

Eric Cornet

Ambachtstraat 13

3512 ER Utrecht

e.e.cornet@students.uu.nl

Onderwijs Mastermath-cursus Didactiek

Met de trein van Utrecht naar Ankara: over oneindig gesproken

In de context van een Mastermath-cursus Didactiek lukte het studenten Eric Cornet en Rianne Maes (beiden UU) om een wetenschappelijk artikel te mogen presenteren bij de Psychology of Mathematics Education (PME)-conferentie in Ankara, juli 2011. Rianne Maes was verhinderd. Dit artikel is een persoonlijke reflectie van Eric Cornet.

Stel je voor, je speelt het volgende gedachte-spel: links van je ligt een berg pingpongbal- len, het is een vrij grote berg, namelijk oneindig groot. Alle pingpongballen zijn netjes geordend en genummerd, 1, 2, 3, ... Voor je staat een ton, het is een flinke ton, alle ballen passen erin. Recht naast je ligt niets. Het spel duurt precies één minuut. In de eerste helft van de tijd, dus in 30 seconden, doe je het volgende: je pakt links van je de ballen nummer 1 tot en met 10, legt die voor je in de ton en je pakt bal nummer 1 er weer uit en legt deze rechts van je neer. In de helft van de resterende tijd, dus in 15 seconden, pak je de ballen nummer 11 tot en met 20. Je stopt ze in de ton en je pakt bal nummer 2 weer uit de ton en legt deze rechts naast je neer. Zo ga je door. In de helft van de resterende tijd pak je de ballen nummer 21 tot en met 30, legt ze in de ton en je pakt bal nummer 3 er weer uit. En zo ga je verder. De vraag is nu: Na die ene minuut, hoeveel ballen zitten er in de ton?

De fascinatie voor oneindig

Oneindig is een onderwerp dat me altijd gefascineerd heeft. Toen we vorig jaar bij de Mastermath-cursus Didactiek in groepen van twee een onderzoek onder middelbare scholieren moesten doen, was de richting snel bepaald. Iets met oneindig. Na het lezen van het artikel 'Paradox as a lens for exploring notions of infinity' van Mamolo en Zazkis [4] kwamen we op het idee om hun onderzoek te volgen en het pingpongbalvraagstuk (PPBV) te gebruiken. Het werd uiteindelijk: Welke problemen ondervinden middelbare scholieren bij het oplossen van problemen over oneindig? En hoe pakken ze het PPBV aan als ze weten wat kardinaliteiten zijn?

De treinreis naar Ankara

We moesten een artikel schrijven dat aan alle eisen van de Psychology of Mathematics Education (PME)-conferentie voldeed. Dit heb ik samen met mijn studiegenoot Rianne Maes gedaan. Onze docenten, Nellie Verhoef (UT) en Pauline Vos (UvA), raadden ons aan om het artikel als Research Report (RR) in te sturen. Twee maanden later kregen we een e-mail van de PME-organisatie: *accepted!* Dat betekent dat we ons onderzoek mochten presenteren op de PME-conferentie die dit jaar in Ankara werd gehouden. Hier zaten natuurlijk kosten aan verbonden die we voor een deel probeerden te dekken met subsidie van het A.F. Monna Fonds en het U-fonds. Studiegenoot Rianne kon uiteindelijk helaas niet meegaan. De reis naar Ankara was erg leuk. Een vriend wilde met mij van de gelegenheid gebruikmaken om meer van Turkije te zien. Om die reden besloten we om met de trein van Utrecht naar Ankara te gaan. Vanwege een tentamen moest de heenreis in één ruk. Van Utrecht naar Ankara in 63 uur, met twee keer een klein sprintje om over te stappen. In Ankara was het nog een heel gedoe om de locatie te vinden, maar met veel geduld kwamen we er. De presentatie ging goed. Er waren naderhand veel vragen en de vragen waren kritisch. Dat gaf aan dat er goed geluisterd werd en dat men geïnteresseerd was. Een erg leuke ervaring!

Theorie

Voor het artikel hebben we ons eerst verdiept in de bestaande theorieën en gekeken welke we konden gebruiken als fundament voor ons onderzoek. Volgens Sfard [5] zijn er twee manieren waarop mensen over een wiskun-

dig begrip kunnen denken. Je kan het zien als een proces, of je kan het zien als een object. Het begrip oneindig zien als een proces betekent bijvoorbeeld dat je oneindig ziet als eindeloos, 'voor altijd doorgaand'. Naarmate een onderwerp beter bestudeerd en begrepen wordt, zal het begrip meer als een object gezien worden. Volgens Hazzan [3] reduceren mensen de mate van abstractie bij de introductie van een nieuw wiskundig begrip. Omdat de eigenschappen van oneindige verzamelingen nogal wat verschillen van de eindige verzamelingen zorgt dit voor problemen. Daarnaast en daardoor zijn volgens Fischbein, Tirosh en Hess [2] de eigenschappen van oneindige verzamelingen contra-intuïtief.

Het moest een verkennend onderzoek worden, er werd ons op het hart gedrukt dat we het beperkt moesten houden. Dat is ons gelukt. We hadden een 4-vwo-klas wiskunde D tot onze beschikking. De klas bestond uit vijf leerlingen en de middag van het onderzoek waren er ook nog twee ziek. We wilden de leerlingen eerst een aantal opdrachten over verzamelingen geven. Het PPBV leek ons dan een handig gereedschap om de bovenstaande theorieën te testen.

We hebben de leerlingen eerst opdrachten over verzamelingenleer laten maken. Hierin werd het begrip kardinaliteit uitgelegd. Daarna werd het PPBV voorgelegd. Alle opdrachten moesten eerst individueel en schriftelijk gemaakt worden. Daarna werden ze in een groepsdiscussie besproken. Dat was erg leuk om te doen. De leerlingen waren enthousiast en ze konden hun redeneringen goed onderling delen. De discussie werd opgenomen en tijdens het analyseren werd al snel duidelijk waarom we het 'beperkt' moesten houden.

En?

De resultaten van de opdracht over verzamelingenleer waren zoals verwacht. De leerlingen bleven 'oneindig' vooral als een proces

	Eerste antwoord			Antwoord na discussie		
	De minuut eindigt niet	Oneindig veel ballen in de ton	De ton is leeg	De minuut eindigt niet	Oneindig veel ballen in de ton	De ton is leeg
L1	X				X	
L2	X				X	
L3	X	X			X	

Tabel 1 De antwoorden op het PPBV

zien en volgden vaak hun intuïtie van een lager abstractieniveau. Ze hadden moeite met het accepteren dat voor oneindige verzamelingen een deelverzameling even groot kan zijn als de gehele verzameling. Op de vraag of de verzamelingen E , van positieve gehele getallen, en de natuurlijke getallen N even groot zijn, antwoordde een van de leerlingen:

L3: “Laat elk getal corresponderen met een dier. Alle elementen die in E voorkomen zitten ook in N . Stel 3 is een geit, dan zit er geen geit in E , maar alle dieren in E zitten in N , dus N is groter.”

Daarnaast hadden ze weinig vertrouwen in een een-op-een-correspondentie.

L2: “Als het bestaan van een een-op-een-correspondentie de definitie is voor de gelijkheid van de kardinaliteit van twee verzamelingen, dan is het waar [er zijn even veel positieve even getallen als natuurlijke getallen].”

Het lukte L2 wel om een goede een-op-een-correspondentie te maken, maar de conclusie dat de twee verzamelingen gelijk zijn was te contra-intuïtief en werd niet gemaakt. Hetzelfde geldt voor L1.

L1: “Je kan een correspondentie maken, maar B heeft altijd een element meer.”

Tijdens de groepsdiscussie kwam een student met een reactie die het contra-intuïtieve van Fischbein et al. [2] mooi aangeeft:

L2: “Ik denk niet dat je me een definitie van oneindig kunt geven die ik kan accepteren.”

De leerlingen hadden er moeite mee dat het PPBV een gedachtespel was. In overeenstemming met Sfard zagen ze het telkens delen van de tijd als een proces dat ‘eindeloos’ zou doorgaan. Bij alle drie was hun individuele antwoord dan ook dat de minuut niet zou eindigen.

L1: “Voor degene die de ballen pakt zal de

minuut nooit eindigen, omdat hij de actie eindeloos blijft herhalen.”

L3: “De minuut eindigt niet. Je kan ook zeggen dat er oneindig veel ballen in de ton gaan en er ook oneindig veel weer uit gaan. Maar er gaan elke keer meer ballen in dan eruit, dus vlak bij de 60 seconden zullen er oneindig veel ballen in de ton zitten.”

Het antwoord van L3 is tegenstrijdig, op elk moment vóór de 60 seconden zijn er immers maar eindig veel handelingen verricht. Maar je ziet het goede antwoord verborgen zitten.

Tijdens de groepsdiscussie, en na het vertellen van een variant op een paradox van Zeno, accepteerde de leerlingen dat het om een gedachte-experiment ging en dat de minuut kon eindigen. Ze kwamen tot de conclusie dat er oneindig veel ballen in de ton moesten zitten. Bij elke handeling gingen er immers negen keer meer ballen in dan uit de ton en “negentien keer oneindig is oneindig”. Op de vraag of ze, aangezien er genoeg ballen in de ton zitten, een getal konden noemen van een bal in de ton reageerde L3.

L3: “Oh nee, er zitten geen ballen meer in de ton...”

Wat betekent dit?

De leerlingen L1 en L2 hadden vooral moeite met de contra-intuïtieve eigenschappen van oneindig. Door reduceren van het abstractieniveau naar eigenschappen van eindige verzamelingen was het moeilijk om de opdrachten goed te beantwoorden. L3 wist de meeste vragen goed te beantwoorden, maar bleef oneindig toch ook vooral als een proces zien, en niet als een object.

Voor het PPBV hadden we vooraf drie mogelijke antwoorden bedacht.

1. De minuut eindigt niet.
2. Je stopt elke keer meer ballen in de ton dan

dan dat je eruit haalt, dus er zitten uiteindelijk oneindig veel ballen in de ton.

3. Elke bal die je erin stopt haal je er ook weer uit, dus de ton is leeg.

We hebben de antwoorden van de leerlingen in een schema gezet, zie Tabel 1. In de tweede rij staan de drie mogelijke antwoorden. In de tweede kolom staan de individuele antwoorden van de leerlingen en in de derde kolom staan de antwoorden na de groepsdiscussie.

Dat de leerlingen denken dat de minuut niet eindigt, geeft aan dat ze oneindig vooral als ‘een proces dat nooit ophoudt’ zien. Na de groepsdiscussie reduceren ze de mate van abstractie: er gaan immers bij elke handeling meer ballen in de ton dan eruit. Het valt op dat geen van de leerlingen het PPBV oplost.

Opvallend

Het was opmerkelijk dat geen van de leerlingen de geleerde stof gebruikte bij het beantwoorden van het PPBV. Dit gebeurde in het onderzoek van Mamolo en Zazkis [4] wel. Een verklaring hiervoor kan zijn dat onze leerlingen jonger waren dan in het voorgaande onderzoek. Wat verder opvalt is dat het in beide onderzoeken geen van de studenten is gelukt om het vraagstuk op te lossen. Dit geeft reden om te twifelen aan de doeltreffendheid van het vraagstuk bij het bestuderen van het begrip oneindig. Het is redelijk om te concluderen dat het PPBV te contra-intuïtief is voor deze middelbare scholieren en andere mensen die geen wiskundige scholing gehad hebben op universitair niveau. Deze groep mensen heeft nog te weinig wiskundig zelfvertrouwen om bij het wiskundig redeneren meer op hun redenering te vertrouwen dan op hun intuïtie.

Nawoord

Met dank aan het A.F. Monna Fonds en het Utrechts Universiteitsfonds voor de verleende subsidie. Het Utrechts Universiteitsfonds — opgericht in 1886 — is met 10.000 begunstigers de oudste en grootste begunstigersorganisatie van alumni, (oud-)medewerkers en studenten in Utrecht. Dankzij hun bijdragen kan het Utrechts Universiteitsfonds al meer dan honderd jaar onder andere wetenschappelijke, culturele en sportieve activiteiten van Utrechtse studentenverenigingen ondersteunen. Wilt u hier in de toekomst ook aan bijdragen? Zie www.ufonds.uu.nl.

Referenties

- 1 E. Cornet, R. Maes, N.C. Verhoef en H.P. Hendrikse, High School Students' Problems With Infinity, 2011, Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3, pp. 161–168, Turkey: University of Ankara.
- 2 E. Fischbein, D. Tirosh en P. Hess, The intuition of infinity, 1979, *Educational Studies in Mathematics*, 10, pp. 3–40.
- 3 O. Hazzan, Reducing Abstraction Level When Learning Abstract Algebra Concepts, 1999, *Educational Studies in Mathematics*, 40, pp. 71–90.
- 4 A. Mamolo en R. Zazkis, Paradox as a lens for exploring notions of infinity, 2008, Proceedings of the 32th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3, pp. 353–360, The Netherlands: Utrecht University.
- 5 A. Sfard, On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin, 1991, *Educational Studies in Mathematics*, 22, pp. 1–36.