

## Nellie Verhoef

Faculteit Gedragwetenschappen, instituut ELAN  
Universiteit Twente  
Postbus 217  
7500 AE Enschede  
n.c.verhoef@utwente.nl

### Interview David Orme Tall

# Je zult eerst moeten ontdekken hoe leerlingen denken

In de zomer van 2011 logeert Nellie Verhoef bij David Tall, emeritus hoogleraar in het wiskundig denken aan de Universiteit van Warwick. Het idee is dat ze oog in oog de resultaten betreffende de Nederlandse experimenten met 'Lesson Study' zullen kunnen bespreken. Nellie interviewt David bij gelegenheid. Tijdens het gesprek komt bij toeval Eddie Gray spontaan langs.

*David, zou je kunnen vertellen wat je geschiedenis is, waar je vandaan komt?*

Ik ben opgegroeid in Wellingborough, in North Hampshire, zo'n 75 kilometer hier vandaan. Tegenwoordig is het een marktplaatsje, maar vroeger was er een flinke schoenenindustrie. Ik heb daar zelf ook nog een tijdje gewerkt. Mijn vader werkte bij de plaatselijke ijzerindustrie. Zijn baan bestond uit het verwijderen van de slak, een afvalproduct dat bovenop het gesmolten ijzer drijft. Het ijzer zelf kon daarna pas tot allerlei producten gegoten worden.

Ik ging naar een klein schooltje in de buurt. Mijn moeder wilde natuurlijk voor al haar kinderen een goede opleiding, dus toen ik vijf jaar oud was besloot mijn moeder al dat ik aan de universiteit van Oxford moest gaan studeren. En dat heb ik uiteindelijk ook gedaan.

Als klein jongetje ging ik naar de lagere school in Wellingborough. Het was een geweldige school, helaas bestaat de school niet meer. Ik had een speciale band met mijn wiskundedocent, Johnny Bunder. Hij heeft mijn interesse in wiskunde gewekt. Niet alleen leerde hij mij verschillende facetten van de wiskunde kennen, hij was anders dan alle an-

dere docenten. Andere docenten verveelden me met hun complimenten als ik dingen goed deed, meneer Bunder was anders. Toen ik in groep zes zat heeft hij mijn eerste verslag beoordeeld met: "Als zijn inzet even sterk is als zijn enthousiasme, wordt hij een groot wiskundige." Dat heeft hij me destijds echter niet verteld. Toch ben ik daar trots op, want hij was de enige docent van de hele school met veel aanzien. Dat is waar mijn liefde voor de wiskunde vandaan komt.

*Heb je broers en zussen?*

Ik heb een jonger zusje en een jonger broertje. Mijn zusje, Rosemary, wist van jongs af aan al dat ze danseres wilde worden. Daar heeft ze toen ze jong was wel een aantal problemen mee gehad. Mijn moeder wilde haar laten meedoen aan de nationale danscompetitie. Dat zou echter betekenen dat ze niet elke dag naar school zou kunnen. De overheid was het daar helaas niet helemaal mee eens en vond dat ze in elk geval haar toetsen op school gewoon op de reguliere momenten moest maken. Het werd moeilijk toen ze een jaar lang niet naar school ging. Het belangrijkste voor haar is dat ze in die periode deed en tegenwoordig nog steeds doet waar ze zin in

heeft. Tegenwoordig woont ze in Las Vegas.

Mijn broer Graham is drie jaar jonger dan ik. Hij was het 'normale' jongetje binnen de familie en iedereen ging er eigenlijk van uit dat hij thuis zou blijven wonen om voor mijn moeder te zorgen. Maar ook hij ging naar de universiteit en kreeg zijn doctorstitel aan de universiteit van Birmingham.

*Komen je ouders oorspronkelijk ook uit Engeland?*

Ja, sterker nog, mijn familie heeft een lange geschiedenis in Engeland. Er leefde vroeger zelfs nog een andere familie 'Tall' in Engeland met een stamboom tot in de 5de eeuw na Christus. Helaas bestaat er geen link tussen deze familie en de mijne.

*Waarom heb je vroeger de keuze gemaakt voor wiskunde, en niet voor scheikunde of natuurkunde?*

Ik had op school een beperkte keuze voor



David Tall (links) en zijn broer Graham Tall (rechts)



De dirigent

mijn vakkenpakket. Je moest een keuze maken tussen biologie, natuurkunde, scheikunde en wiskunde. Ik heb toen gekozen voor wiskunde, maar dat betekende niet dat ik me niet met die andere wetenschappen bezighield. Ik wilde altijd overal goed in zijn, dus stopte ik heel veel moeite in de vakken waar ik slecht in was. Zodoende besteedde ik de helft van mijn tijd aan scheikunde en natuurkunde. Mijn wiskundeleraar ging zich op een gegeven moment zelfs zorgen maken, omdat hij dacht dat ik te weinig tijd aan wiskunde besteedde.

*Later heb je gekozen voor onderwijs in wiskunde. Betekende dit dat je carrière een nieuwe weg insloeg?*

Ik heb mijn hele leven muziek gemaakt. Ik weet dat dit als een raar antwoord klinkt op je vraag, maar als muzikant ben ik ook dirigent geweest. Ik kreeg altijd positieve reacties van de muzikanten die in het orkest speelden. Dat gaf me natuurlijk altijd een geweldig gevoel. Datzelfde gevoel krijg ik als ik studenten college geef.

Ik was altijd erg populair onder de studenten. Ik begon op mijn vijftiende met lesgeven, dus ik denk dat het kleine leeftijdsverschil daar toen aan heeft bijgedragen. Ik hield er altijd van om mijn colleges met wat humor te geven. Ik haalde allerlei grappen uit, die je tegenwoordig niet meer tegen zou komen. Ik heb mijn studenten ook vaak geplaagd. Ik heb ze wijs proberen te maken dat ze wel wetenschappers zijn, maar geen echte wiskundigen omdat ze de wiskunde niet goed genoeg begrepen. In de collegezaal waar ik vaak college gaf konden de borden elektrisch op en neer bewegen. Op een gegeven moment wilden ze nog wel omhoog, maar niet meer naar beneden. Toen had ik natuurlijk te weinig ruimte om mijn aantekeningen op te maken. De enige oplossing die ik zag was om naar boven te klimmen en zo op de bovenste borden te schrijven. De studenten vonden het hilarisch. Aan het einde van dat college bleef iedereen zitten, tot één van de studenten naar voren

liep, naar het bedieningspaneel van de borden ging en iets deed met een stukje karton. Toen hij na tien seconden klaar was, gingen de borden weer keurig op en neer. Hij draaide zich om en zei: "Dat is het probleem met jullie wiskundigen, jullie kunnen niet praktisch nadenken." Ik vond het geweldig en de studenten ook. Die manier van lesgeven zorgde er ook voor dat er voor elk college een lekker glas bier op me stond te wachten. Het was een geweldige tijd.

Ik heb altijd van wiskunde gehouden, voornamelijk van 'projectieve meetkunde'. Het is prachtig. De patronen, de punten en lijnen die na een verandering weer diezelfde punten en lijnen laten zien, dat heb ik altijd overweldigend gevonden. Ik ben echt van wiskunde gaan houden toen ik met een paar klasgenoten een calculusboek kreeg, waar we in twee jaar doorheen moesten werken. Het idee was dat we gewoon aan de slag moesten en indien nodig vragen konden stellen aan de docent. Ik heb hem nooit één vraag gesteld. Het probleem was dat als je eerder klaar was met de opgaven dan de rest, je meer van dezelfde opgaven kreeg van de docent. Daar had ik natuurlijk geen zin in, dus leerde ik mezelf aan om langzaam te werken. Langzaam genoeg om niet eerder klaar te zijn dan de rest. Dat bracht ook met zich mee dat ik altijd beter ben geweest in pure wiskunde dan toegepaste wiskunde, omdat ik natuurlijk veel tijd had genomen voor calculus. Onze docent zelf daagde ons nooit echt uit om ergens hard voor te werken. Het enige wat hij deed was namelijk orde houden in de klas.

*Kun je iets vertellen over je ervaring als docent in het basisonderwijs en het voortgezet onderwijs?*

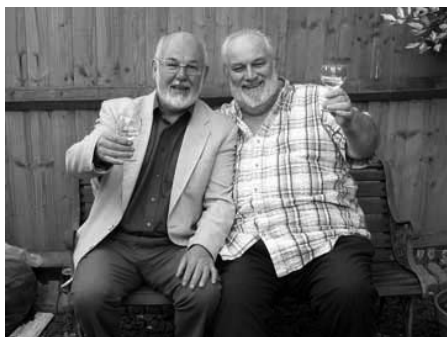
Voordat ik naar de universiteit ging heb ik een baantje gehad op een school, waar ze een docent zochten voor scheikunde en natuurkunde. Er was een docent, maar die is destijds met Pasen bij die school weggegaan. Ik ben daar drie maanden geweest, tot aan de zomer. Het lesgeven was erg moeilijk in het begin. Ik was zelf natuurlijk nog erg jong en ineens had ik een baan als een volwassene. Ook de leerlingen merkten dat ik nog erg jong was en dat leidde tot moeilijkheden. Het werd me aangeraden om duidelijk te laten zien wie er de baas was, maar al na vijf minuten kwam ik erachter dat die aanpak voor mij niet zou werken. Ik vond mijn eigen manier om orde in de klas te houden. Humor.

Als een jongetje mij op de gang aansprak; "Goedemorgen meneer ...", reageerde ik bijvoorbeeld met "Goedemorgen mevrouw". Op de één of andere manier werkte dit, de span-

ning was uit de lucht en alle agressie verdween. Deze aanpak bleek goed te werken. Op een dag, toen ik de klas in kwam, keek een jongetje me uitdagend aan, met zijn vuisten op tafel. Hoe pak je zo'n situatie aan?

Ik keek hem aan en zei tegen hem: "Jij bent wel tevreden met jezelf, of niet?" "Yup" was het antwoord. Ik zei: "Weet je, ik ben echt ontzettend van jou onder de indruk. Ik zou graag je handtekening willen, driehonderd keer." Iedereen in de klas schoot in de lach. De volgende morgen kwam diezelfde jongen naar me toe met driehonderd handtekeningen. Vanaf dat moment waren we vrienden. We hebben op een vreedzame manier een dreigende situatie opgelost en tegelijkertijd kregen we allebei een positief imago. Ik beseftte dat ik goed les kon geven. Ik beseftte dat ik iedereen van elke leeftijd en elke staat van ontwikkeling kon onderwijzen.

Pas toen ik veertig werd besloot ik dat ik me wilde richten op wiskundeonderwijs. Ik zal later vertellen waarom ik dat wilde. Ik vond echter wel dat ik om een goede wiskundeleraar moest zijn, maar dat ik ook wiskundig onderzoeker moest zijn. Toen heb ik twee belangrijke stappen genomen. Ik ging promoveren en ik ging naar school om ervaring in het lesgeven op te doen. Dat lesgeven heb ik toen opgebouwd. Ik begon rustig, met een dag per week, maar dit heb ik in de loop der tijd uitgebreid. Zodoende deed ik veel ervaring op in het lesgeven aan kinderen van verschillende leeftijden. Ik genoot het meest van lesgeven aan kinderen van elf jaar oud. Op die leeftijd zijn kinderen veel enthousiaster dan bijvoorbeeld kinderen van een jaar of vijf. Leerlingen van elf jaar oud ontwikkelen zich snel. Je merkt dat ze steeds volwassener worden en ze kunnen ontzettend enthousiast zijn. Na een aantal jaar ben ik gestopt met werken en heb ik een jaar lang alleen maar lesgegeven. Het was een geweldig jaar. Ik realiseerde me echter dat je meer nodig hebt dan de theorie achter het lesgeven om een goede docent te zijn. Ik heb gevoel gekregen voor lesgeven, maar dat heeft even geduurd. Ik had in het begin voornamelijk moeite om orde te houden in de klas. Leerlingen aanspreken op slecht gedrag werkte vaak niet langer dan een paar minuten; niet veel later was het weer chaos en kon ik opnieuw proberen om het rustig te krijgen. Een vriend van me, Eddie Gray, heeft me daarbij geholpen. Hij is schoolhoofd geweest en had voldoende ervaring om mij tips te kunnen geven. Hij vertelde me: "Je hoeft niks te laten gebeuren. Je moet gewoon op tijd ingrijpen voordat er iets mis-



David Tall (rechts) met Eddie Gray (links)

gaat.” Ik vond het moeilijk om te begrijpen wat hij bedoelde en vroeg om verheldering. “Het is heel eenvoudig. Als je ziet dat een leerling moeilijkheden veroorzaakt, kijk je hem aan. Je draait je hoofd echter weg vóórdat hij de kans krijgt om te reageren. Vaak is dat al voldoende om de ongenie te stoppen. Werkt dat echter niet goed genoeg, laat je hem bij je komen en spreek je hem met een bijna fluisterende stem toe. Dat werkt veel dreigender dan eenvoudig door de klas schreeuwen.” Het bleek een gouden tip. Het lukte me niet alleen om de klas onder controle te krijgen, zelfs mijn kinderen leerden mij te gehoorzamen. Orde houden in de klas is een goed voorbeeld van een aantal technieken die je als docent nodig hebt om een structuur te creëren waarbinnen je les kunt geven. Als dat eenmaal is gelukt, kun je de lessen interessant gaan maken. Je moet kunnen en g aan vertrouwen op je relatie met de klas, vervolgens kun je leukere en boeiendere lessen gaan geven.

Een techniek die ik heb geleerd is de regel van de drie F'en. Deze staan voor Firm, Fair en Friendly. Allereerst zul je in je klas 'Firm', streng moeten zijn. Als je zegt dat er iets moet gebeuren, moet je ook van je leerlingen verwachten dat ze luisteren. Als je de situatie hebt bereikt waarin dat lukt, kun je aan 'Fairness', eerlijkheid gaan werken. Het gaat er dan om dat alles wat er gebeurt eerlijk is voor iedereen. Je hebt geen tijd om eerlijkheid te bewerkstelligen als je nog bezig bent met streng zijn. Pas als je Firmness en Fairness, streng zijn en eerlijkheid hebt bereikt, kun je de stap maken om vriendelijk te worden. Je hebt dan een situatie gecreëerd waarin je controle hebt over de klas, waarbinnen de leerlingen weten hoe ze zich moeten gedragen en wat anders de consequenties zijn. Ze weten dan ook dat je eerlijk en vriendelijk tegen ze zult zijn als zij zich aan de regels houden.

Ik heb net beloofd om te vertellen waarom ik wiskundeonderwijs wilde geven, dus dat zal ik nu doen. Het vreemde is, het feit dat ik

wiskunde wilde onderwijzen kwam niet direct door een wens om les te geven. Toen ik in mijn laatste jaar van de universiteit zat, moest ik besluiten wat voor baan ik wilde hebben. Ik zag drie mogelijkheden. Ik kon natuurlijk op een leuke school docent worden. Een tweede mogelijkheid was om op de universiteit te blijven. Niet alleen zou ik dan onderzoek kunnen doen, ik zou me ook meer met muziek bezig kunnen houden. Een laatste mogelijkheid was om zo veel mogelijk geld te verdienen. Ik wist echter niet precies wat ik zocht in het leven. Daarom besloot ik om uit te zoeken of ik in mijn leven veel geld nodig had om gelukkig te kunnen zijn. Ik besloot om alle mogelijkheden die ik had tegen elkaar af te wegen en daarna pas een keuze te maken.

Zodoende heb ik op vier vacatures voor actuaris gesolliciteerd. Bij drie van deze bedrijven kon ik direct beginnen, de vierde vroeg me om nog een keer terug te komen op het moment dat ik klaar was op de universiteit. Ik besloot dat niet te doen, maar ontving toen opnieuw een brief. Ze vroegen me of ik voor ze wilde komen werken. Ik wees het aanbod af. Ik vertelde hen dat ik op de universiteit bleef om te promoveren en dat ik een wiskundeprijs had gewonnen. Toen vroegen ze me om contact op te nemen op het moment dat ik klaar was op de universiteit en dat ze dan gegarandeerd een baan voor me hadden. Je zult je misschien afvragen waarom ik gesolliciteerd heb, als ik toch elke baan die ik kon krijgen zou afwijzen. Ik deed dit om er achter te komen of ik überhaupt een baan kon krijgen waar ik veel geld kon verdienen. Ik wist dat ik, mocht ik die keuze maken, eenvoudig een baan zou kunnen krijgen.

Ik voelde dat ik een leven wilde waarbinnen ik elke dag kon doen waar ik zin in had. Als academicus heb je natuurlijk wel verplichtingen zoals lesgeven, maar je kunt het grootste gedeelte van je tijd zelf indelen. Ik ben naar de universiteit van Sussex gegaan om daar wiskundecolleges te geven. Ik bleek daar erg goed in te zijn. Uiteraard moest ik in het begin mijn draai zien te vinden, maar uiteindelijk heb ik zelfs college gegeven over complexe getallen aan tweedejaars studenten en over Galoistheorie aan derdejaars studenten. Niet lang daarna ben ik naar de universiteit van Warwick gegaan. Ik werkte daar onder toezicht van Michael Atiyah, de winnaar van de Fieldsmedaille in 1966. Het winnen van die prijs maakte hem natuurlijk erg gewild voor het geven van lezingen en colloquia. Uiteraard had ook hij zijn eigen agenda, dus als hij zelf niet kon komen werd ik als vervanger gestuurd.

Ik volgde bij zo'n lezing altijd een vaste procedure. Ik vroeg het publiek wat ze wilde horen. “Zal ik jullie een volledig gedetailleerd verhaal vertellen over mijn eigen doctoraat of willen jullie een algemene lezing, meer geschikt voor een colloquium?” Ik kreeg elke keer hetzelfde resultaat; telkens weer wilde het publiek de lezing aanhoren. Dus dat deed ik dan maar. Gedurende de eerste vijf minuten lukte het me vaak om een aantal personen in het publiek geïnteresseerd te houden. Maar al snel was ik de enige in de hele zaal die kon volgen waar de lezing over ging.

Waarom ben ik nou les gaan geven? Niet omdat ik studenten wilde helpen die moeite hadden met leren. Nee, ik wilde begrijpen waarom wiskundigen, waarvan werd verwacht dat ze slim waren en goed konden nadenken, op geen enkele manier konden begrijpen waar ik het bij mijn lezingen over had. Wiskundigen uit verschillende vakgebieden kunnen niet met elkaar praten, omdat ze een verschillende achtergrond hebben. Dat was mijn directe reden om les te gaan geven. Ik wilde onderzoeken hoe mensen denken, voordat ze naar school gaan tot aan het moment dat ze afstuderen.

*Laten we het even over Nederland hebben. Heb je een speciale boodschap voor de Nederlandse wiskundedocenten?*

Allereerst wil ik even kwijt hoeveel ik heb geleerd van het wiskundig onderwijs in Nederland. Dat kwam onder andere door een boekbespreking die ik moest schrijven. Ik leerde Freudenthal kennen toen ik nog een vrij jonge student was. Richard Skemp was op dat moment aan het promoveren. Hem werd gevraagd om een boek van Freudenthal te bespreken, *Mathematics as an educational task*. Richard heeft dit weer naar mij gedelegeerd. Ik vond het heel erg moeilijk om te doen. Ik had er moeite mee om het werk van zo een groots en belangrijk wiskundige als Freudenthal kritisch te beoordelen. Ik zocht hulp bij James Eels, destijds wiskundig afdelingshoofd. Ik wist dat hij Freudenthal kende en hoopte op goede raad. Wat Eels me vertelde had ik niet direct zien aankomen. Hij adviseerde me om zo eerlijk mogelijk te zijn. Om kritiek te geven waar ik verbeterpunten zag en daar geen doekjes om te winden.

Met dat advies schreef ik mijn boekbespreking. Ik maakte duidelijk wat ik sterk vond, maar heb ook kritiek geuit. Drie, misschien vier maanden later kreeg ik een kaartje: “Bedankt voor je boekbespreking, ik heb er van genoten. Vooral van je kritiek. Hans Freudenthal.” Sinds dat moment heb ik hem een beetje als een mentor gezien. Hij heeft vaak arti-

kelen voor me beoordeeld, zijn opmerkingen waren altijd helpend en respectvol.

Een ander persoon waar ik veel van geleerd heb is Van Hiele. Hij heeft gewerkt aan een beschrijving van verschillende niveaus van ontwikkeling, voornamelijk met betrekking tot meetkunde. Hij is echter wel van mening dat zijn ideeën ook toepasbaar zijn in de algebra. Hoewel ik veel ervaring heb met algebra, calculus en wiskundige analyse is juist de meetkunde het vakgebied waar ik weinig mee heb gewerkt. Ik heb van Van Hiele dus veel kunnen leren over niveaus van ontwikkeling in de meetkunde. Als je mijn artikelen leest zul je dan ook veel ideeën van Van Hiele kunnen herkennen.

Ik heb een vrij goed beeld gekregen van de verschillende ideeën die er heersen in Nederland betreffende onderwijs en wiskunde. Ik heb voornamelijk een beeld gekregen over het probleem dat vaak door universitaire wiskundigen en wetenschappers wordt aangekaart, betreffende het te lage niveau van nieuwe studenten. Vaak beschikken nieuwe studenten niet over de benodigde kennis die ze nodig hebben om goed aan hun studie te kunnen beginnen. Dit levert een interessant raadsel. Hoe kun je de studenten het beste helpen? Help je de studenten de wiskunde beter te begrijpen of help je de studenten beter met operationele wiskunde om te gaan, waardoor ze wat flexibeler worden en berekeningen efficiënter kunnen uitrekenen? Voor mij is het antwoord duidelijk, je zult beide moeten doen. Ook mijn supervisor zag hetzelfde onderscheid en benoemde deze. Relatieel begrip omvat de wiskunde waar het gaat om de vraag hoe relaties zich tot elkaar verhouden, bij instrumenteel begrip gaat het om het kunnen toepassen van procedures.

Mijn antwoord op dit raadsel is dat we aan beide zullen moeten werken. Ik heb mijn mening gebaseerd op de studie die ik heb ontwikkeld en welke op dit moment wordt gebruikt door jou [Nellie Verhoef] in jouw werk over calculus. Deze ideeën zijn te vergelijken met het feit dat mensen hun gedachten baseren op waarnemingen in het leven, daar begint de realistische wiskunde. Realistische wiskunde in realistische situaties. Dit is eigenlijk wat Van Hiele het eerste niveau van ontwikkeling noemt, het sensomotorische (waarneembare) niveau. Dit principe is specifiek herkenbaar bij kinderen tot twee jaar oud.

Uiteraard zal het begrip van het leven en de wiskunde zich vanaf dat punt uitbreiden.

Ik heb samen met Eddie Gray lang gewerkt aan het idee achter het woord 'procept'. Het idee is dat het wiskundige object '3' niet al-

leen een object is, maar ook voortkomt uit het tellen 1, 2, 3. De optelsom is naast een proces, tegelijkertijd gelijk aan zijn antwoord. Het nut van een 'procept' is dat je waarnemingen kunt transformeren naar wiskundige concepten zoals nummers of wiskunde-uitdrukkingen als  $3 + 2x$ . Vervolgens kun je dingen gaan optellen, vermenigvuldigen, enzovoorts. Je kunt dus situaties gaan behandelen zoals ze zijn, als concepten, maar ook als wiskundige processen. Een 'procept' is bijvoorbeeld het getal 6. '6' is een wiskundig object, maar binnen '6' vind je ook het proces van het tellen van 1 tot 6 en andere weergaven zoals  $5 + 1$ ,  $12/2$  en  $2 \times 3$ .

Ik acht het noodzakelijk dat kinderen leren om de stap te kunnen maken van waarnemingen in de eigenlijke wereld naar de operationele symbolische wereld van tellen en rekenen. Rekenen omvat dan het kunnen werken met getallen als procepten, maar ook met bewerkingen die als 'procept' te beschouwen zijn. Denk bijvoorbeeld aan het beschouwen van een vermenigvuldiging als een vorm van het veelvoudig optellen van getallen.

Er zal op school dus moeten worden aangeleerd om de stap te kunnen zetten van ideeën naar rekenen en calculus.

Ik geef even een voorbeeld. Stel je twee vierkanten  $A$  en  $B$  voor met zijden  $a$  en  $b$ , waarbij  $a$  groter is dan  $b$ . Je kunt het verschil in oppervlakte berekenen met  $a^2 - b^2$ , of je kunt je het verschil in oppervlakte visualiseren. Je raakt echter in de problemen als we voor  $a$  en  $b$  negatieve getallen invullen, of wanneer  $b$  groter is dan  $a$ . Hoe ziet het plaatje in je hoofd er dan uit? Of hoe zou dat plaatje er uit zien als ik je vraag naar  $a^4 - b^4$ ? Je snapt dat dit erg moeilijk wordt om te visualiseren, terwijl de wiskunde nog relatief eenvoudig is.

Feitelijk, als je gaat manipuleren met symbolen vind je nog meer methoden van 'embodying' (belichaming) die meer betekenis geven. Wat bedoelen we bijvoorbeeld met continuïteit? Het idee is uit te leggen aan de hand van het volgende voorbeeld. Je kunt met je vinger over een kromme gaan om de verschillende punten op die kromme langs te lopen. Als we onze gestrekte hand langs de kromme laten glijden zul je zien dat deze bestaat uit meer en minder steile gedeeltes. Als we proberen te meten hoe steil de kromme in een bepaald punt is, meten we de helling van de grafiek in dat punt, en dat is precies de afgeleide in dat punt.

Wat hebben we nou eigenlijk gedaan? We hebben voor een gekozen grafiek met onze hand geïllustreerd hoe steil deze grafiek is, hoe de helling verandert, en daarmee de afge-

leide van deze grafiek laten zien. We hebben dus wiskunde gebruikt op een manier die op verschillende manieren passend is. Het is in eerste instantie passend, als je kijkt naar de realistische wiskunde en haar toepassingen. Je bouwt dus voort op het idee van 'embodyment'. We begonnen met een gevoel voor continuïteit en een grafiek, dat hebben we vertaald naar symbolen en calculus. Als je die vertaling maakt zul je tegenkomen dat je het concept van een limiet moet gebruiken. Een kromme benaderen met een rechte lukt pas op het moment dat je erg ver inzoomt. Je versmalt dus het gebied waarbinnen je de wiskunde toepast en ook dit correspondeert weer met de visualisatie, het inzoomen op een klein stukje van de grafiek. Op dat punt kun je dus echt de sprong maken van de benadering in de vorm van een visualisatie tot de benadering in symbolen op een goed door-dachte, begrijpelijke manier.

Mijn antwoord hier is dat we ons bezig moeten houden met logische wiskunde. Wat bedoel ik daarmee? Ik doel op wiskunde die logisch op je overkomt. Dit begint bij logica zien in de fysieke wereld, bijvoorbeeld als je twee en drie bij elkaar optelt en vijf krijgt. Als je twee appels hebt in je ene hand en drie in je andere hand, heb je dus vijf appels. Als je vervolgens je handen van plaats verwisselt, heb je drie en twee appels, met hetzelfde resultaat. Je realiseert je dus dat er regels zijn die puur fysiek zijn, maar later leer je om deze regels puur operationeel te gebruiken. Ik vind dat dit de methode is waar we op moeten voortbouwen. Om dit te bewerkstelligen zal er een nieuwe manier van lesgeven moeten worden ontwikkeld. Om een dergelijke realistische aanpak van wiskunde te hanteren die leerlingen kunnen gebruiken, zul je eerst moeten ontdekken hoe leerlingen denken. Je zult dus moeten analyseren welk stappenplan leerlingen volgen voordat ze wiskunde begrijpen. En dat is precies waar het idee van 'Lesson Study' zijn intrede doet.

Dat is waar docenten proberen te bevat-



De familieman

ten op welke manier leerlingen wiskunde leren en hun lessen zo inrichten dat ze de leerlingen helpen precies die stappen te maken die ze nodig hebben om de wiskunde te begrijpen. Het gaat erom dat de leerlingen leren op welke manieren wiskunde moet worden geïnterpreteerd, om de stap te kunnen maken van realistische situaties tot operationele concepten. Dit kan alleen door deze twee verschillende dingen samen te voegen. Het los behandelen van de verschillende invalshoeken zal niet leiden tot begrip van de stap, de link, die er tussen de twee begrippen bestaat. Het gaat dus niet om de afweging tussen instrumenteel of relationeel, tussen conceptueel of procedureel, het gaat om het zien en het begrijpen van de vertaling van wiskunde uit de realiteit naar logische operationele wiskunde.

*Heb je in je werk, in je leven, belemmering ondervonden van anderen?*

Ik ben een volwassen man. Ik word wel eens belemmerd, maar over het algemeen kan ik daar prima mee omgaan. Mijn grootste zorg betreffende het wiskundeonderwijs is dat de meeste mensen werken vanuit hun eigen ervaringen. Daarbij komt dat theorieën die mensen ontwikkelen zijn gebaseerd op die ervaringen. Bijvoorbeeld Van Hiele's theorieën over de verschillende niveaus van ontwikkeling zullen goed kunnen kloppen voor meetkunde, maar zullen bijvoorbeeld bij rekenen minder goed toepasbaar zijn. De APOSTheorie (mentale ontwikkeling via Acties, Processen en Objecten, georganiseerd in Schema's) is passend in rekenkunde en algebra, maar vindt geen raakvlak in de meetkunde. Mijn antwoord op de vraag is dat elke theoreticus zijn of haar eigen manier heeft om naar dingen te kijken. Het is niet mijn taak om uit verschillende theorieën de beste stukjes te zoeken. Hoe ik het zie, is het mijn taak om de fundamenten van wiskundig denken te onderzoeken en een manier te vinden om te ontdekken op welke basisprincipes deze gebaseerd zijn. Van deze basisprincipes heb ik het idee dat zij de sensomotorische taal van de wiskunde zijn. Het is sensomotorisch aangezien het gaat om de manier waarop we zien, of op andere manieren waarnemen, hoe patronen in de wiskunde kunnen variëren. Vervolgens kunnen we tellen, vermenigvuldigen en meten. Dit zijn allemaal procedurele wiskundige operaties. Van Hiele beschreef een aanpak in termen als 'Gestalt' (totaalbeeld). In eerste instantie zul je de gehele situatie moeten observeren, vervolgens kun je eigenschappen beschrijven en ten derde kun je deze eigenschappen gebruiken om te definiëren

hoe een situatie in elkaar zit. Daarna kun je deze definities gebruiken om hieruit afleidingen te maken of eigenschappen met elkaar te verbinden.

Als ik een formule formuleer begin ik bij deze sensomotorische, deze fundamentele, taal van de wiskunde. Als iemand mij daarin vervolgens bekritiseert, is onderbouwde kritiek nodig waarin wordt beoordeeld of wat ik doe werkt, ondanks het feit dat mijn eigen ervaring mij zegt dat het werkt. Ik vind het belangrijk dat mensen niet blind aannemen wat ik zeg. Ik wil dat mensen uiteindelijk realiseren dat mijn blik op de wiskunde vruchtbaar is. Als ik vervolgens een wiskundig expert in een bepaald gebied tegenkom met zijn of haar eigen ideeën, die mij vertelt dat ik er naast zit, is dat niet mijn probleem. Het is namelijk mijn taak om uit te zoeken, om duidelijk te maken hoe wij wiskunde leren en ik ben daarbinnen blij met kritiek die mijn ideeën daarbinnen kunnen helpen. Ik heb echter geen baat bij dwaze persoonlijke visies die ik bijvoorbeeld soms lees in tijdschriften.

Mijn idee is dus dat wat er feitelijk toe doet, bestaat uit het zoeken naar de fundamentele principes onder wiskundig onderwijs.

Het probleem dat ik zie, bestaat vervolgens uit het feit dat het onderwijs tegenwoordig meer begint te lijken op een industrieterrein. Onderwijs wordt een industrie, waar ontelbare verschillende ideeën via conferenties, discussiegroepen en andere evenementen tot een leerzame les in een klaslokaal op een gewone school moeten leiden. Ik vraag mij daarbinnen af of we juist de kern van het belang in het wiskundig onderwijs niet vergeten.

Ik heb wel voorbeelden gezien waar dit soort systemen wel werken, bijvoorbeeld het gebruik van zelfreflectie door de docenten met als doel een manier van lesgeven te ontwikkelen die past bij de ontwikkeling van de leerlingen. Maar wat er bij wiskundeonderwijs moet gebeuren, is focussen op de basis die ten grondslag ligt aan de manier waarop kinderen wiskunde leren.

*Kun je vertellen hoe het wiskundeonderwijs van de toekomst eruit ziet?*

Dat is een interessante vraag. Je zult hier historisch naar moeten kijken. Je zult ongeveer twintig jaar terug moeten gaan in de tijd en bekijken wat er toen is voorspeld en die toetsen aan de huidige realiteit. Een bepaalde menselijke eigenschap is dat, op het moment dat we leren, we onze kennis structureren op een bepaalde manier. Dit bepaalt vervolgens hoe we filosoferen over de toekomst. Een leuk voorbeeld is de komst van de computer. Wat

vele mensen zich afvroegen was: "Hoe kan ik de ideeën die ik in mijn lessen probeer over te brengen, overzetten op een computer?" In de calculus, bijvoorbeeld, zou je het principe van een limiet willen overbrengen op een computer. Je raakt daar echter flink in de problemen, omdat het delen van een klein getal door een ander klein getal een enorme foutmelding kan geven. Wat daar dus in eerste instantie miste, is de mogelijkheid die de visualisatie van ideeën kan bieden; niet alleen het idee van een continue functie, maar het idee van een lokaal rechte lijn die pas als je er sterk op inzoomt een helling blijkt te bevatten.

Wat er in de toekomst dus zal gebeuren, hangt sterk af van de technologieën die we hebben. Het lijkt erop dat de technologieën die we hebben mijn argumenten voor de ideeën die ik heb versterken. Ik doel dan bijvoorbeeld op de menselijke belichaming van onze waarnemingen, wat we tegenwoordig op een iPad kunnen weergeven. We kunnen met onze vingers een lijn volgen, we kunnen dingen uitvergroten of verkleinen door onze vingers uit elkaar te bewegen of we kunnen dingen eenvoudig bovenop elkaar weergeven. We kunnen tegenwoordig dingen die we vroeger met boeken niet konden weergeven.

Bijvoorbeeld het verschil tussen  $dy/dx$ , de raaklijn aan een grafiek en de eigenlijke vorm van die grafiek. Door met bewegende beelden in te zoomen op zo'n grafiek zou dit het verschil duidelijk kunnen maken. Op die manier zullen vele nieuwe ideeën ontstaan over het ontdekken van een operationele vertaling van de 'embodied' wereld. Als je bijvoorbeeld gecompliceerde integralen moet oplossen, hoeft het niet zinvol te zijn om te weten met welke technieken je een bruikbaar antwoord kunt genereren. Als je een formule krijgt voor het antwoord en als je deze formule kunt manipuleren, dan kun je het initiële probleem koppelen aan een exacte beschrijving van het antwoord.

Als ik naar de toekomst kijk, denk ik niet dat de menselijkheid de komende honderd of duizend jaar veel zal veranderen. Als we echter kijken naar de manier waarop machines en computers de afgelopen halve eeuw, de afgelopen tien jaar of tien weken zijn veranderd en als we leren hoe we logisch over wiskunde moeten nadenken, zie ik een bloeiende toekomst. ←

#### Dankwoord

Thijs Weggemans hielp bij het uitwerken en vormgeven van het interview. Hij maakte er een leesbaar verhaal van.