

Harrie Broekman*Universiteit Utrecht*
*h.g.b.broekman@uu.nl***Nellie Verhoef***Faculteit Gedragwetenschappen, instituut ELAN*
Universiteit Twente
Postbus 217
7500 AE Enschede
*n.c.verhoef@utwente.nl***Biografie Pierre Marie van Hiele (1909–2010)**

Een leven lang wiskundig denken

Op 1 november 2010 overleed Pierre Marie van Hiele op de respectabele leeftijd van 101 jaar. Harrie Broekman en Nellie Verhoef blikken terug op zijn leven en werk. Een hommage aan een markant mens. Zijn invloed bleef niet beperkt tot de vorige eeuw maar is ook vandaag nog springlevend.

Begin vorige eeuw wees Pierre van Hiele al op de ontwikkeling in het wiskundig denken van kinderen. Hij benadrukte de rol van de docent die oog heeft voor individuele leerprocessen. Zijn vrouw Dina complementeerde zijn visie met uitdagend lesmateriaal.

Pierre van Hiele was een veelzijdig mens: wiskundeleraar, wiskundendidacticus, leerboekenauteur, (vakdidactisch) onderzoeker en — niet te vergeten — observator en verslaglegger (Figuur 1).

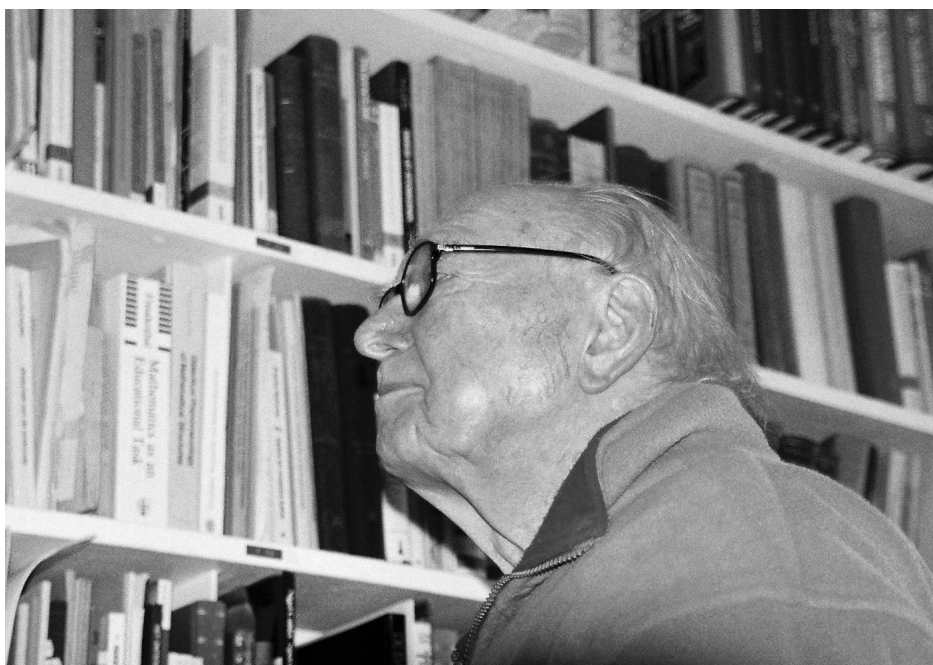
“De wereld van de waarneming, waarin het gezichts- en het gehoorvermogen als technische wonderen ontwikkeld zijn, is basis voor een denken dat oorspronkelijk non-verbaal is, maar waarin zich bij de mens langzamerhand een taal ontwikkelt. Die taal maakt het mogelijk hogere rationele denkniveaus te bereiken. Het menselijk denken kan daarmee tot enorme prestaties gevoerd worden. Dit heeft ertoe geleid in de psychologie van het denken zich voornamelijk te richten op intellectuele prestaties. Men kan er zelfs toe komen een lager denken te ontkennen omdat dat denken niet rationeel toetsbaar is. Toch bestaat dit visuele denken wel en maken wij er voortdurend gebruik van.” [8]

Van jongs af aan

Als scholier was Pierre al bezig met het helpen van jongere leerlingen ‘wiskunde te le-

ren’. Vanaf die tijd was hij ook al dusdanig kritisch op het beschikbare lesmateriaal dat hij pogingen ondernam om aangepast/verbeterd materiaal te ontwikkelen. Dit leidde onder andere tot een aantal leerboeken — samen met zijn eerste vrouw Dina van Hiele-Geldof — en de latere leerboekenserie *Van A tot Z*. Het was tevens de aanzet tot het levenslang bestude-

ren van het leren ‘redeneren’ in de wiskunde: “In 1944 gingen wij er over denken zelf boeken te schrijven. Het eerste boek zou heten *Werkboek der algebra*. We hadden in het begin een tabel gemaakt van de machten van 2, waarbij we doorgingen tot 2^{64} . Als je 64 wilde vermenigvuldigen met 256 dan zag je dat er naast 64 stond 6 en naast 256 stond 8. Je telde die twee getallen op, dat was 14 en de conclusie was dat 64×256 gelijk was aan 16384 (Figuur 2). Er was ook een tabel met machten van 5 waarmee je op dezelfde manier kon werken (Figuur 3). Maar je kon ook



Figuur 1 Pierre van Hiele inspecteert zijn leerboeken

Tabel der machten van 2			
1	2	31	2 147 483 648
2	4	32	4 294 967 296
3	8	33	8 589 934 592
4	16	34	17 179 869 184
5	32	35	34 359 738 368
6	64	36	68 719 476 736
7	128	37	137 438 953 472
8	256	38	274 877 906 944
9	512	39	549 755 813 888
10	1 024	40	1 099 511 627 776
11	2 048	41	2 199 023 255 552
12	4 096	42	4 398 046 511 104
13	8 192	43	8 796 093 022 208
14	16 384	44	17 592 186 044 416
15	32 768	45	35 184 372 088 832
16	65 536	46	70 368 744 177 664
17	131 072	47	140 737 488 355 328
18	262 144	48	281 474 976 710 656
19	524 288	49	562 949 953 421 312
20	1 048 576	50	1 125 899 906 842 624
21	2 097 152	51	2 251 799 813 685 248
22	4 194 304	52	4 503 599 627 370 496
23	8 388 608	53	9 007 199 254 740 992
24	16 777 216	54	18 014 398 509 481 984
25	33 554 432	55	36 028 797 018 963 968
26	67 108 864	56	72 057 594 037 927 936
27	134 217 728	57	144 115 188 075 855 872
28	268 435 456	58	288 230 376 151 711 744
29	536 870 912	59	576 460 752 303 423 488
30	1 073 741 824	60	1 152 921 504 606 846 976
		61	2 305 843 009 213 693 952
		62	4 611 686 018 427 387 904
		63	9 223 372 036 854 775 808
		64	18 446 744 073 709 551 616

Figuur 2 Tabel der machten van twee

Behoort bij
WERKBOEK DER ALGEBRA
I en II
 door Dr. P. M. van HIELE en
 Dr. D. van HIELE-GELDOF
 Uitgave van J. Muusses N.V. Purmerend

Tabel der machten van 3		Tabel der machten van 5	
1		1	5
2		2	25
3		3	125
4		4	625
5		5	3 125
6		6	15 625
7		7	78 125
8		8	390 625
9		9	1 953 125
10		10	9 765 625
11		11	48 828 125
12		12	244 140 625
13		13	1 220 703 125
14		14	6 103 515 625
15		15	30 517 578 125
16		16	152 587 890 625
17		17	762 939 453 125
18		18	3 814 697 265 625
19		19	19 073 486 328 125
20		20	95 367 431 640 625
21		21	476 837 158 203 125
22		22	2 384 185 791 015 625
23		23	11 920 928 955 078 125
24		24	59 604 644 775 390 625
25		25	298 023 223 876 953 125
26		26	1 490 116 119 384 765 625
27		27	7 450 580 596 923 828 125
28		28	37 252 902 984 619 140 625
29		29	186 264 514 923 095 703 125
30		30	931 322 574 615 478 515 625

Figuur 3 Machten van 5

bedenken dat $2 \times 5 = 10$, zodat bijvoorbeeld $2^5 \times 5^5 = 10^5 = 100.000$. Op die manier waren er allerlei aardige vraagstukken te bedenken. Direct na de oorlog gingen we dit boek aan Wolters aanbieden, maar daar hielden ze de boot af." [7]

Via 'Vernieuwing' kwamen Pierre en Dina bij de uitgeverij Muusses terecht. Hier werd vanaf de jaren 60 ook de eerder genoemde leerboekenserie *Van A tot Z* uitgegeven. Deze methode was een volledige reeks werkboeken met bijbehorende werkschriften voor alle leerjaren (en alle typen) van het voortgezet onderwijs. Aan de methode lagen een aantal duidelijk geformuleerde didactische principes ten grondslag (Figuur 4).

Wiskundige begrippen werden intuïtief ingeleid. Leerlingen werden uitgedaagd om aan de slag te gaan, ieder op zijn eigen ontwikkelingsniveau. Zo was de aanpak, de tekst en daarbij passende illustratie toegesneden op de individuele mavo-leerling (Figuur 5) of vwo-leerling (Figuur 6).

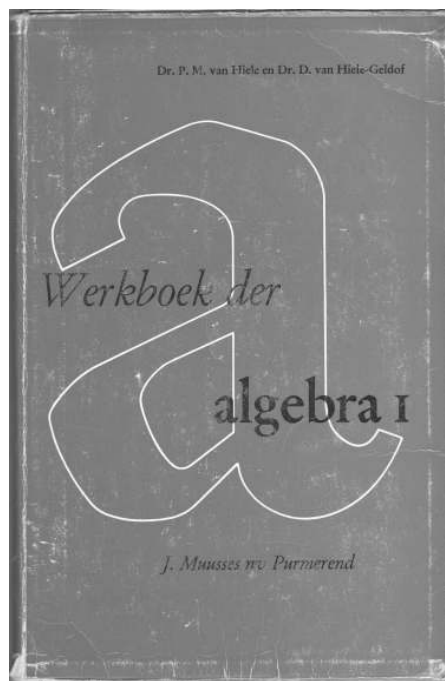
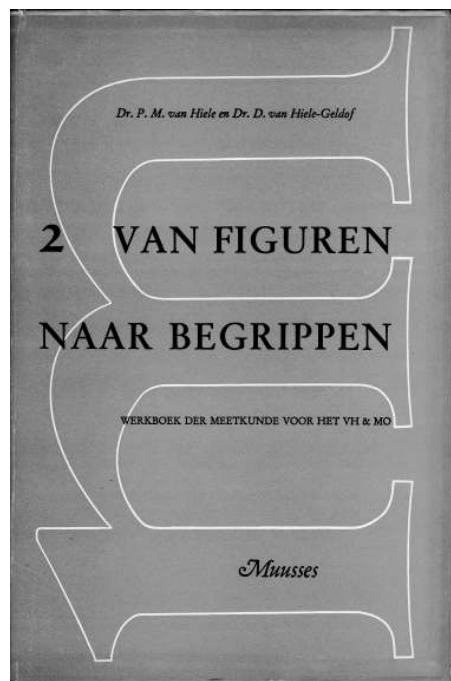
Op de intuïtieve aanpak volgde een geleidelijke groei naar deductief denken, waarbij de plaatjes steeds minder nodig zijn en waarbij de taal langzaam steeds formeler wordt. De methode *Van A tot Z* moest opboksen tegen de meer algoritmische methodes, met automatiseren als hoogste doel. *Van A tot Z* redde het uiteindelijk niet en ging samen met uitgeverij Muusses ten onder. Wel was er nog een — tijdelijke — voortzetting middels een uitgave van de wiskundewerkschriften via vakpublicaties.

Observatie als methode van onderzoek

Van Hiele gaf ruim 40 jaar les aan 12 tot 18 jarigen, en bleef de daarbij opgedane ervaringen benutten bij het denken over, en het werken aan een verdere theorievorming. Dit leidde tot vele publicaties waarin hij zijn ideeën over de ontwikkeling in 'denkniveaus' verder ontwikkelde (Figuur 7).

Van Hiele liet zich zijn hele werkzame leven inspireren door het observeren van lerende leeftijdgenoten en kinderen. Wezenlijk voor zijn werk was echter vooral dat hij tot het eind toe bezig was met het weergeven, beschrijven en doordenken van zijn observaties. Voor wat betreft het leren van wiskunde hanteerde hij daarbij zeer nadrukkelijk het principe dat het leerproces dient aan te sluiten bij de intuïtieve, informele wiskunde die lerenden hebben geleerd door eigen experimenten. Motivatie speelde daarbij een belangrijke rol, evenals 'structuur' [1].

Pierre en zijn vrouw bewonderden de onderzoeksmethoden van Piaget — *observeren*



Figuur 4 Werkboeken, uitgegeven bij Muusses

en *luisteren* — maar deelden de conclusies van Piaget dat wiskundig begrip zich ontwikkelt door ‘ouder worden’ of door ‘natuurlijke groeiprocessen’ beslist niet. Al vrijwel vanaf zijn allereerste publicaties benadrukt hij — geïnspireerd door de praktijk van het lesgeven — het belang van het (gefaseerde) leren van kinderen, ondersteund door zorgvuldig samengesteld materiaal en de begeleiding door een goede docent. Het blijft jammer dat hij hierover — voor zover bekend — nooit een echte dialoog heeft kunnen/willen voeren met Freudenthal. Zo’n dialoog zou zeker geen gemakkelijk gesprek geweest zijn: Van Hiele was op zoek naar essentiële kenmerken van begrip/inzicht met als uitgangspunt de lerende en de gedachte dat reflectief

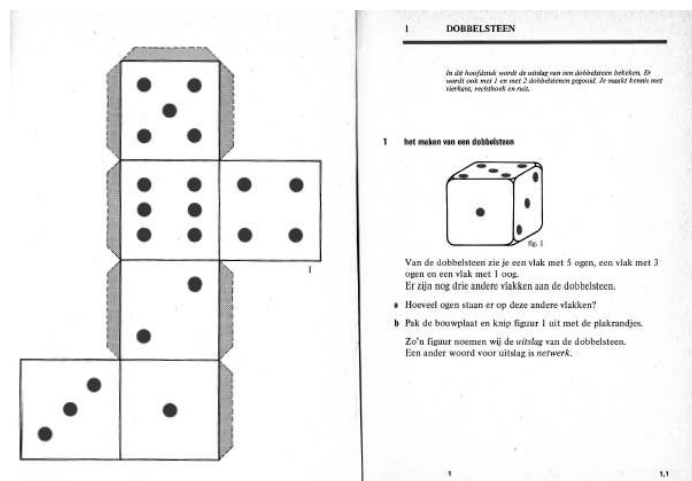
denken noodzakelijk is om een hoger denkniveau te bereiken. Zijns inziens was dat echter niet genoeg: materialen en eventuele vragen van de docent zijn nodig om te stimuleren dat die reflectie ‘in de juiste richting’ gaat. Daarbij benadrukte hij met name het belang van het visuele/grondniveau. Hij dacht dat dit anders was bij Freudenthal. Deze was volgens hem meer geïnteresseerd in het leren van wiskunde met als startpunt onder andere een fenomenologische en didactische analyse en het gebruik van contexten om het gat tussen realiteit en het formele systeem te overbruggen. Freudenthal veronachtzaamde daarbij volgens hem juist het belang van het visuele (deels intuïtieve) niveau en overschatte daarmee de mogelijkheid van lerenden. Hij —

Freudenthal — besteedde zijn inziens tevens te weinig aandacht aan het oplosgedrag van leerlingen, waardoor veel vaardigheden als vanzelfsprekend ‘aanwezig’ beschouwd werden. Dit mondt gemakkelijk uit in een verkeerde houding ten aanzien van niet alleen vraagstukken, maar ook ten aanzien van wiskunde en wiskundig denken.

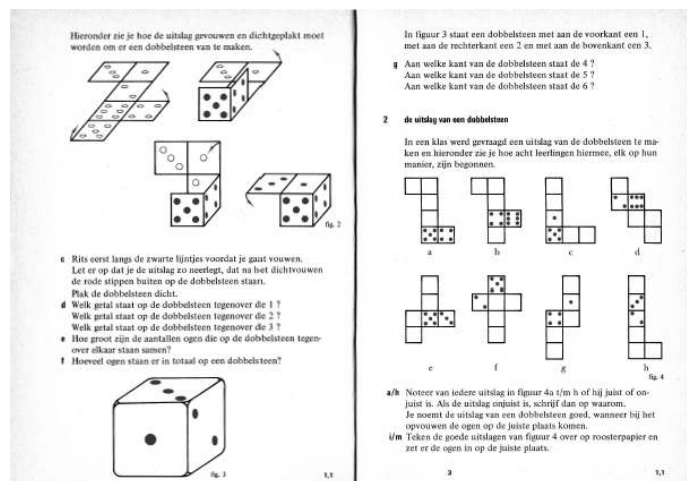
Op de achtergrond speelde hierbij de worsteling van Van Hiele met het werken met twee verschillende intuïties die ook al bij Pythagoras en zijn tijdgenoten te onderkennen waren. Dit komt voor lerende kinderen tot uiting in de intuïtie van continuïteit en die van discreetheit zoals die naar voren komen in de (ruimte-) meetkunde respectievelijk het (met gehele getallen) rekenen. Die discreetheit heeft betrekking op de overgang van aanschouwelijkheid naar abstracties in de vorm van symbolen — dus het zich losmaken van het aanschouwelijke beeld dat het ‘aantal’ bepaald heeft. Het rekenen komt in zicht, getallen zijn knooppunten geworden in een groot relatienet [5, pp. 113–114].

Zelf heeft Van Hiele in besloten kring meerdere malen het idee geopperd dat de keuze van Freudenthal om eerste promotor te zijn van Dieke, waardoor hijzelf Langeveld als eerste promotor ‘kreeg’, door hem altijd beschouwd is als een afwijzing door Freudenthal van zijn meer theoretisch (denk/leerpsychologisch) werk. Dat zijn keuze om fulltime te blijven werken als wiskundeleraar — er was in die tijd geen functie als didactiekdocent of didactisch onderzoeker voor hem beschikbaar — het uitbouwen van zijn ideeën bemoeilijkte, weet hij vrijwel altijd aan het ‘Nederlandse universitaire wereldje’.

Toch was het mede dankzij de voordrachten en publicaties van Freudenthal dat het theoretisch werk over ‘niveaus in het denken’



Figuur 5 De uitslag van een kubus voor de mavo-leerling



Figuur 6 De uitslag van een kubus voor de vwo-leerling



Figuur 7 Promotie Pierre en Dina van Hiele-Geldof (1956)

internationaal veel aandacht kreeg en met name in de Verenigde Staten vele onderzoekers stimuleerde: “In mijn wiskunde-onderwijskundig leerproces is de kennis van Van Hieles niveaus cruciaal geweest omdat ik daarbij de reflectie als niveauverhogende activiteit herkende: bewustmaking van je onbewust kennen, weten, handelen, het er op reflecteren — hoe weet je dat, waarom doe je dat — en ten slotte het verwoorden van het resultaat van je analyse, soms door beproefde taalmiddelen een nieuwe functie toe te kennen, soms door nieuwe te scheppen.” [4, p. 355]

Invloed op het huidige wiskundeonderwijs

Het gedachtegoed van de Van Hieles doordrong de veranderende inzichten. In de meetkunde bleef de zorgvuldige opbouw in niveaus van denken, van intuïtief (zintuiglijk

waarneembaar), via beschrijving (herkennen van eigenschappen) naar formalisering (stellingen en definities), herkenbaar. Een representatief voorbeeld in het huidige wiskunde-onderwijs is het gebruik van vectoren en de opbouw van dat begrip, het inzicht en de vaardigheden in het hanteren ervan dat illustratief is voor de toenmalige ideeën van Van Hiele. In *de Wageningse Methode* worden vectoren in havo wiskunde D intuïtief opgebouwd door leerlingen te laten tekenen en vervolgens te laten rekenen, waardoor het begrip van lengte en richting op een natuurlijke wijze ontstaat (intuïtief niveau). Het katern vervolgt met vectoren in een assenstelsel, lijnen en vlakken in de ruimte, rekenen in de ruimte (het beschrijvende niveau), de (co)sinusregel, en eindigt met vlakken en vergelijkingen van vlakken (het formele niveau), zie www.wageningsemethode.nl/download/Vectoren%20en%20meetkunde.pdf.

Van Hiele zocht — meer dan Freudenthal — contexten die ‘dicht tegen de wiskunde aan lagen’, maar probeerde daarbij wel dusdanig dicht bij de leerling te blijven dat deze er een uitdaging in kon vinden. Zoals bekend, was Freudenthal voorstander van een ruim gebruik van contexten, hetgeen er toe geleid heeft dat er in de huidige leerboeken veel — kleine, op zichzelf staande — contexten (zogenoemde reële situaties) gebruikt worden die de leerlingen weinig steun geven bij het opbouwen van een bruikbaar begrippenkader en benodigde vaardigheden. Dat deze ‘controversie’ rond het gebruik van contexten ook nu nog speelt, moge blijken uit publicaties in dit tijdschrift van Paul Drijvers [3] en Jan van de Craats [2]: “Goede context nodigt uit tot abstractie en algebraïsche begripsontwikkeling” versus “Juist het gebruik van contexten veroorzaakt het probleem”.

Uitdaging, taal en leerinhouden

Voor ons liet hij naast zijn gedachten/theorie over niveaus in het denken (beschrijvend) en ideeën over de opbouw van begrip (voorschrijvend) een aantal aandachtspunten na voor eenieder die zich bezighoudt met wiskundeonderwijs. Zo legde hij de nadruk op het gebruik van taal op de verschillende niveaus. Op het intuïtieve niveau wordt alledaagse spreektaal gebruikt. Op het beschrijvende niveau komen wiskundige begrippen aan de orde zoals punten, hoeken, lijnen en vlakken, inclusief alle combinaties daarvan aan de hand van figuren (representaties). Op het formele niveau staat het taalgebruik los van figuren en gaat het om relaties, om de (abstracte) structuur. In het bovenstaande vectorvoorbeeld gaat het op het formele niveau over een vectorruimte waarin lichaamskenmerken een rol spelen.

Van Hiele benadrukte dat het noodzakelijk is dat de lerende actief participeert in het proces van begripsontwikkeling door bezig te zijn met wat geleerd moet worden in een leeromgeving die onderzoeken, verwoorden en activiteit ondersteunt. Dat betekent dat er geen sprake is van een serie stapelopgaven, waarbij de voorgaande opgave eerst opgelost moet zijn voordat er aan de volgende kan worden begonnen. Dat betekent ook dat het zelf verwoorden van denkstappen — een aanzet tot activiteit — als noodzakelijk wordt gezien om tot niveauverhoging te komen. In zijn boek *Structure and Insight* [6, p. 43] gaat Van Hiele expliciet in op het bewust creëren van een ‘crisis of thinking’ om op een hoger niveau te komen. In zijn observaties had hij een behoefte waargenomen om uitdaging te benutten.

Tot slot: na een lang, werkzaam leven is Pierre in het najaar van 2010 vredig ingeslapen. ←

Referenties

- 1 G. Alberts en R.H. Kaenders (2005), Ik liet de kinderen wel iets leren, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/6(3), 247–251.
- 2 J. van de Craats (2007), Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/8(2), 132–136.
- 3 P. Drijvers (2006), Context, abstractie en vaardigheid in schoolalgebra, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/7(3), 198–202.
- 4 H. Freudenthal (1991), *Revisiting Mathematics Education*, China Lectures, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- 5 P.M. van Hiele (1964), *Rechenunterricht und Zahlbegriff: Die Entwicklung des kindlichen Zahlbegriffes und ihre Bedeutung für den Rechenunterricht*, Westermann: Taschenbuch.
- 6 P.M. van Hiele (1986), *Structure and Insight: A theory of Mathematics Education*, Orlando: Academic Press.
- 7 P.M. van Hiele (1987), *Structuur*, Purmerend: Muusses.
- 8 P.M. van Hiele (1999), *Bewust of onbewust: Denken in een nieuw perspectief*, Niet gepubliceerde reactie op het artikel ‘Zinloos bewust-

zijn’ van Harm Visser in *NRC Handelsblad* van 11 september 1999.