Derk Pik
JSG Maimonides
Postbus 87058
1080 JB Amsterdam
drpik@xs4all.nl

Boekbespreking De zeven grootste raadsels van de wiskunde

Goede vragen

Sinds het uitloven in 2000 van totaal zeven miljoen dollar voor het oplossen van een aantal beroemde wiskundige vermoedens, is de prijs nog nooit uitgekeerd, alhoewel er een van de problemen is opgelost. De problemen zelf en de wiskundigen die er aan werken, zijn door de prijsvraag wel voor het voetlicht gekomen. Er wordt meer over geschreven in de pers en men probeert de problemen, die zelfs voor wiskundigen moeilijk te begrijpen zijn, in gewone taal onder de aandacht te brengen. De zeven grootste raadsels van de wiskunde **is het eerste boek over de Clay-problemen in de Nederlandse taal. Het boek** De Riemann-hypothese **gaat dieper in op het meest beroemde van deze problemen. Derk Pik, middelbareschooldocent en hoofdredacteur van Pythagoras bespreekt de boeken.**

Hoe belangrijk is geld voor de gemiddelde wiskundige? Als Grigori Perelman hiervoor een maatstaf is, dan heeft het uitloven van geld voor het oplossen van wiskundige problemen geen zin. Nadat hij in 2002 drie publicaties op internet heeft gezet waarmee het Poincaré-vermoeden is opgelost, heeft hij de prijs geweigerd. Daarvóór wilde hij de Fieldsmedaille ook al niet in ontvangst nemen. Het lijkt erop dat prijzengeld er niet toe doet.

Toch is het geweldig voor de wiskunde dat het *Clay Institute* het prijzengeld beschikbaar heeft gesteld. Moeilijke, abstracte wiskunde komt bij het grote publiek onder de aandacht.

Het belang van de prijs

Met het instellen van deze prijs komt de wiskunde zelfbewust naar voren. Eindelijk, kan men wel zeggen, want de zeer formele aanpak van wiskunde in de vorige eeuw heeft — naast veel goeds — ook een diepe communicatiekloof teweeg gebracht tussen de beoefenaren en het gewone publiek. Hoeveel wiskundige theorieën zijn er in de vorige eeuw niet verschenen die nu totaal onleesbaar zijn door overmatige generalisatie en abstractie? Men schreef voor een select gezelschap van connaisseurs. Er ontstond een type wetenschapper dat er trots op was dat niemand hem begreep. Deze wetenschapper vindt zijn spiegelbeeld in de leek, die er trots op is dat hij van wiskunde niets begrijpt.

Aan het eind van de vorige eeuw is men het weer belangrijk gaan vinden om te communiceren met de omgeving. Dat kan men zien van laag tot hoog, van de middelbare schoolboeken tot aan de communicatiecursussen voor universiteitsmedewerkers. De buitenwereld kan steeds minder geduld opbrengen met fundamenteel onderzoek in het algemeen: het is een belangrijke taak geworden om aan de buitenwereld uit te leggen waar men zich mee bezighoudt.

Het belang van de Clayprijs kan dan moeilijk worden onderschat. Als iets een miljoen dollar waar is, dan moet het wel belangrijk zijn. De Clayprijs biedt de gehele wiskunde dus een kans: het heeft een nieuwsgierig publiek gecreëerd. Wij mogen uitleggen wat onze belangrijke problemen zijn: problemen voor een belangrijk deel voortgekomen uit fundamenteel onderzoek.

De auteurs van *De zeven grootste raadsels van de wiskunde* [1] hebben hiervoor de juiste toon gevonden. Ze vergelijken het oplossen van de moeilijke problemen met het beklimmen van hoge bergen. Het kost veel moeite, maar de vergezichten zijn verpletterend. Wat is er nu mooier dan over dergelijke barre tochten te lezen, zonder de ontberingen werkelijk te moeten ondergaan?

Het belang van de grote problemen

Aan de universiteiten en op de grote wetenschappelijke instituten in de wereld wordt eigenlijk weinig aan de grote problemen gewerkt. Althans, niet in het openbaar. De gebruikelijke *proposal*-constructie van de onderzoeksfinanciering maakt in ieder geval dat aanvragers wel uitkijken om dit soort onderwerpen aan te dragen. Veel liever schrijft men een proposal voor onderzoek waarvan het resultaat grotendeels voorspelbaar en zeker is.

Vragen als “in hoeveel jaar denkt u de eerste resultaten te behalen?” zijn voor subsidieverstrekkers normaal, maar zijn wiskundig eigenlijk heel vreemd. Hoe kan je weten hoe moeilijk een probleem is voordat je het hebt opgelost? Wiskundig onderzoek verschilt nogal van experimenteel onderzoek. Een negatief resultaat is in de wiskunde geen resultaat.

Stel je voor dat je aan de Riemann-hypothese zou willen werken, dan moet je het beter doen dan al het onderzoek dat er in de voorafgaande honderdvijftig jaar aan is gespendeerd. De kans op resultaat is gering en daar mee ook de mogelijkheid om er subsidie voor te krijgen.

Een ander punt is de openbaarheid. Deze is vanzelfsprekend aan de universiteit, maar kan het onderzoek ook in gevaar brengen. Er staat veel op het spel. Als je iets verkeerds doet, bijvoorbeeld je doet een voorbarige aankondiging van een bewijs, dan valt alles in duigen, en ligt al het werk op straat. Iedereen kan met jouw werk verder gaan, bijvoorbeeld een niet geweldig moeilijke fout repareren en vervolgens het bewijs voor zichzelf opeisen. Misschien moet je onorthodoxe paden bewandelen waar niemand enig heil in ziet. Onbegrepen zul je een eenzame weg op moeten gaan, weggehoond als overmoedige zonderling die de pretentie heeft beter te zijn dan alle voorgangers.

Toch zijn er steeds weer eenlingen die wel aan de grote problemen beginnen. Hoe gaan zij in het werk?

Gregori Perelman werkte alleen, in afzondering in St. Petersburg aan het Poincaré-vermoeden. Hij publiceerde zijn oplossing in drie afzonderlijke artikelen, zonder hierbij het vermoeden te noemen. Specialisten op het vakgebied begrepen wel meteen dat het vermoeden bewezen was.

Toen Louis de Branges een bewijs meende gevonden te hebben van het Bieberbach-vermoeden (een vermoeden uit de complexe functietheorie over de mate waarin de coëfficienten van de machtreeksontwikkeling van een univalente functie kunnen groeien) reisde hij allerlei colloquia af (onder andere het operatorentheoriecolloquium aan de VU en het analysecolloquium van het Steklov mathematisch instituut in het toenmalige Leningrad) en stuurde manuscripten in het rond met de vraag om deze te controleren. De controle van dergelijke manuscripten is een zeer zware klus, die goed op niets kan uitlopen. Hier ging het goed: het Bieberbach-vermoeden bleek bewezen.

Zijn latere pogingen om de Riemann-hypothese te bewijzen gingen op soortgelijke manier. Alleen: deze bleken niet correct.

Het verhaal van het bewijs van het vermoeden van Fermat door Andrew Wiles is bekend: ook daar zat een gat in, dat gelukkig door Wiles zelf kon worden gedicht.

Nu lijkt het abc-vermoeden bewezen te zijn door Shinichi Mochizuki van de universiteit van Kyoto in Japan. De artikelen zijn gewoon te downloaden op internet: ze zien er onbenaderbaar uit. De mensen die dit gaan controleren moeten uit de toplaag van het vakgebied komen, zullen er lange tijd mee kwijt zijn en zullen vervolgens niet delen in de roem. Nog erger zal het zijn wanneer er en fout wordt ontdekt: dan is een wetenschappelijk artikel over deze fout het hoogst haalbare.

Anders wordt het als je met een groep aan een probleem kan werken. Bij problemen die wat belangrijker zijn voor toepassingen is dit gemakkelijker te organiseren: daar is meer geld voor beschikbaar. Er zijn overal in de wereld groepen die zich bezig houden met de Navier–Stokes-vergelijkingen: ook een Clay-probleem. Als men niet het antwoord vindt op het Clay-probleem zelf, dan kan men zich altijd nog nuttig maken voor het vele toegepaste onderzoek, dat typisch bij dit onderwerp behoort.

De kwaliteit van de problemen

Dat brengt ons op de vraag: hoe goed is de Clay-lijst eigenlijk? In 1900 maakte Hilbert zijn lijst van 23 problemen bekend op het Internationale Wiskundecongres in Parijs. Steven Smale stelde op verzoek van Vladimir Arnold een soortgelijke lijst samen in 2000. In hetzelfde jaar publiceerde het Clay Institute zijn zeven problemen. Vier van de Clay-problemen staan ook bij Smale op de lijst. De lijst van Smale bevat relatief veel problemen uit de dynamische systemen en niet-lineaire analyse: vakgebieden waar Smale en Arnold actief zijn. Men kan zich voorstellen dat een getaltheoreticus met een andere lijst aankomt.

De Clay-lijst bestaat uit de volgende vermoedens en problemen.

1. Het Riemann-vermoeden: alle niet-triviale nulpunten van de ζ-functie liggen op de lijn $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}$.
2. Het Birch en Swinnerton-Dyer-vermoeden: er is een precies verband tussen de algebraïsche structuur van de rationale punten op een elliptische kromme en de aan deze elliptische kromme geassocieerde analytische L-functie.
3. Het Hodge-vermoeden: een nogal technisch vermoeden over de cohomologieklassen van een compacte complexe variëteit.
4. De vergelijkingen van Navier–Stokes: het bij nette randvoorwaarden al dan niet bestaan van een oplossing voor de differentiaalvergelijkingen van Navier en Stokes die de stroming van een gas of vloeistof beschrijven.
5. Het probleem van P versus NP: de vraag of de klasse P van algoritmen waarvoor in polynomiale tijd een oplossing te berekenen is, gelijk is aan de klasse van algoritmen waarbij slechts het *controleren* van een oplossing in polynomiale tijd behoeft te worden gedaan.
6. Het Poincaré-vermoeden: de vraag of een driedimensionaal bolopppervlak (in vier dimensies) topologisch gekarakteriseerd is door de eigenschap dat elke gesloten kromme in dit oppervlak samentrekbaar is tot een punt.
7. De Yang–Mills-theorie: het geven van een wiskundige fundering voor de belangrijkste eigenschappen van het Standaardmodel, dat de elementaire deeltjes en hun eigenschappen beschrijft.

Bij diverse problemen is het moeilijk om bondig te formuleren wat het probleem eigenlijk is. Het is daarbij ook moeilijk voor te stellen hoe belangrijk het is als bijvoorbeeld het Hodge-vermoeden wordt bewezen of weersproken.

Sommige vermoedens laten heel veel wiskunde op zijn plaats vallen, zoals de Riemann-hypothese. Andere vermoedens, zoals bijvoorbeeld de stelling van Fermat hebben dit niet. Bij het werken aan dit vermoeden zijn echter wel hele nieuwe takken wiskunde ontstaan.

Twee van de zeven Clay-problemen hebben direct betrekking op de natuurkunde: de Navier–Stokes-vergelijkingen en de Yang–Mills-theorie. Het laat zien hoe belangrijk wiskunde is voor de natuurkunde en ook hoe natuurkunde grote wiskundige vragen kan oproepen.

Een algemeen wiskundig ontwikkeld publiek

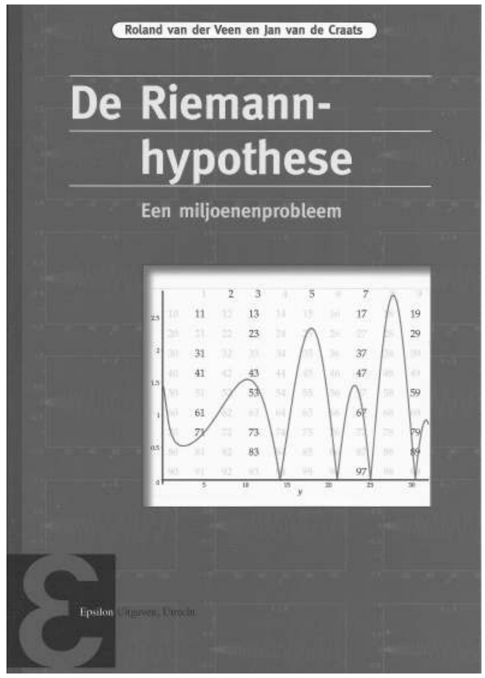
Het is jammer dat de Clay-problemen zo moeilijk aan een algemeen publiek zijn uit te leggen. Toch kan dit niet een norm voor de kwaliteit van deze problemen zijn. Er zijn vele grote open problemen die veel gemakkelijker aan het publiek zijn uit te leggen, zoals het Goldbach-vermoeden of het $3n+1$-probleem. (Zie voor een representatieve lijst problemen [6].) Het is onduidelijk of het oplossen van deze problemen beter zal zijn voor wiskundige vooruitgang.

Het belang van een resultaat kan natuurlijk niet afhangen van de mate waarin het algemene publiek het begrijpt. Aan de andere kant is het belangrijk dat er voor de moeilijk formuleerbare problemen steeds weer nieuwe, eenvoudigere equivalente formuleringen worden gevonden. Dat is goed voor het algemeen publiek, goed voor de wiskundigen die researchgeld moeten verwerven en ook goed voor de wiskundigen zelf, voor het andere gezichtspunt, voor de dwarsverbanden en voor het houden van overzicht.

Met wat slagen om de arm kunnen we criteria opstellen voor de kwaliteit van een probleem.

- Hoe veel wiskunde hangt af van het resultaat?
- Hoe lang staat het open?
- Hoeveel mensen hebben er aan gewerkt? Hoeveel is er over gepubliceerd?
- Hoe eenvoudig is het uit te leggen?

Het lijkt erop dat de Clay-problemen vooral goed scoren op de eerste drie parameters. Dit stelt de schrijvers van *De zeven grootste raadsels van de wiskunde* [1] voor een grote opgave. We mogen zeker niet verwachten dat de auteurs ons helemaal uit de doeken kunnen doen wat de problemen precies betekenen en wat de moeilijkheden zijn die de onderzoeker zal tegenkomen. Van de lezer wordt verwacht dat hij het middelbareschoolniveau toch wel enigszins is ontstegen. Met behulp van behoorlijk wat analogieën en vereenvoudigingen proberen de auteurs ons de omgeving te schetsen van de problemen.



Links: Alex van den Brandhof, Roland van der Veen, Jan van de Craats, Barry Koren, *De zeven grootste raadsels van de wiskunde*, Bert Bakker, Amsterdam, 2012, 192 p., ISBN 9789035138018, prijs € 19,95; rechts: Jan van de Craats, Roland van der Veen, *De Riemann-hypothese*, Epsilon Uitgaven, Utrecht, 2011, 112 p., ISBN 9789050411264, prijs € 19,00.

Het boek

Het boek leest zeer vlot weg; men leest het in een weekend uit en is dan op alle terreinen wel wat wijzer geworden. Niet elk probleem komt even goed uit de verf; bij het Hodge-vermoeden kom je er nauwelijks achter wat het vakgebied is, bij de Navier–Stokes-vergelijkingen ligt de nadruk te sterk op het discretiseren van het probleem en bij Yang–Mills staat de op zich prachtig gevonden analogie van gemiddelden over padintegralen van sinusfuncties te ver verwijderd van het probleem zelf. De sprong naar de deeltjesfysica is onbegrijpelijk.

Bovenstaande bezwaren zijn overigens helemaal niet erg; ik raad iedereen aan dit boek te lezen: het stelt je in staat om als stuurman aan wal mee te filosoferen over de grote problemen van de wiskunde.

We zullen dit boek vergelijken met *De Riemann-hypothese* [2] van Jan van de Craats en Roland van der Veen, beide ook auteurs van *De grootste raadsels van de wiskunde*. In dit boek komt de lezer op een andere manier in aanraking met een van de zeven grote problemen.

De Riemann-hypothese

Na een mooi inleidend hoofdstuk over de spelregels voor het winnen van de Clayprijs begint het boek met het meest beroemde open probleem. Dit probleem betreft de functie $\pi(x)$ die het aantal priemgetallen geeft kleiner of gelijk aan x. Door middel van grafieken en spannende verhalen laten de auteurs overtuigend zien dat $\pi(x)$ verrassend veel lijkt op de logaritmische integraal

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{1}{\log t}\,dt.$$

De Riemann-hypothese wordt geformuleerd door middel van de kwaliteit van deze benadering: bestaat er een positieve constante C waarbij voor alle $x \geq 2$ geldt dat

$$|\mathrm{Li}(x) - \pi(x)| < C\sqrt{x}\ln x.$$

Vervolgens wordt de zetafunctie geïntroduceerd. Het verband tussen de priemgetallenfunctie $\pi(x)$ en de zetafunctie wordt niet gemaakt: dit is voorstelbaar, want daar komt nogal wat functietheorie bij kijken. De lezer maakt wel kennis met het materiaal van de Riemann-hypothese, al kan men zich afvragen of een lezer die niet thuis is in de complexe-functietheorie zich iets voor kan stellen bij analytische voortzetting of bij nulpunten in het complexe vlak. Al met al is het een heroïsche poging om de lezer wat dichter in de buurt van de hypothese te brengen. Aan het eind van het verhaal komen we ook nog op een droomniveau van Alain Connes die verbanden ziet met energietoestanden van fictieve atomen.

Een veel verdergaand boek over de Riemann-hypothese, eigenlijk bedoeld voor middelbare scholieren, is het recent verschenen [2]. In dit boek slagen de auteurs er behoorlijk goed in om de relatie te leggen tussen de niet-triviale nulpunten van de zetafunctie en de verdeling van de priemgetallen. Dit boek is ook zeer vlot geschreven. Het bevat als belangrijke extra talloze verdiepende opgaven, die achter in het boek staan uitgewerkt. Interessant is ook hoe de auteurs gebruik maken van de internetrekenmachine Wolfram Alpha, om allerlei grafieken te plotten en zaken uit te rekenen.

De auteurs hebben een diepgaande kennis van het probleem en kiezen steeds voor de juiste balans tussen expliciete berekeningen en het weglaten van techniek. Het is een ideaal boek; het zou van grote betekenis zijn voor de toplaag van het wiskundeonderwijs als er ook zulke boeken verschenen over de andere Clay-problemen.

De stelling van Perelman

In het tweede hoofdstuk wordt het Poincaré-vermoeden behandeld. Het is erg leuk om dit hoofdstuk naast het hoofdstuk in het boek van Devlin [3] van 2002 te leggen: toen was dit vermoeden nog niet bewezen. Op het bewijs gaat [1] natuurlijk niet in, maar de toonzetting van dit hoofdstuk is echt anders: in [3] lijkt het voor de auteur nog plausibel dat het vermoeden niet waar is. Daar wordt meer aandacht besteed aan de betekenis van gestrande pogingen: ook het werken aan het Poincaré-vermoeden heeft kennelijk allerlei interessante wiskunde voortgebracht.

Eerst vertellen de auteurs over verschillende soorten tweedimensionale ruimten, zoals het boloppervlak, de torus en allerlei krakelingen. Ze laten zien door middel van paden op de torus en het boloppervlak dat deze ruimten niet gelijk kunnen zijn. Op de torus bestaan paden die in hetzelfde punt beginnen en eindigen en toch niet tot één punt samentrekbaar zijn. Deze paden bestaan op het boloppervlak niet.

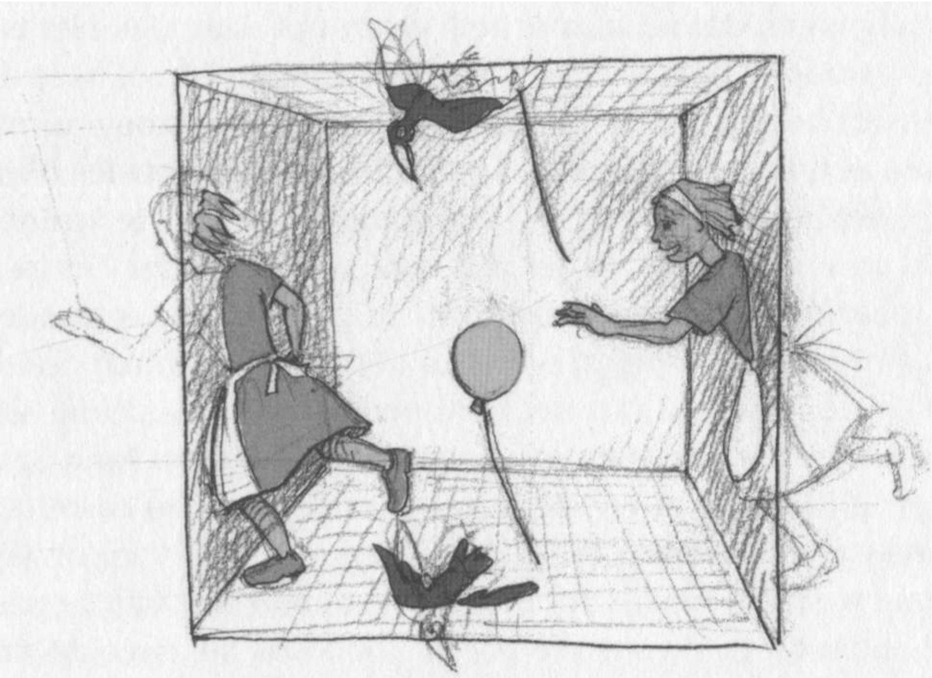
Natuurlijk zijn er meer ruimten waarvoor elk pad dat in hetzelfde punt begint en eindigt tot één punt samentrekbaar is. De auteurs vermijden al deze technische details door te praten over gesloten en begrensde oppervlakken zonder rand. Zij noemen deze kortweg ‘gesloten’. Voor lezers met een wiskundige achtergrond kan dit best verwarrend zijn. Voor het algemene publiek, waartoe dit boek zich richt is de keuze natuurlijk wel te rechtvaardigen.

Het vermoeden van Poincaré ligt dan al om de hoek: wordt een driedimensionaal boloppervlak — gesloten, begrensd, zonder rand — op dezelfde wijze gekarakteriseerd? Op dit punt aangekomen kan de lezer zelfs denken dat dat zo moeilijk niet kan zijn. Er volgen inspirerende tekeningen waaruit blijkt dat de topologie van driedimensionale ruimtes behoorlijk wat ingewikkelder zijn dan tweedimensionale (zie Figuur 1). De lezer krijgt enige notie van de verknooptheid van deze ruimtes en krijgt een indruk van de formidabele moeilijkheden van het probleem. Het Perelman-hoofdstuk is daarmee een van de sterkste van het boek.

Het P-versus-NP-probleem

Aan de hand van Euler-paden en Hamilton-paden wordt gedemonstreerd waarom het zo moeilijk is P- en NP-problemen uit elkaar te houden. Ook dit hoofdstuk is prima te begrijpen voor een lezer met een stevige algemene ontwikkeling. Het verschil tussen polynomiale en exponentiële groei wordt uitgelegd waarna de lezer goed kan begrijpen wat een P-probleem is: een probleem waarvoor een algoritme bestaat, waarvoor de rekentijd polynomiaal afhangt van de grootte van het probleem. Zo kan het sorteren van n getallen met het ‘bubblesort’-algoritme geschieden door middel van $n^2 - 3n + 2$ operaties. Dit probleem is dus in polynomiale tijd op te lossen: een P-probleem.

Voor veel problemen kennen we geen polynomiaal algoritme om het op te lossen. Toch kan het nog steeds gemakkelijk zijn om een antwoord te controleren. Een getal ontbinden in factoren kan een onmogelijke opgave zijn terwijl het controleren of het product van de factoren het juiste getal oplevert een simpele klus is op een laptop. Een dergelijk probleem, waarvoor we het antwoord wel in polynomiale tijd kunnen controleren, maar waarvoor we geen polynomialetijdalgoritme kennen, noemen we een NP-probleem. De Clay-vraag luidt: Zijn deze twee klassen hetzelfde?



Figuur 1 Een illustratie uit *De zeven grote raadsels van de wiskunde*. Het leven binnen een 3-torus wordt gesuggereerd. De illustratie is gemaakt door Marco Swaen en stond eerder in *Pythagoras*, februari 2006.

In het boek laat men aan de hand van leuke concrete voorbeelden zien hoe verrassend moeilijk het $P = NP$-probleem is, welke consequenties er zijn als het waar is, maar ook als het niet waar is. Het is een geanimeerd hoofdstuk waarin de problematiek helder naar voren komt.

De Navier–Stokes-vergelijkingen

Het eerste probleem waar de auteurs van [1] tegenaanlopen, is uit te leggen wat een differentiaalvergelijking eigenlijk is. Het volgende probleem is de complexiteit van de vergelijkingen van Navier en Stokes. De vergelijking modelleert stroming van gas of vloeistof in drie dimensies, en dit medium moet ook nog kunnen worden samengedrukt, afhankelijk van plaats en tijd. Een belangrijke vraag is, hoe goed deze vergelijking de werkelijkheid eigenlijk modelleert.

De ruimte in het boek is veel te klein om ook maar enigszins op bovenstaande aspecten in te gaan. De auteurs laten zien hoe je in de praktijk toch nog een indruk van een oplossing kunt krijgen door het probleem te discretiseren. Het resultaat van deze discretisering is een voorspelling op de korte termijn van de stroming van het gas of de vloeistof. Het zegt nog niets over de oplosbaarheid van de vergelijking in het algemeen, terwijl het daar in het Clay-probleem juist wel om te doen is.

Bij alle Clay-problemen komen veel begrippen voor die algemeen wiskundig ontwikkelde lezers niet kennen. Dit is niet anders bij differentiaalvergelijkingen. De auteurs zijn erg onvoorzichtig met begrippen zoals een krachttensor (een 3×3-matrix), en partiële afgeleiden. Het is jammer dat daar niet wat meer aandacht aan is besteed, in plaats van aan de discretisering, die bovendien voor de Navier–Stokes-vergelijkingen alleen kan worden opgeschreven met een enorm aantal indices. De vragen “wat doe je als je de werkelijkheid modelleert door middel van een differentiaalvergelijking?” en “wat betekent het als je een differentiaalvergelijking hebt opgelost?” zijn natuurlijk buitengewoon moeilijk maar wel belangrijk voor het publiek van dit boek.

Ondanks deze bezwaren is ook dit hoofdstuk wel zeer de moeite waard om te lezen: ik merk bij mezelf dat ik juist over dit onderwerp ben gaan filosoferen.

Het Birch en Swinnerton-Dyer-vermoeden

Het hoofdstuk over dit vermoeden is het meest toegankelijke van het boek. Met allerlei gemakkelijk te begrijpen voorbeelden wordt het belang getoond van het aanbrengen van een algebraïsche structuur op elliptische krommen. Je kan het begin van deze theorie volledig uit het hoofdstuk begrijpen en dat is een grote prestatie. Het Birch en Swinnerton-Dyer-vermoeden doet een uitspraak over het aantal rationale punten op deze elliptische krommen en hierbij spelen zogenaamde L-functies een hoofdrol. Pas bij de introductie van deze functies bijt de lezer in het stof. De in het boek gegeven introductie laat waarschijnlijk toe dat, met veel meer pagina's, een lezer met weinig voorkennis nog heel wat verder kan komen.

De kwantum-Yang–Mills-theorie

Dit Clay-probleem is eigenlijk geen vermoeden. Er wordt gevraagd om het standaardmodel voor de elementair deeltjes wiskundig te onderbouwen. In het boek wordt getracht de Yang–Mills-theorie uit te leggen aan de hand van het gedrag van licht. Er wordt stevig in analogieën geredeneerd: analogieën die ergens wel verbinding maken met wat in een wiskundestudie aan de orde komt: gemiddelden over padintegralen, Taylor-ontwikkelingen van een Lagrangiaan van een zeer specifieke vorm. Het is leuk om een beetje een idee te krijgen waar het allemaal mee te maken heeft, maar helaas is het te veel, te beknopt en te vaag om echt tot het begin van begrip te leiden.

Het Hodge-vermoeden

Het Hodge-vermoeden wordt uitgedrukt in dermate abstracte termen, dat het de auteurs van het boek niet is gelukt om duidelijk te maken waar het in dit vermoeden over gaat. Eerst wordt de formule van Euler gedemonstreerd aan de hand van de platonische lichamen. Daarna wordt het Euler-karakteristiek van andere veelvlakken besproken, zoals van de torus en de Klein-fles. Wat dit te maken heeft met cohomologiegroepen wordt niet meer uitgelegd: daar is wel wat voor te zeggen, alleen: deze algebraïsche structuur is nu juist wel het hoofdonderwerp van het Hodge-vermoeden.

Het is echt jammer dat de auteurs aan het eind van dit hoofdstuk het vermoeden op een onbegrijpelijke manier formuleren, met veel onbekende termen, om daarna te concluderen dat het zeer moeilijk is: "Een rationale cohomologieklasse in $H^{2p}(X,\mathbb{Q})$ wordt gerepresenteerd door een algebraïsche subvariëteit dan en slechts dan als zijn harmonische vorm van het type (p,p) is. Ga er maar aan staan!"

Waarschijnlijk is het correct wat er staat, en dus hoeven de paar kenners in Nederland die deze zin kunnen lezen zich er niet aan te storen. De rest van de lezers moet geloven dat iets wat moeilijk geformuleerd is, ook moeilijk is. En dat is natuurlijk onzin. Wiskundigen zijn het meeste toegerust van alle wetenschappers om dingen op te schrijven die niemand begrijpt. En dat is geen verdienste.

Ik denk overigens dat er wel een mogelijkheid bestaat om voor een algemeen publiek te schrijven over cohomologieklassen. Als uitgangspunt is bijvoorbeeld te nemen het kraakhelder geschreven, calculusachtige *Analysis on Manifolds* [4], waarna de gesloten en exacte vormen kunnen worden begrepen aan de hand van padintegralen uit de natuurkunde. Ook dan wordt het een moeilijk verhaal, maar komen we dichter in de buurt van het Hodge-vermoeden.

Conclusie

Ondanks mijn bedenkingen bij verschillende passages vind ik dat iedereen die in wiskunde is geïnteresseerd dit boek moet lezen. Het heeft mij in een aantal gevallen dichterbij de Clay-problemen gebracht. Het boek op z'n best geeft je het heerlijke gevoel dat de auteurs niet ver genoeg zijn gegaan.

Het boek richt zich op een algemeen geïnteresseerd publiek: toch heb ik er bij het lezen een aantal keren echt nut van gehad dat ik een wiskundige ben, in staat om allerlei analogieën op een diepere manier te plaatsen.

Een andere benadering

Je raakt het beste thuis in een wiskundig onderwerp als je er mee kan werken, als je er sommetjes over kan maken. Daarom wil ik hier ook het boek *De Riemann-hypothese* aanbevelen. Zoals hierboven beschreven, gaat dit boek aanmerkelijk dieper in op deze hypothese en krijgt de lezer de gelegenheid er thuis in te raken door er opgaven over te maken.

Dit boek is bedoeld voor de middelbare school. Het zal voor veel vwo'ers aan de pittige kant zijn, maar voor andere vwo'ers geweldig inspirerend. Eigenlijk komt de Riemann-hypothese in zo'n boek veel beter tot zijn recht. Het lijkt mij geweldig wanneer er nog zes van dit soort boeken zouden kunnen verschijnen, over de andere Clay-problemen, het liefst met een overvloedig aantal opgaven, zodat je zelf aan de slag kan. Dat is goed voor onze algemene wiskundige ontwikkeling, onze kennis van de grote wiskundige problemen en ook is het inspirerend voor middelbare scholieren.

Aan mij is een boek vol met opgaven, zijpaden en open einden beter besteed dan *De zeven grootste raadsels van de wiskunde*. Toch vind ik laatstgenoemd boek een groot succes. Zonder al te veel kleerscheuren op te lopen, hebben de auteurs een enorme prestatie geleverd. Zij hebben zeven zeer abstract geformuleerde problemen op een heldere manier voor het voetlicht gebracht.

Referenties

1 Alex van den Brandhof, Roland van der Veen, Jan van de Craats, Barry Koren, *De zeven grootste raadsels van de wiskunde*, Uitgeverij Bert Bakker, Amsterdam, 2012.

2 Jan van de Craats, Roland van der Veen, *De Riemann-hypothese*, Epsilon Uitgaven, Utrecht, 2011

3 Keith Devlin, *The Millennium Problems*, Granta Books, London, 2002.

4 James R. Munkres, *Analysis on Manifolds*, Addison-Wesley Publishing Company, The Advanced Book Program, Redwood City, 1991.

5 www.claymath.org/millennium, website van de officiële formulering van de Clayproblemen, 2000.

6 *Wikipedia-lijst van onopgeloste wiskundige problemen*, http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_unsolved_problems_in_mathematics, 2007.