijn het sommenboeken met als doel op zichzelf staande begrippen en vaardigheden aan te leren. Als belangrijkste argument voor meetkunde wordt de praktische waarde van het vak aangevoerd. Bekijken we de didactische vorm van de aangeboden boeken dan is de formeel euclidische aanpak voorgoed afgeschaft. Maar ook een opzet via transformaties en of vectoren heeft het niet gehaald. Is het dan kijkmeetkunde geworden, zoals de ontwerpers van de jaren '70 die voor ogen hadden? Er zijn elementen van deze aanpak aan te wijzen, maar het verschil met de oorspronkelijke ontwerpen is fors. Zodoende is een meetkundeprogramma ontstaan, dat 'vlees noch vis' is. Bovendien is er totaal geen afstemming tot stand gebracht tussen het basisonderwijs en het voortgezet onderwijs, zowel in de formulering van de kerndoelen als in de uitwerking van de methoden. Van een doorlopende leerlijn is geen sprake.

Recapitulatie, reflectie en vooruitblik

In het eerste artikel in deze reeks hebben we gezien dat de traditionele euclidische meetkunde in de twintigste eeuw tot 1968 bepalend is geweest voor het voortgezet onderwijs. Van meet af aan werd uitgegaan van definities en axioma's. Daaruit moesten de stellingen op logische wijze uit elkaar worden afgeleid. Er werd via de bekende 'gegeven – te bewijzen – bewijs' of 'gegeven – te construeren – constructie' opgaven geoefend in logisch deduceren. Aangezien veel leerlingen daar op hun twaalfde jaar nog niet aan toe zijn, is een aantal pogingen gedaan om een meer aanschouwelijke start van het aanvankelijk meetkundeonderwijs op te stellen. In gematigde vorm heeft een dergelijke methode tussen 1958 en 1968 dienst gedaan in het onderwijs. In 1968 heeft een abrupte omslag plaatsgevonden, waarmee een einde kwam aan de euclidische aanpak. Vectormeetkunde en lineaire algebra kwamen er voor in de plaats. Ook deze opvatting over meetkunde kreeg weinig support, zeker niet op de mavo- en lbo-scholen. In dit artikel hebben we beschreven hoe daar weer op gereageerd is. In de jaren '70 is namelijk opnieuw een poging gedaan. Kijkmeetkunde werd het uitgangspunt voor een aanschouwelijke start voor het meetkundeonderwijs. Een belangrijk verschil met de pogingen uit de eerste helft van de twintigste eeuw was dat er nu ook meetkunde voor de basisschool moest komen en dat

3. In een rechthoekig assenstelsel zijn gegeven

de plaatsvectoren $\vec{OA} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{OC} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- 7 a. $\vec{OC} = p \cdot \vec{OA} + q \cdot \vec{OB}$; bereken p en q .

V is de verzameling punten P waarvoor geldt:

$$|\vec{OP}| = |\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}|.$$

- 7 b. Bereken $|\vec{OP}|$ en teken V .

Verder is gegeven $\vec{OD} = k \cdot \vec{OA}$ en $|\vec{OD}| = \sqrt{5}$.

- 8 c. Bereken k en bereken de coördinaten van D .

4. Gegeven is de balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 12$, $BC = 11$ en $CG = 10$.

Op de ribbe AB ligt een punt P zo dat $AP = 10$.

Op de ribbe EH ligt een punt Q zo dat $EQ = 5$.

- 6 a. Toon aan dat $PG = PQ$.

- 7 b. Bereken $\angle GPQ$ in graden nauwkeurig.

Op de ribbe CG ligt een punt R zo dat $GR = x$.

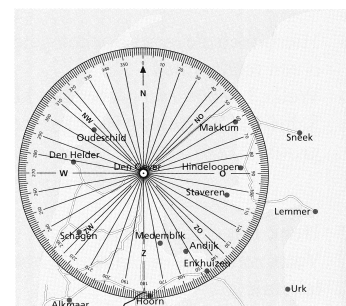
- 3 c. Toon aan dat $QR = \sqrt{x^2 + 180}$.

- 7 d. Bereken voor welke x geldt $PR = QR$.

Figuur 13 Opgaven eindexamen mavo-D uit 1983

de meetkunde voor de eerste twee jaren in het vwo vorm diende te krijgen met praktische activiteiten in de realiteit. ‘Kijken’, ‘afbeelden’ en ‘verklaren’ waren daarbij de kernactiviteiten. Dit met het doel een brede basis te leggen voor een meer formele aanpak in een later stadium. In de praktijk van het onderwijs is hier niet veel van terechtgekomen. De neerslag in de schoolboeken is veelal een wat verwaterde vorm van vanzelfsprekende realistische verschijnselen en meetkundige vaardigheden geworden, waarbij de nadruk niet op denken en redeneren ligt. Ook de achterliggende theoretische en meer gesystematiseerde meetkunde komt in het algemeen niet uit de verf. Verder blijft ook in de hogere leerjaren van het voortgezet onderwijs dit kenmerken de aspect tamelijk schraal vertegenwoordigd. In een volgend artikel zullen we hier verder op in gaan.

- 20 Stel je voor dat je met een helicopter van Den Oever naar Hoorn wilt vliegen. Je gaat in deze opdracht de *koers* van Den Oever naar Schagen meten. Dat betekent dat je uitzoekt in welke richting je moet vliegen.
 - a Leg je kompasroos op de kaart met het middelpunt op Den Oever, zoals je hiernaast ziet.
Zorg ervoor dat de noordpijl naar boven wijst.
 - b Kijk in welke richting je moet vliegen als je van Den Oever naar Hoorn vliegt.
Vul in: De koers van Den Oever naar Hoorn is ...
 - c Je vliegt daarna van Hoorn naar Schagen.
Waar leg je nu het middelpunt van de kompasroos?
 - d Vul in: De koers van Hoorn naar Schagen is ...
- 21 Vanuit Medemblik vaar je 27 kilometer. De koers is noordoost.
Bij welke plaats kom je aan?



Figuur 14 Hoeken meten met een kompasroos (uit *Moderne wiskunde 1 mavo-havo-vwo*, 1993)

Noten

- 1 Dit artikel is een vervolg op het stuk *Meetkundeonderwijs op gymnasium en hbs 1900–1968* van Ed de Moor en Sieb Kemme, NAW 5/13 nr. 2, juni 2012, pp. 102–109
- 2 Zie bijvoorbeeld Hans Righart (1995), *De einde-loze jaren zestig. Geschiedenis van een generatieconflict*, Uitgeverij De Arbeiderspers, Amsterdam.
- 3 Er was ook felle kritiek op de New Math. In 1965 gaf Nobelprijswinnaar Richard Feynman (1918–1988) een vernietigend oordeel over het onnodige formalisme in de nieuwe leerboeken. Morris Kline (1908–1992) haalde de wereldpers met zijn boek uit 1973, *Why Johnny can't add*. Een kleine geschiedenis van de New Math is te vinden in *Van vormleer naar realistische meetkunde* (verder te noemen *VVNRM*) van E.W.A. de Moor (1999), pp. 375–384.
- 4 Voor de betekenis van Fröbel voor het meetkundeonderwijs zie *VVNRM*, pp. 207–230.
- 5 Het IOWO heeft bestaan tot 1981. Toen is het leerplanontwikkelingswerk naar de Stichting Leerplan Ontwikkeling (SLO) gegaan, de nascholing naar de opleidingsinstituten. Het onderzoek bleef in Utrecht onder de naam vakgroep Onderzoek Wiskunde Onderwijs &

- Onderwijs Computer Centrum (OW&OC), later weer omgedoopt tot Freudenthal Instituut.
- 6 A. Treffers, E. de Moor en E. Feijs (1989), *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs*. Alleen in deel I van deze reeks is over meetkunde gepubliceerd.
- 7 M. van den Heuvel Panhuizen en K. Buys (red), 2004, *Longe kinderen leren meten en meetkunde*.
- 8 Meer gedetailleerde toelichting en voorbeelden zijn te vinden in het *Wiskobasbulletin*, het tijdschrift dat tussen 1971 en 1981 door het IOWO werd uitgegeven.
- 9 Fred Goffree (1992), *Wiskunde & Didactiek*, deel 2, Wolters-Noordhoff, Groningen. pp. 227–283.
- 10 T. Ehrenfest-Afanassjewa (1931), *Übungen-sammlung zu einer geometrischen Propädeuse*, Den Haag, Martinus Nijhoff.
- 11 Zie *VVNRM*, p. 457.
- 12 Deze foto komt uit *Lessen in projectieve meetkunde*, Epsilon Uitgaven (1993) van Martin Kindt. In dit boek laat de auteur zien dat ook voor de projectieve meetkunde een aan-

schouwelijke aanpak mogelijk is.

- 13 Freudenthal Instituut en SLO (1992), *Achtergronden van het nieuwe leerplan Wiskunde 12–16*, band 2. Deze publicatie gaat bijna geheel over een nieuwe aanpak voor meetkunde. Het is niet duidelijk wie de auteurs zijn van de verschillende hoofdstukken, maar het lijkt dat Goddijn hier een groot aandeel in heeft gehad. De meeste voorbeelden in dit stuk komen uit dit boek.
- 14 Voor het werk van Van Albada zie *VVNRM*, pp. 277–279.
- 15 Deze tekening is afkomstig uit *Wiskunde in een notendop* van M. Kindt en E. de Moor (2008), Prometheus Amsterdam.
- 16 Voor een heldere en leerzame analyse van het werk van de COW verwijzen we naar een artikel van H.J. Smid in de reeks ‘Het Geheugen’ in *Euclides* 87(7), juni 2012, pp. 317–320.