Kees Roos
TU Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Postbus 5031
2600 GA Delft
c.roos@tudelft.nl

Afscheidsrede

Komt onvermoeide ar

Sommige bekende wiskundige problemen wachten al enkele eeuwen op een oplossing. Vele beroemde wiskundigen hebben zich over de vraag gebogen of al deze problemen ooit opgelost kunnen worden. Kan de wiskunde elk wiskundig probleem in wezen behandelen? In deze discussie, over de grondslagen van de wiskunde, raakte de Nederlandse wiskundige L.E.J. Brouwer in een conflict. In mei 2006 ging Kees Roos, hoogleraar optimaliseringstechnologie te Delft, met emeritaat. In zijn afscheidsrede, uitgesproken op 10 december 2010, geeft hij behalve een terugblik op zijn Delftse tijd ook een nadere beschouwing van het conflict waarin Brouwer verzeild was geraakt.

Toen ik begon na te denken over een onderwerp voor mijn afscheidsrede las ik een biografie [7] van de Nederlandse wiskundige L.E.J. Brouwer (1881–1966). Ik raakte geboeid door zijn leven, zijn werk, en het conflict waarin hij verzeild raakte over de grondslagen van de wiskunde. Het werd mij duidelijk waarom Brouwer beschouwd wordt als één van de grootste wiskundigen die Nederland heeft voortgebracht. Ik besloot de bij een afscheidsrede passende terugblik op de eigen loopbaan te combineren met een meer beschouwend gedeelte naar aanleiding van genoemd conflict. [1] [2]

Ter inleiding op het genoemde conflict, daarmee tegelijk het vraagteken in de titel verklarend, dient het volgende. Het *Koninklijk Wiskundig Genootschap* (KWG) eert Brouwer elke drie jaar met de prestigieuze Brouwerlezing. Degene die deze lezing mag houden ontvangt een oorkonde en een gouden medaille. De medaille toont aan de ene kant het portret van Brouwer, en aan de andere zijde het motto van het KWG en de naam van de prijswinnaar. Zoals in Figuur 1 is te zien luidt het motto 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven'.

Figuur 1 Bronzen replica van de eerste Brouwermedaille

In de genoemde biografie stelt de auteur, de Utrechtse emeritus prof. dr. D. van Dalen, dat dit motto uitstekend past bij de Duitse wiskundige D. Hilbert (1862–1943), maar niet, of veel minder, bij Brouwer. Van Dalen schrijft hierover [7, p.220]: "David Hilbert was [dus] niet zomaar een succesvol en groot wiskundige, hij had een uitgesproken filosofische, bijna religieus aandoende visie op de wiskunde. Zijn standpunt was dat de wiskunde in wezen elk wiskundig probleem zou kunnen behandelen. Hij was zich natuurlijk bewust van het feit dat sommige problemen erg moeilijk waren, en misschien een paar eeuwen moesten wachten op hun oplossing, maar uiteindelijk zou de wiskunde zegevieren. Men zou hem kunnen beschouwen als een belijder van de oude zinspreuk van het eerbiedwaardige Nederlandse Wiskundige Genootschap, 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven'. Ieder wiskundig probleem zal op den duur opgelost worden of het zal weerlegd worden, zo sprak hij in 1900 [op het Parijse congres]. Brouwer had dit zogenoemde dogma van Hilbert in zijn proefschrift ongegrond verklaard." Hilberts opvatting was dus dat ieder wiskundig probleem ofwel kan worden opgelost, of het kan worden aangetoond dat de oplossing niet bestaat. Brouwer nam in een

Kees Roos

beid alles te boven?

voetnoot van zijn dissertatie duidelijk afstand van ‘Hilberts dogma’; volgens hem was er geen spoor van een bewijs voor het dogma te vinden [7, p. 93]. Het is dus zeer de vraag of Brouwer zich zou hebben herkend in het motto van het Nederlands Wiskundig Genootschap. Ik zal hier later op terug komen.

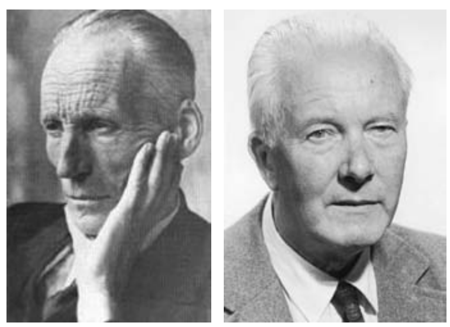
Met Brouwer heb ik een speciale relatie. Hij was de promotor van mijn promotor, professor dr. F. Loonstra. Ik mag hem dus mijn wiskundige grootvader noemen. Dit bracht mij er toe verder onderzoek te doen naar mijn wiskundige voorgeslacht. Dankzij het *Mathematics Genealogy Project* is dit betrekkelijk eenvoudig te doen. Het leverde de stamboom op in Figuur 2.[3] In eerste instantie was ik aangenaam verbaasd toen ik niet alleen namen aantrof van beroemde wiskundigen als Euler, Leibniz, en Bernoulli, maar ook van Erasmus en Thomas à Kempis, en bekende theologen als Voetius, Gomarus en Arminius. In tweede instantie realiseerde ik mij dat er weinig reden tot verbazing was. Immers de oorsprong van de universiteit gaat terug tot de middeleeuwen, en de toen beoefende wetenschap vond zijn oorsprong in de kloosters en kloosterscholen. De stamboom van vrijwel iedere (Westerse) wetenschapper, mits compleet, zal in een klooster beginnen.

Aan de oudste universiteit van Nederland, de Universiteit van Leiden, werd vanaf de oprichting in 1575 wiskunde gedoceerd. Drie personen in de stamboom in Figuur 2 behoorden tot de eerste wiskundige docenten in Leiden: Rudolph Snellius, Willebrord Snellius en Ludolph van Ceulen. Willebrord werd bekend vanwege zijn wet over de breking van het licht. Zoals in Figuur 2 is te zien waren zijn vader Rudolph en Ludolph van Ceulen Willebrords promotoren. Rudolph werd in 1581 buitengewoon hoogleraar wiskunde; hij doceerde daarnaast ook Hebreeuws. In 1601 werd hij gewoon hoogleraar en dat bleef hij tot aan zijn dood in 1613, waarna Willibrord als zijn opvolger werd benoemd. Het is niet onwaarschijnlijk dat Simon Stevin (1548–1640) de colleges van Rudolph volgde. In 1600 verzocht prins Maurits aan Simon Stevin om een onderwijsprogramma op te stellen voor een Nederlandstalige opleiding tot militair ingenieur aan de Leidse Universiteit. De opleiding kreeg de naam ‘Nederduytsche Mathematique’ en was uniek in Europa. In mei 1600 werd Ludolph van Ceulen benoemd als één van de (twee) eerste docenten aan deze ingenieursopleiding. Over Ludolph van Ceulen is veel geschreven in het NAW. Hij heeft dit vooral te danken aan zijn berekening van de eerste 35 decimalen van π. Het heeft hem een monument in de Pieterskerk te Leiden opgeleverd dat op 5 juli 2000 door prins Willem-Alexander werd onthuld [14, 16]. Zijn boek *Van den Cirkel* [6] is een sprekend voorbeeld van ‘onvermoeide arbeid’ in de wiskunde. Zie voor meer over hem [5, 28], en over π [4].

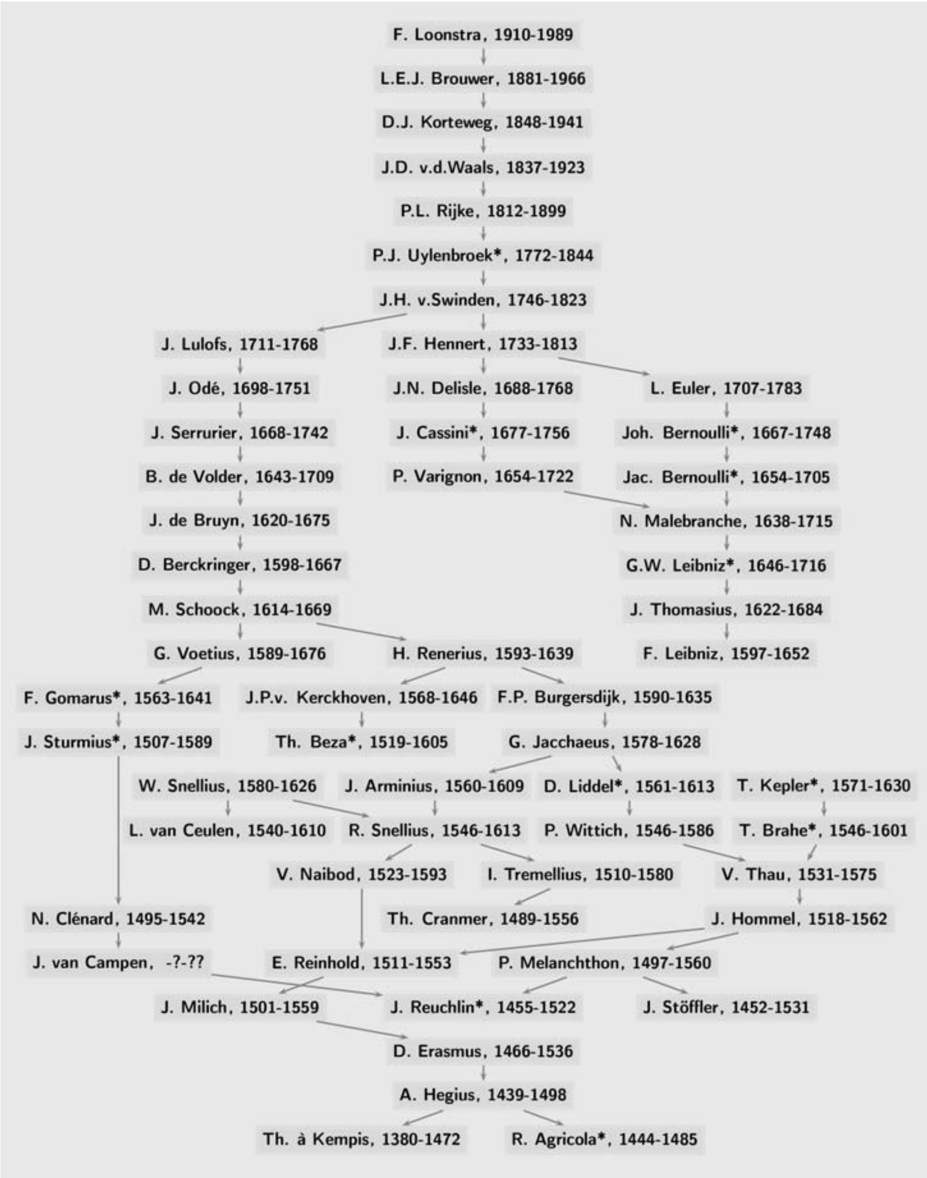
Nu we hebben gezien hoe de ingenieurswiskunde in Nederland is geïntroduceerd lijkt het mij een goed moment om stil te staan bij mijn bijdrage aan de ingenieurswiskunde in Delft. Daarna hoop ik terug te komen op Brouwer en Hilbert, en *en passant* ook op Van Ceulen, om verder te verduidelijken waarom er alle aanleiding is om een vraagteken te zetten bij het motto van het Wiskundig Genootschap.

Wiskundige optimalisatie in Delft

Hoewel ik al in 1969 in dienst trad van de TU, wil ik mij hier beperken tot de periode vanaf 1982, toen ik op verzoek van prof. dr. F. Lootsma (1936–2003) toetrad tot zijn leerstoel ‘Operationele Analyse’.[4] In 1984 verscheen een preprint van een publicatie die achteraf bepalend is geweest voor de ontwikkelingen daarna. De Indiër Narendra Karmarkar, werkzaam bij AT&T in de Verenigde Staten, stelde daarin een nieuwe methode voor om lineaire optimalisatieproblemen op te lossen. Het manuscript trok mijn aandacht vanwege de bijzondere wiskundige benadering en vanwege de claim van de auteur dat zijn methode niet alleen in theoretisch opzicht ef-



Brouwer en F. Loonstra (1910–1989)



Figuur 2 Wiskundige stamboom (gedeeltelijk)

ficiënt was, maar in de praktijk veel efficiënter dan de tot dan toe gebruikelijke simplexmethode. Veel toenmalige experts in het gebied waren zeer argwanend en adviseerden om er niet te veel tijd aan te besteden. Zij konden zich niet voorstellen dat er op het gebied van lineair optimaliseren na bijna dertig jaar intensief onderzoek nog iets nieuws te bedenken viel, en beschouwden het gebied als 'dood'. Op buitenlandse conferenties merkte ik echter dat vooraanstaande wetenschappers in de Verenigde Staten en Japan daar anders over dachten. Het stimuleerde mij om door te gaan.

De Optimalisatie Groep in Delft

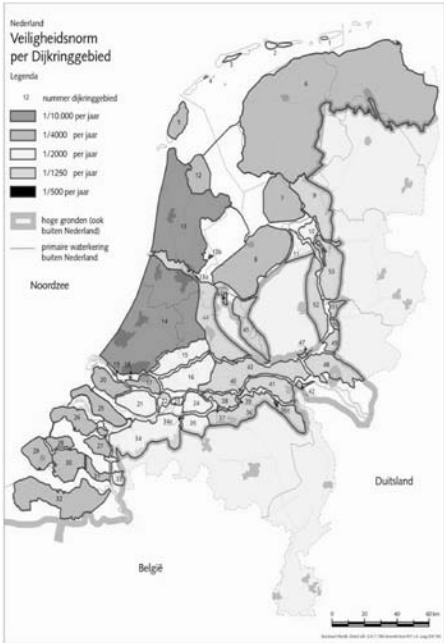
Het duurde tot 1989 voor mijn eerste artikel over de nieuwe aanpak verscheen [18]. Inmiddels had zich ook een afstudeerder gemeld die interesse toonde voor de nieuwe zogenaamde *inwendigepuntmethoden* (IPMn), namelijk Dick den Hertog. Zijn afstudeerwerk was de basis voor een tweede artikel [9]. Ook ontstond samenwerking met professor Jean-Philippe Vial van de Universiteit van Genève. Zijn lezing van het eerste artikel leidde tot een sterk vereenvoudigde versie daarvan [23]. Door de komst (op 2 september 1989) van dr. Tamás Terlaky als researchfellow bestond de Optimimalisatie Groep in Delft eind 1989 uit drie personen, want Dick den Hertog had besloten (per 1 september 1989) verder te gaan met een promotie-onderzoek. Het was het begin van een enerverende tijd met nieuwe promovendi en veel buitenlandse bezoekers. In veel gevallen werd financiële ondersteuning gezocht bij NWO, en verkregen. Ook de universiteit droeg bij uit fondsen voor researchfellows en gasthoogleraren. Bovendien profiteerde de groep van een financiële injectie door het KLSA (Koninklijk Laboratorium Shell, Amsterdam). De samenwerking met promovendi en bezoekers leidde tot tientallen publicaties in gerenommeerde tijdschriften en twee standaardboeken over IPMn [22, 25]. Daarnaast werden veel afstudeerders aangetrokken door de groep. Sommigen droegen bij aan het onderzoek van IPMn, anderen verrichtten hun afstudeerwerk extern, bij bedrijven als Philips, Shell, Heineken, Schiphol, ORTEC en ook bij TNO. In totaal studeerden tot 2006 circa tachtig studenten af bij de groep.

In het voorjaar van 2000 kondigde Terlaky zijn vertrek aan naar McMaster University (Hamilton, Canada), waar hem een hoogleraarspositie was aangeboden. De lege plaats werd opgevuld door de benoeming van dr. Hans Melissen. Vanaf oktober 2000 maakte ook dr. Etienne de Klerk deel uit van de groep, maar deze vertrok in 2003 naar de universiteit van Waterloo, Canada. Doordat met ingang van mijn emeritaat, in mei 2006, dr. Melissen werd overgeplaatst naar de groep Systeemtheorie bleef ik achter met tien promovendi.

Op de foto in Figuur 3 staan, behalve mijzelf en professor Bai, negen van deze promovendi. De tiende promovendus is ir. H.N. Post die werkzaam is bij Connexxion en zijn promotie-onderzoek extern doet, sinds kort met collega Karen Aardal als medebegeleider. Inmiddels is het aantal promovendi geslonken doordat acht van hen met succes hun proefschrift verdedigden. Bij twee van hen, Ivan Ivanov en Gamal Elabwabi, trad dr. De Klerk (UvT) op als medebegeleider. Deze was weer teruggekeerd uit Canada om in Tilburg de plaats in te nemen van de helaas jong overleden dr. Jos Sturm (1971–2003).

De nadruk in het onderzoek in onze groep heeft vanaf 1984 gelegen op algoritmen voor het oplossen van eerst lineaire, en later vooral niet-lineaire optimalisatieproblemen. Het genoemde artikel van Karmarkar bleek ach-

Figuur 3 Op de jaarlijkse conferentie van het Landelijk Netwerk Mathematische Besliskunde



Figuur 4 Dijkringen in Nederland

teraf het begin te zijn van wat wel een revolutie is genoemd in de wiskundige benadering van het optimaliseren. Daarin speelden IPMn een cruciale rol. Deze waren aanvankelijk bedoeld om lineaire problemen op te lossen. Maar rond de jaren '90 van de vorige eeuw bleken zij ook bruikbaar voor niet-lineaire problemen, met name zogenaamd convexe problemen. Dit had grote betekenis voor onder andere de systeemtheorie, waar tot dan toe onoplosbare problemen nu met standaard software konden worden opgelost. Het werd nog interessanter toen bleek dat voor heel moeilijk oplosbare combinatorische problemen (zogenaamd NP-complete problemen) met behulp van IPMn een oplossing kon worden gevonden met kwaliteitsgarantie: In polynomiale tijd kan een oplossing worden gevonden die niet meer dan een vooraf bekend percentage (bijvoorbeeld 13%) slechter is dan optimaal.

Het zou mij een plezier doen dieper in te gaan op de theorie die aan deze ontwikkelingen ten grondslag ligt. Maar ik denk velen van u een groter plezier te doen door in plaats daarvan een aantal voorbeelden van recente toepassingen van wiskunde te geven. Daarom volgt nu een aantal voorbeelden van projecten waarbij ik zelf betrokken was na mijn emeritaat.

Voorbeelden van ingenieurswiskunde

In mijn intreeredes [19–20] heb ik al enkele voorbeelden gegeven van min of meer alledaagse problemen die kunnen worden gemodelleerd als een wiskundig optimalisatieprobleem. Het gebruik van deze modellen kan essentieel zijn voor het succesvol opereren van grote en kleinere bedrijven. We beginnen met een voorbeeld waarbij ons aller veiligheid in het geding is.

Optimale veiligheid dijken. De ouderen onder ons herinneren zich ongetwijfeld de watersnood van 1953 toen er bijna 2000 dodelijke slachtoffers vielen, en de jongeren zullen zich herinneren hoe in 1995 opnieuw een kritische situatie ontstond in het Rivierenland[5] waardoor circa 200.000 mensen moesten worden geëvacueerd. Bescherming tegen overstromingen is van levensbelang in Nederland, omdat ongeveer 55% van het land overstroombaar is. Deze bescherming wordt geboden door de al dan niet versterkte duinen en de dijken. Het overstroombare deel van Nederland is verdeeld in 53 zogenaamde dijkringen. Een dijkring is een gebied dat is omringd door duinen en/of dijken. Figuur 4 toont deze dijkringen.

Voor elke dijkring is een veiligheidsnorm vastgesteld. Momenteel wordt hiervoor gebruikt de eis dat overstromingen gemiddeld niet vaker dan eens per 1250 tot 10.000 jaar plaatsvinden; het getal varieert per dijkring. Op basis van meetgegevens uit het verleden wordt een voorspelling gedaan over de te verwachten stijging van de zeespiegel en de te verwachten daling van het grondniveau. Bij de berekeningen wordt ook rekening gehouden met klimaatverandering. Dit alles wordt verwerkt in een wiskundig model.

Het gebruikte wiskundige model is gebaseerd op een kosten-batenanalyse: het totaal van de toekomstige (verdisconteerde) kosten van verhogingen van een dijk plus de te verwachten schade tengevolge van mogelijke overstromingen wordt geminimaliseerd. Een eerste versie van dit model is gemaakt door de wiskundige D. van Dantzig. Deze deed dit in opdracht van de Delta Commissie die werd ingesteld na de ramp van 1953. In 2006 is dit model verfijnd door C. Eijgenraam van het Centraal Planbureau. Anders dan Van Dantzig, hield hij rekening met de economische groei in een dijkring. Gedurende de periode 2007–2009 was ik betrokken bij een project dat onder leiding stond van professor Den Hertog (UvT) waarbij in opdracht van Deltares het model verder werd verfijnd en tevens voorstellen werden gedaan voor efficiënte methoden om het model op te lossen. De voorgestelde methoden zijn geïmplementeerd in *OptimaliseRing*, een door HKV-Lijn-in-Water ontwikkeld softwarepakket. Dit pakket zal worden gebruikt ter onderbouwing van een (principe)besluit over nieuwe veiligheidsnormen in 2011. Twee artikelen op basis van ons onderzoek zullen binnenkort worden gepubliceerd in de tijdschriften *Operations Research* en *Management Science*.

Dynamisch positioneren. Ons tweede voorbeeld is ontleend aan de offshore-industrie. We beschouwen een groot schip dat wordt gebruikt voor oliewinning. Het is belangrijk dat het schip een vaste positie inneemt boven de oliebron. Als de zee ondiep is wordt het in positie gehouden met behulp van ankerkettingen. Bij grotere dieptes is dit niet langer mogelijk met kettingen omdat deze onder hun eigen gewicht zouden bezwijken. In plaats van kettingen kunnen dan lijnen van kunstvezels worden gebruikt, bijvoorbeeld van polyester, maar dat is nogal duur.

Een alternatief is het gebruik van Dynamisch Positioneren (DP). Bij gebruik van een DP-systeem worden de krachten die op het schip werken, door wind en golven, gecompenseerd door middel van propellers onder het schip. Deze propellers zijn roteerbaar.[6] Het schip kan wel acht of zelfs meer van deze propellers hebben, bijvoorbeeld twee propellers voor, twee achter en vier of meer daartussen. Deze propellers worden in het algemeen aangedreven door elektromotoren; de benodigde energie wordt vaak opgewekt door generatoren die worden aangedreven door diesel- of gasturbines. Door de propellers te draaien en het geleverde vermogen per propeller te variëren kan het schip zeer nauwkeurig in de gewenste positie worden gehouden.

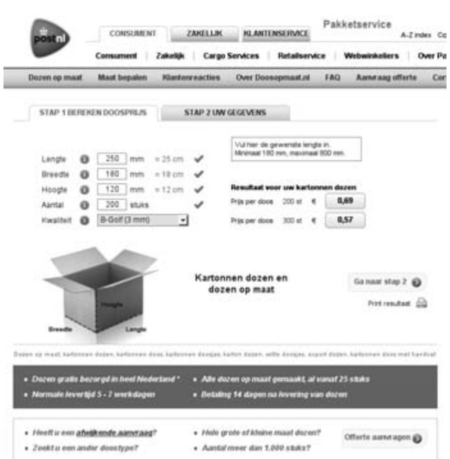
Een voordeel van schepen die met een DP-systeem zijn uitgerust is dat zij eenvoudig inzetbaar zijn. Er kunnen veel brandstofkosten worden bespaard door de propellers op een intelligente manier aan te sturen. Het ligt daarom voor de hand om te zoeken naar een aansturing die op ieder moment het door de gezamenlijke propellers geleverde vermogen minimaliseert. Daarmee wordt het een optimalisatieprobleem.

Het probleem is een niet-lineair probleem

Figuur 5 Dynamisch positioneren in bedrijf

en moet real-time, dus snel, worden opgelost. Er bestaat commerciële software voor dit probleem, maar het is niet bekend welke optimalisatiemethoden daarin worden gebruikt. Toen in 2006 een student van de afdeling Maritieme techniek, Arjen Tjallema, het probleem aan mij voorlegde realiseerde ik mij dat het als een kegelprobleem kon worden gemodelleerd. Voor het oplossen van het model bestaan sinds een jaar of vijftien zeer snelle IPM-algoritmen.[7] Tjallema heeft het model gebruikt in een bestaand simulatiepakket om een vergelijking te maken met bestaande software. Uit deze vergelijking bleek al snel dat de nieuwe aanpak een veel stabieler gedrag oplevert. Dit is te danken aan de grotere nauwkeurigheid van de oplossing van het DP-probleem en de snelheid waarmee het wordt opgelost. Uit een praktijkgeval blijkt dat onder milde weersomstandigheden de gevraagde stuwkracht met ongeveer 6% wordt verminderd (en daarmee navenant het brandstofverbruik), en bovendien dat het systeem met de nieuwe methode ongeveer 5% zwaardere weersomstandigheden aan kan, wat de inzetbaarheid significant vergroot. Er ligt een manuscript [26] klaar voor publicatie, maar hiermee wordt gewacht omdat het bedrijf waar Tjallema zijn promotieonderzoek uitvoert bezig is met een octrooiaanvraag voor de nieuwe methode.

Webshop. Een derde voorbeeld is ontleend aan een probleem dat mij werd voorgelegd door de bevriende eigenaar van een fabriek die gespecialiseerd is in het op maat vervaardigen van kartonnen dozen. Eerder werd de mogelijkheid geboden om via de website van het bedrijf een offerte aan te vragen, na opgave van de afmetingen, de kartondikte en het aantal gewenste dozen. Nadat maandelijks een bescheiden bedrag aan Google werd



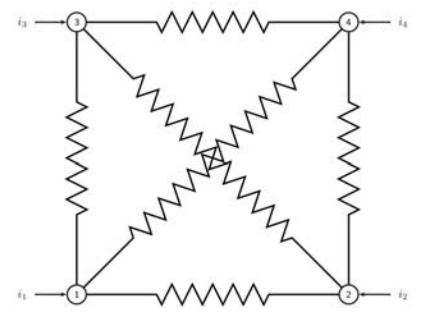
Figuur 6 Automatische offertes voor doosjes op maat

betaald bleek het aantal offerte-aanvragen significant toe te nemen. Ook herhaalde verhogingen van dit bedrag hadden hetzelfde effect. Het gevolg was dat veel tijd moest worden gestoken in het maken van offertes. Dat leidde tot de vraag of de offertes ook online konden worden gegenereerd. Een probleem daarbij was dat de gehanteerde doosprijzen niet alleen van de afmetingen, het karton en het aantal afhingen, maar dat ook rekening werd gehouden met de prijzen van concurrerende bedrijven. Hierdoor hadden de doosprijzen een nogal grillig karakter. Door middel van een niet-lineaire regressie-analyse lukte het om de handmatig berekende prijzen met grote nauwkeurigheid automatisch te berekenen. Hierdoor kon het gewenste doel worden gerealiseerd: op de site www.doosopmaat.nl kan de klant nu zelf de doosprijzen berekenen en direct bestellen. Inmiddels wordt het systeem ook gebruikt door PostNL (zie Figuur 6). De klant kan via de PostNL-site prijzen calculeren en dozen bestellen. Genoemd bedrijf vervaardigt de bestelde dozen, en PostNL levert ze af bij haar klant.

Robuuste elektrische weerstandsnetwerken. Weerstandsnetwerken zijn elektrische netwerken die alleen weerstanden bevatten. Het gedrag ervan wordt volledig geregeerd door de wetten van Ohm (1787–1854) en Kirchhoff (1824–1887). Figuur 7 toont zo'n netwerk met vier knopen; de som van de in de knooppunten aangeboden stromen is gelijk aan nul.

Gegeven zo'n netwerk (zonder spanningsbronnen) en gegeven de in- en uitgaande elektrische stromen in de knooppunten, leggen de genoemde wetten de stroomwaarden in alle weerstanden eenduidig vast. In feite worden deze waarden eenduidig bepaald door een stelsel lineaire vergelijkingen. Onze bedoeling is om de weerstandswaarden zo te bepalen dat de warmteontwikkeling (of dissipatie) in het netwerk minimaal is. We maken de natuurlijke aanname dat alle weerstandswaarden positief (of oneindig) zijn en verder dat de som van de inverse weerstandswaarden begrensd wordt door een constante waarde. Onder deze voorwaarden kan het minimaliseren van de dissipatie worden geformuleerd als een niet-lineair optimalisatieprobleem. Verrassend genoeg kan dit probleem worden herleid tot een lineair optimalisatieprobleem. Dit maakt het probleem efficiënt oplosbaar.

De optimale oplossingen die we zo krijgen kunnen zeer instabiel zijn, in die zin dat een kleine verandering in één of meer van de in- of uitgaande stroomwaarden de dissipatie onevenredig veel groter maakt. In [21] geven we

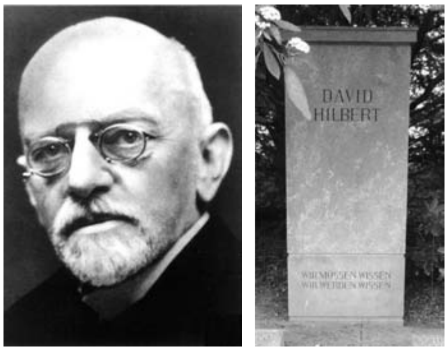


Figuur 7 Een weerstandsnetwerk met vier knooppunten

een voorbeeld van een netwerk met vijf knopen waarbij de optimale oplossing een dissipatie heeft van 16,17, maar waarbij een verstoring van slechts 10% er toe leidt dat de dissipatie aangroeit tot 344,04, dus ruim 21 maal zo groot als de optimale waarde. In de praktijk kan dit desastreus zijn, omdat het netwerk door verhitting verbrandt.

Sinds het begin van deze eeuw zijn er nieuwe methoden om onzekerheid te modelleren. Voortrekkers op dit gebied, dat bekend staat onder de naam 'robuuste optimalisatie', zijn professor A. Ben-Tal (Technion, Haifa, Israël) en professor A. Nemirovski (Georgia Tech, Atlanta, USA).[8] De door hen voorgestelde methoden berusten op een geschikt gekozen convexe 'verstoringsverzameling' die alle mogelijke verstoringen van de inputgegevens bevat.

Voor elk weerstandsnetwerk kunnen we nu de dissipatie maximaliseren over de verzameling van alle mogelijke verstoorde inputstromen; dit zijn de inputstromen die men krijgt door bij de nominale inputstroom een stroom uit de verstoringsverzameling op te tellen. Indien de verstoringsverzameling een voldoende eenvoudige structuur heeft, bijvoorbeeld een ellipsoïde of een box, dan kan deze maximalisatie efficiënt worden uitgevoerd. Het weerstandsnetwerk dat de zo verkregen maximale dissipatie minimaliseert is het meest robuust tegen verstoringen in de verstoringsverzameling. Zo'n netwerk wordt verkregen door een 'semidefiniet' optimalisatieprobleem op te lossen; dit is een bijzonder geval van een kegelprobleem. Voor details verwijzen we naar de uitgebreide literatuur over robuuste optimalisatie. Standaardwerken zijn [2] en [3]. Wanneer we deze methode toepassen op het hiervoor genoemde instabiele probleem dan kunnen we de stabiliteit aanzienlijk verbeteren. Het levert een weerstandsnetwerk op waarvoor de nominale dissipatie 18,18 is, terwijl bij een willekeurige verstoring van niet meer dan 10% de dissipatie nooit groter wordt dan 23,98. De dissipatie



David Hilbert en zijn grafsteen

zal dus in de praktijk nooit groter zijn 23,98. De prijs voor deze stabiliteit is dat de nominale waarde van de dissipatie (nu 18,18) iets groter is dan de optimale waarde (16,17); maar het levert een netwerk op dat willekeurige verstoringen van ten hoogste 10% overleeft.

Nabeschouwing
Het heeft velen verbaasd welke mogelijkheden de wiskunde biedt om verschijnselen in de natuur en in het alledaagse leven te beschrijven. In een radiorede[9] noemde Hilbert wiskunde de verbindende brug tussen theorie en praktijk, tussen denken en waarnemen. Hij verwees naar Galilei (1564–1642) die stelde dat de natuur slechts kan worden begrepen door hen die haar taal en tekens hebben leren kennen; deze taal is de wiskunde en de tekens zijn driehoeken, cirkels en andere wiskundige figuren. Ook citeerde hij Kant (1724–1804) die stelde dat in elke natuurwetenschap slechts zoveel echte wetenschap is als er wiskunde in is. Hilbert concludeerde dat hieraan, en aan talrijke toepassingen, de wiskunde het aanzien dankt dat zij bij het algemene publiek geniet.

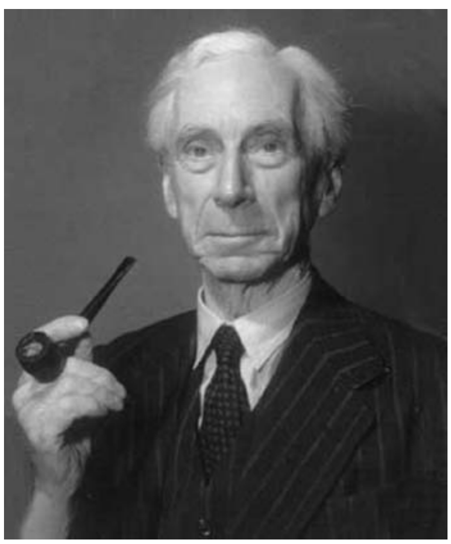
Crisis in de wiskunde
Dit aanzien was in het begin van de vorige eeuw in gevaar doordat de wiskundige wereld rond het begin van de 20ste eeuw werd geplaagd door paradoxen. Algemeen aanvaarde grondbeginselen (axioma's) leidden via gebruikelijke logische redeneringen tot tegenspraken. De daardoor ontstane verwarring bezorgde slapeloze nachten aan menig wiskundige van grote naam.

Dit maakte een fundamentele bezinning noodzakelijk op de grondslagen van de wiskunde. In de genoemde paradoxen speelden oneindige verzamelingen een voorname rol. Het begrip verzameling is één van de meest primitieve begrippen in de moderne wiskunde. Precies bij dit begrip lag de moeilijkheid. Het werd onduidelijk wat een verzameling is en wat niet. Russell had een verzameling gevonden die onvermijdelijk aanleiding gaf tot logische conflicten. Het betreft de verzameling van alle verzamelingen die zichzelf niet als element bevatten, in wiskundige notatie: $\{x : x \notin x\}$. Met deze definitie lijkt niets mis te zijn. Vraagt men echter of deze verzameling tot zichzelf behoort of niet, dan leidt dit tot een conflict, de zogenaamde Russell-paradox [11, p. 37].

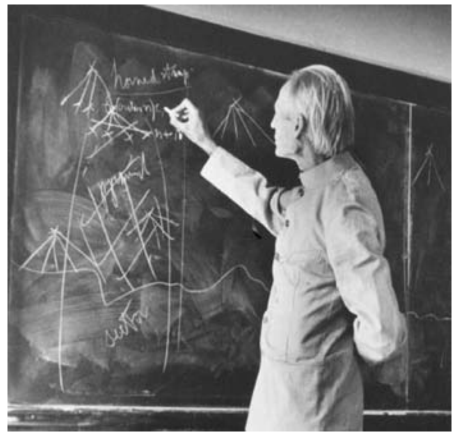
Hilbert beschouwde de wiskunde als een model van zekerheid en waarheid: "Als zelfs het wiskundige denken zou falen, waar anders zou dan zekerheid te vinden zijn?" Maar hij was er zeker van dat het allemaal goed zou komen. Anderen waren daar minder optimistisch over, of beweerden zelfs het tegendeel. Onder de laatsten nam Brouwer een prominente positie in. De aanvankelijk zeer goede relatie tussen Hilbert en Brouwer kwam door hun tegengestelde posities in deze grondslagenkwestie onder grote druk te staan, en leidde uiteindelijk tot een bitter conflict. Daarover gaat het in de volgende paragraaf.

Grondslagenstrijd
We zagen al eerder dat Ludolph van Ceulen zijn naam onsterfelijk heeft gemaakt door 35 decimalen van π te berekenen. Dankzij meer geraffineerde technieken voor het berekenen van π en de enorme rekenkracht die zelfs gewone PC's ons verschaffen, is het aantal bekende decimalen van π inmiddels 5.000.000.000.000. Hoewel dit als een enorme prestatie wordt gezien is de betekenis ervan toch betrekkelijk: het aantal ontbrekende decimalen is nog steeds oneindig groot. Ten opzichte van oneindig is vijf biljoen niet noemenswaard groter dan 35.

Overigens is inmiddels wel een vraag beantwoord die Brouwer ooit stelde, namelijk



Bertrand Russell (1872–1970)



Brouwer tijdens een voordracht

of in de decimale ontwikkeling van π de rij 0123456789 voorkomt. Doordat zoveel meer decimalen bekend zijn dan in Brouwers tijd, kon worden vastgesteld dat de rij inderdaad voorkomt. Brouwer stelde de vraag om aan te geven dat er "altijd wel onopgeloste problemen" zijn, wiskundige vragen waarop we het antwoord niet weten. De genoemde vraag van Brouwer is nu achterhaald. Maar door het rijtje in Brouwers vraag langer te maken is eenvoudig een soortgelijke vraag te stellen waarop het antwoord nog steeds onbekend is. Er zijn dus fatsoenlijke wiskundige vragen waarop we noch bevestigend noch ontkennend kunnen antwoorden.

Dit bracht Brouwer er toe om een veelgebruikte bewijsmethode ter discussie te stellen, namelijk die van het bewijs uit het ongerijmde. Dit gaat als volgt: als je bewering A wilt bewijzen dan veronderstel je dat A niet geldt en toont vervolgens aan dat deze veronderstelling tot een tegenspraak leidt. Hieruit concludeer je dat A moet gelden. Deze methode berust op de aanname dat er slechts twee mogelijkheden zijn: A geldt of A geldt niet. Dit is de wet van de uitgesloten derde: een bewering is waar of niet waar, een derde mogelijkheid is er niet: *tertium non datur*. Met andere woorden: als de ontkenning van een bewering niet waar is, dan is de bewering waar. Hier maakte Brouwer bezwaar. Voor hem is het geloof aan de onbeperkte geldigheid van de wet van de uitgesloten derde in de wiskunde een dogmatisch bijgeloof. Ondanks het wegvallen van het beginsel van de uitgesloten derde kon Brouwer een substantieel stuk wiskunde opbouwen. Voor het behandelen van oneindige objecten en structuren, zoals bijvoorbeeld oneindige rijtjes gehele getallen (keuzenrijen) slaagde hij erin om eigenschappen vast te stellen door herleiding tot eindige beginstukken. Dit is de basis van de door hem geïntroduceerde intuïtionistische wiskunde. In termen van deze benadering waren veel bestaande bewijzen ondeugdelijk. Het hele gebouw van de wiskunde moest volgens Brouwer opnieuw worden gebouwd op een intuïtionistisch fundament.

Evenals Hilbert, waren veel deskundigen van mening dat de axiomatische aanpak kon worden gered. Zij vertrouwden erop dat de axiomatische aanpak een betrouwbare leidraad zou zijn voor de oplossing van veel open vragen. Hoewel op het gebied van de analyse “zelfs geen schaduw van een tegenspraak opgedoken was”, zoals Hilbert tijdens een voordracht in 1922 uitdrukte, voelden andere wetenschappers zich toch onbehagelijk. Feitelijk was er nog maar weinig of niets gepresteerd om te bewijzen dat de axiomasystemen van de verzamelingenleer, de analyse en de rekenkunde vrij waren van tegenspraak, en evenmin was er iets bekend over de bewijskracht van die systemen. Een gevolg was dat enkele wiskundigen meer en meer neigden tot de argumenten van het intuïtionisme. Onder hen was de beroemde Hermann Weyl, een oud-leerling van Hilbert. Maar, zo wierp Hilbert tegen, de analyse, ja de wiskunde in het algemeen, was een ‘symfonie van het oneindige’, en: “uit het paradijs dat Cantor voor ons geschapen heeft, zal niemand ons kunnen verdrijven.” [11, p. 50]

Terwijl Hilbert aan zijn bewijstheorie werkte en steeds voorspelde dat het succes om de hoek wachtte, werkte Brouwer aan zijn intuïtionistische programma. Brouwer had inmiddels een paar goede studenten gekregen. Maurits Belinfante promoveerde in 1923, Barend Loor en Arend Heyting deden dat in 1925, en Wilfrid Wilson in 1928. Daarnaast was Brouwer ook zelf productief. In 1927 gaf hij op uitnodiging een serie colleges in Berlijn die veel furore maakten. Zelfs de pers schonk er aandacht aan en uitgever De Gruyter drong er bij hem op aan zijn lezingen als boek uit te geven. Een andere belangrijke uitnodiging ontving hij uit Wenen. Karl Menger was betrokken bij de Wiener Kreis en organisator van het beroemde Mathematisches Kolloquium in Wenen. Op Mengers aanraden werd Brouwer uitgenodigd om in maart 1928 twee voordrachten te houden. De enthousiaste reacties in Berlijn en Wenen bleven niet onopgemerkt in Göttingen, toen nog het wiskundige centrum van de wereld, waar Hilbert de scepter zwaaide.

Hilbert leed inmiddels sinds 1925 aan een ernstige ziekte, pernicieuze anemie. Toen hij na een moeilijke periode twee jaar later voor het eerst weer een congresvoordracht gaf, in Hamburg, verviel hij in een emotionele uitbarsting die men niet zo gauw in een wetenschappelijke context verwachten zou. Het was een regelrechte aanval op Brouwer, overigens zonder dat zijn naam werd genoemd [7, p. 315]: “Ik sta [onder deze omstandigheden] verbaasd, dat een wiskundige aan de strenge geldigheid van het *tertium non datur* twijfelt. Ik sta er nog meer verbaasd over dat, naar het schijnt, een hele gemeente van wiskundigen zich thans gevormd heeft die hetzelfde doet. Maar ik sta het meest verbaasd over het feit dat zelfs ook in de kring van wiskundigen de suggestieve kracht van een enkele temperamentvolle en geestrijke man de onwaarschijnlijkste en meest excentrieke werking kan uitoefenen.” In augustus 1928 was er een terugslag in Hilberts gezondheid; hij leed aan pijn in handen, voeten, benen en ruggenwervels. Desondanks ondernam hij nog een reis naar Bologna voor een congres. Direct daarna stortte hij in. Hij werd na een hartaanval naar een sanatorium in Luzern vervoerd waar hij tot oktober verbleef. Beseffend dat hij onder de gegeven omstandigheden gemakkelijk het leven kon laten, kwam hij tot een radicale conclusie: “Brouwer is een gevaar voor de wiskunde, en hij moet onschadelijk gemaakt worden.” Tot dan toe was Brouwer een van de meest actieve leden van de redactie van de *Mathematische Annalen*, het belangrijkste wiskundige tijdschrift. Naast Hilbert, die hoofdredacteur was, zaten in de kernredactie drie andere leden: Blumenthal, die als een soort secretaris van Hilbert fungeerde, Carathéodory en Einstein. Hilbert voegde de daad bij het woord en stuurde Brouwer een ontslagbrief.

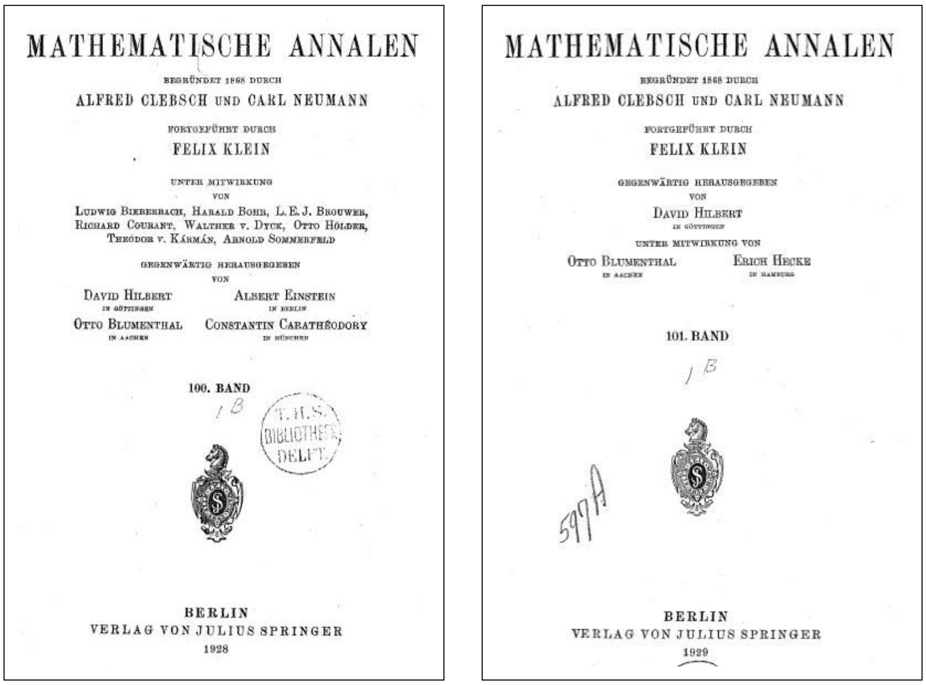
Het vermoeden ligt voor de hand dat Hilbert vreesde dat bij verdere verslechtering van zijn gezondheid Brouwer in de kernredactie zou worden opgenomen en, nog erger, wellicht het hoofdredacteurschap zou toevallen. Dit gevaar probeerde hij door deze brief af te wenden. Carathéodory wees Brouwer op de wankele gezondheidstoestand van Hilbert, en verzocht hem af te zien van tegenstand omdat dit in Hilberts toestand dodelijk zou kunnen zijn. Ondanks de verbijsterende vernedering die hem door Hilbert was aangedaan, wilde Brouwer niet verantwoordelijk gehouden worden voor diens dood. Na ampel beraad besloot hij zich niet zonder meer te conformeren aan Carathéodory’s verzoek. Op 2 november stuurde hij hem een brief, met afschrift naar Blumenthal [7, p. 336]: “Na een nauwgezette overweging en verregaande consultering moet ik het standpunt innemen, dat ik het door u aan mij gerichte

Constantin Carathéodory (1873–1950) en Otto Blumenthal (1876–1944)

verzoek, mij tegenover Hilbert als tegenover een ontoerekeningsvatbaar iemand te gedragen, slechts dan zou kunnen inwilligen als het [verzoek] mij schriftelijk en wel gemeenschappelijk van de zijde van Hilberts vrouw en zijn huisarts bereikt zou hebben.” De zaak kreeg hierdoor een heftig vervolg. Uiteindelijk werd er eind december voor gekozen om na de verschijning van het honderdste deel van de *Annalen* de hele redactie te ontslaan en een nieuwe te benoemen, aldus de schijn vermijdend dat de actie tegen Brouwer was gericht. Einstein en Carathéodory weigerden deel uit te maken van de nieuwe redactie, alleen Hilbert en Blumenthal werden opnieuw benoemd. Zie Figuur 8. Voor veel meer details verwijs ik naar [7], waaraan het meeste van het bovenstaande is ontleend. Hilbert had dus zijn zin gekregen. Brouwer was op een zijspoor gezet.[10]

Het jaar 1930 bracht een verrassende wending in de stand van zaken. Hilberts positie werd nog eens verwoord in de laatste drie zinnen van de eerder genoemde Königsbergse radiorede: “De eer van de menselijke geest, zo zegt de beroemde wiskundige Jacobi, is het enige doel van alle wetenschap. We moeten geen geloof hechten aan hen die tegenwoordig met een filosofische gezichtsuitdrukking en op verwaande toon de ondergang van de cultuur voorspellen en tot het Ignorabimus vervallen. Voor ons is er geen Ignorabimus, en volgens mij ook zeker voor de natuurwetenschap niet. In plaats van het dwaze Ignorabimus geldt daarentegen voor ons de leus: Wij moeten weten, wij zullen weten.”

De toespraak werd uitgezonden op 8 september 1930 en was gebaseerd op een lezing die Hilbert eerder op die dag had gehouden tijdens een congres in Königsberg van het genootschap van Duitse natuuronderzoekers en artsen, onder de titel ‘Naturerkennen und Logik’. Hij wist toen nog niet dat een dag eerder, tijdens een ander congres, ook in Königsberg, iets opmerkelijks was gebeurd. Op de laatste dag van dit andere congres,[11] tijdens een afsluitende discussiezitting, had de nog on-



MATHEMATISCHE ANNALEN
BEGRÜNDET 1868 DURCH
ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN
FORTGEFÜHRT DURCH
FELIX KLEIN
UNTER MITWIRKUNG
VON
LUDWIG BIEBERBACH, HARALD BOHR, L. E. J. BROUWER,
RICHARD COURANT, WALTHER v. DYCK, OTTO HÖLDER,
THEODOR v. KÁRMÁN, ARNOLD SOMMERFELD
GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN
VON
DAVID HILBERT IN GÖTTINGEN — ALBERT EINSTEIN IN BERLIN
OTTO BLUMENTHAL IN AACHEN — CONSTANTIN CARATHÉODORY IN MÜNCHEN
100. BAND
/B

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1928

MATHEMATISCHE ANNALEN
BEGRÜNDET 1868 DURCH
ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN
FORTGEFÜHRT DURCH
FELIX KLEIN
GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN
VON
DAVID HILBERT
IN GÖTTINGEN
UNTER MITWIRKUNG VON
OTTO BLUMENTHAL IN AACHEN — ERICH HECKE IN HAMBURG
101. BAND
/B

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1929

Figuur 8 Het omslag van de *Mathematische Annalen* voor en na de redactiewisseling

bekende, jonge Kurt Gödel (1906–1978) het woord genomen. Met zijn zachte stem had deze meegedeeld dat men, “onder de veronderstelling dat de klassieke wiskunde vrij is van tegenspraken, voorbeelden van beweringen kan geven die weliswaar inhoudelijk juist zijn, maar in het formele systeem van de klassieke wiskunde niet te bewijzen zijn.” Hiermee was een van Hilberts hoofddoelen verworpen: er is geen formeel systeem dat precies alle ware wiskundige beweringen levert. Hilbert was er niet bij. Daarom kon hij een dag later zonder de minste twijfel zijn dogma herhalen: Wir werden wissen!

In feite was de situatie nog erger voor Hilbert en zijn programma dan zich oorspronkelijk liet aanzien. Gödel had namelijk al snel ingezien dat zijn methoden ook aantoonden dat (zeg) de rekenkunde haar eigen consistentie niet kon bewijzen; hiermee was Hilberts dogma volledig weerlegd. De hoop op eenvoudige consistentiebewijzen voor ingewikkelde theorieën was vervlogen. Gödels resultaten kunnen ruwweg als volgt worden samengevat [27, p. 3]: “Een formeel wiskundig systeem is niet consistent of niet volledig.” [12] Hiermee had Brouwer dus toch gelijk gekregen. Toen hij Gödels resultaat leerde kennen reageerde hij nogal onderkoeld met de woorden: “Dat verbaast mij niet, ik had dit op inhoudelijke gronden al verwacht”. Hilbert is de slag niet meer te boven gekomen. Na 1930 speelde Hilbert dan ook vrijwel geen rol meer, ten dele omdat hij sterk aan geestkracht inboette [7, p. 358], ten dele ook omdat de door anderen voorspelde ‘ondergang van de cultuur’ zich aan zijn eigen wiskundige instituut in Göttingen manifesteerde. Daarover iets meer in de volgende paragraaf.

Kurt Gödel (links) en Albert Einstein (1879–1955)

Leren van de tijd

In zijn radiorede suggereerde Hilbert dat zijn tegenstanders, die tot het Ignorabimus vervielen, dit deden omdat zij hun oor leenden aan hen die de ondergang van de cultuur voorspelden. We zagen al dat de tijd Hilbert in het ongelijk heeft gesteld voor wat betreft het Ignorabimus: de solide fundering voor de wiskunde die Hilbert zocht, en waarvan hij stellig meende dat die bestond, bestaat niet. Het waarheidsgehalte van de spreuk ‘Wij weten het niet, en we zullen het nooit weten’ (zie noot [9]) was gebleken groter te zijn dan dat van Hilberts dogma: ‘Wij moeten weten, en wij zullen weten’. Maar er is meer.

Waarom verweet Hilbert aanhangers van het Ignorabimus geloof te hechten aan hen die de ondergang van de cultuur voorspelden? Kan met recht gezegd worden van mensen die Hilberts dogma afwezen, zoals Brouwer, Gödel en Wittgenstein (1889–1951), dat zij dit deden vanwege een dreigende cultuurondergang? Ik meen van niet. Opmerkelijk is wel dat er bij de laatstgenoemden een aandacht was voor het hogere, die bij Hilbert volledig afwezig lijkt te zijn.

Hilberts formulering impliceert dat hij in de jaren ’30 van de vorige eeuw geen enkele bedreiging voor de cultuur zag, dit in tegenstelling tot vooraanstaande historici en wetenschappers die zich grote zorgen maakten over het culturele klimaat in Europa en vreesden voor haar ondergang. De tijd heeft ons geleerd dat zijn optimistische cultuurvisie niet houdbaar is gebleken. Nog geen tien jaar later brak het onheil los in Europa. Het eeuwenoude christelijk-humanistische anti-semitisme, soms sluimerend maar altijd aanwezig in Europa, culmineerde in een verdrukking van de Joden die zonder weerga was. Wie de verslagen ervan leest (zie bijvoorbeeld [10] en [13]) moet erkennen dat de woorden ‘waanzin’ en ‘razernij’ van bijvoorbeeld onze landgenoot Huizinga [12, p. 1-2] profetisch waren.

Hilbert zelf heeft moeten ervaren hoe cultuurvernietigend deze razernij te werk ging. [13] Al in 1933 verdween de ene na de andere medewerker, veelal door ontslag op basis van nieuwe anti-Joodse wetgeving. In Göttingen werden Felix Bernstein, Edmund Landau en Emmy Noether vanwege hun Jood-zijn ontslagen. Hermann Weyl (niet Joods) had ook een goede reden om te vertrekken — zijn vrouw was Joods, en dat betekende uiteindelijk dat hij van haar zou moeten scheiden; hij vertrok naar Princeton [7, p. 384]. Richard Courant (wel Joods) was directeur van het wiskundige instituut, maar in 1933 nog gevrijwaard van ontslag dankzij verrichte militaire dienst in de Eerste Wereldoorlog; vanwege het voor Joden ongunstige klimaat week hij uit naar de Verenigde Staten, alwaar hij de stichter werd van het beroemde Courant Institute aan de universiteit van New York. Hilbert was er aldus getuige van hoe degenen die ten tijde van zijn radiorede de ondergang van de cultuur vreesden dit met goede redenen hadden gedaan. Zijn instituut, dat tot 1933 wereldwijd toonaangevend was voor de

Bernstein (1878–1956), Landau (1877–1938), Noether (1882–1935), Weyl (1878–1956) en Courant (1888–1972)

wiskunde, werd geheel ontmanteld. Toen de minister van Onderwijs hem vroeg “En hoe gaat het met de wiskunde in Göttingen, nu ze van de Joodse invloed is bevrijd?”, zei Hilbert: “Wiskunde in Göttingen, die is er eigenlijk niet meer” [7, p. 388]. “Toen ik jong was”, zei hij, “besloot ik nooit te herhalen wat ik oude mensen hoorde zeggen — hoe goed het verleden was, en hoe slecht het heden. Ik zou dat op mijn oude dag nooit zeggen. Maar nu moet ik wel.” [17, p. 205]

Slotopmerkingen

Eén van de aantrekkelijke dingen van wiskunde is dat men zijn (of haar) gelijk niet haalt door bijvoorbeeld harder te gaan praten, of door middel van een democratische procedure, of eenvoudig door macht. Alleen een formeel bewijs volstaat. Soms is het vinden van zo’n bewijs verre van eenvoudig, en kan het veel tijd en ‘onvermoeide arbeid’ vergen. Ook in de afgelopen decades zijn bewijzen voor een aantal als moeilijk ervaren problemen gevonden, waaronder het vierkleurenprobleem (1977), de oplosbaarheid van lineaire optimalisatie in polynomiale tijd (1979), het vermoeden van Fermat (1995), het vermoeden van Kepler (2002) en onlangs ook de onjuistheid van het vermoeden van Hirsch (2010). Het feit dat moeilijke problemen werden opgelost — zij het soms pas na eeuwen — bracht mensen als Hilbert er toe te denken dat dit uiteindelijk bij elk probleem het geval zou zijn. Anderen beseften dat dit niet waar kon zijn. Brouwer was zo iemand, maar ook bekende tijdgenoten van hem, zoals bijvoorbeeld Wittgenstein, Gödel, en ook Niels Bohr (1885–1962). Zij gebruikten uitdrukkingen als ‘onuitputtelijk’ en ‘onuitsprekelijk’ om aan te geven dat er dingen zijn die buiten het onderzoeksveld van de wiskunde en wetenschap liggen. Gödel bijvoorbeeld zei dat de wiskunde en wetenschap onuitputtelijk zijn, en Wittgenstein stelde in wezen hetzelfde door te zeggen dat er onuitsprekelijke dingen zijn die zich tonen in bijvoorbeeld de mystiek. Het hing voor hen samen met het bewustzijn dat de werkelijkheid meer omvat dan de voor ons zichtbare dingen. Dit besef, dat dominant was bij degenen die aan de wieg stonden van de Westerse wetenschap, is met name in de tweede helft van de vorige eeuw onder vuur komen te liggen.

Het christelijk geloof biedt een totale visie op de wereld en het leven, inclusief het sterven. Van de wetenschap werd dat ook verwacht. Het zoeken naar een allesomvattende theorie voor de natuurkunde is daarom lange tijd het ideaal geweest. Dit ideaal wordt door sommigen nog steeds aangehangen, door anderen betwijfeld. In feite is dit ideaal vergelijkbaar met Hilberts programma voor de wiskunde. Inmiddels zijn wij er wel achter gekomen dat de wereld ingewikkelder in elkaar zit dan gedacht. Maar er is nog geen Gödel in de natuurkunde opgestaan. Wellicht daardoor leeft de hoop op een ‘volledige’ natuurkunde nog steeds. Wel zijn er geheimen in de driedimensionale wereld om ons heen die er blijk van geven dat onze wereld niet meer is dan een projectie van een hogerdimensionale werkelijkheid.[14]

Het mag opmerkelijk heten dat voor de verklaring van ‘onze’ werkelijkheid een theorie nodig blijkt te zijn die zich baseert op ‘zaken die niet gezien worden’.[15] Is dit niet een bewijs dat het ‘gesloten wereldbeeld’ dat de wetenschap doorgaans hanteert onvoldoende is om onze werkelijkheid wetenschappelijk te verklaren? Dit brengt ons dicht bij wat Gödel bewees voor de wiskunde. Het brengt mij er toe meer in het algemeen te concluderen dat wanneer we proberen de werkelijkheid (of een deel daarvan) tot op de bodem te begrijpen, wat Hilbert voor de wiskunde wilde doen, we op een grens stuiten. Op deze grens, waar volledigheid of consistentie van het denken afwezig blijkt, doemt de verwarring op die een wetenschapper slapeloze nachten kan bezorgen.

Nu mijn antwoord op de vraag ‘Komt onvermoeide arbeid alles te boven?’. Het aan Vergilius ontleende motto van het Wiskundig Genootschap heeft velen gestimuleerd om prachtige dingen te ontdekken, inclusief mijzelf. Maar dat heeft ook geleid tot de vaststelling dat vanwege de ‘onuitputtelijkheid’ (of ‘onvolledigheid’) van de wiskunde onze arbeid niet ‘alles’ te boven kan komen. En dat geldt mijns inziens niet alleen de wiskunde, maar alle wetenschappen: alle wetenschappen lijden aan het euvel onvolledig te zijn.

Noten

1 Een meer uitgebreide versie van de rede, met veel details en voetnoten, is te downloaden van http://www.st.ewi.tudelft.nl/~roos/Afscheidsrede.pdf. Zolang de voorraad strekt wordt een gedrukte versie op aanvraag toegezonden (stuur daarvoor een e-mail naar C.Roos@tudelft.nl).

2 Met dank vermeld ik de namen van hen die mij hielpen tijdens het schrijven van deze rede en bij het samenstellen van de stamboom van wiskundigen in Delft, door commentaar te leveren op eerdere versies, het ter beschikking stellen van foto’s, het aanreiken van interessante referenties, gegevens over namen in de stamboom, et cetera: prof. dr. Floris Cohen, prof. dr. Dirk van Dalen, prof. dr. Gerrit van Dijk, prof. dr. Jacques Dreze, dr. K.P. Hart, dr. Bert Hofman, prof. dr. Jan Hogendijk, Jos Knulst, drs. Jaap Kruidenier, Mw. W. Loonstra-Verdenius, ir. Dick Mensch, ir. Arjen Tjallema, prof. dr. Arie de Reuver, dr. Herman te Riele, prof. em.dr. Jan Roegiers, Gerda Roos, Carl Schneider ing., dr. Hans J. Visser en prof. dr. Herman van der Wee.

3 Afgebeeld is slechts een deel van de complete stamboom. Deze moet worden gelezen als volgt: Als er een pijl loopt van A naar B dan was B promotor van A. Een sterretje bij een naam betekent dat niet alle promotoren zijn opgenomen. Een stamboom van alle huidige (en sommige ex-)wiskunde hoogleraren en UHD’s in Delft is te vinden op www.isa.ewi.tudelft.nl/~roos/StamboomW_EWI.pdf of via de link ‘Wetenschappelijke stamboom’ op de site http://ewi.tudelft.nl/nl/over-de-faculteit/afdelingen/toegepaste-wiskunde.

4 Voor de voorafgaande periode verwijs ik naar mijn intreeredes in Leiden en Delft [19–20].

5 De Betuwe, de Bommelerwaard en het Land van Maas en Waal.

6 Ook ‘normale schroeven’ op een schroefas worden gebruikt, eventueel in combinatie met een roer, of ‘boegschroeven’ die alleen dwarskracht kunnen leveren.

7 Het model is een zogenaamd ‘second-order cone’ optimalisatieprobleem. Een zeer efficiënt en daarom veel gebruikt softwarepakket voor het oplossen van dergelijke problemen is MOSEK, dat onder andere draait onder Matlab.

8 Beiden verbleven tijdens een ‘sabbatical leave’ als gasthoogleraar in Delft.

9 Deze radiorede is in zijn geheel te lezen en te beluisteren op de site http://math.sfsu.edu/smith/Documents/HilbertRadio/HilbertRadio.

pdf. De laatste woorden waren 'Wir müssen wissen, Wir werden wissen'. Deze slogan werd in de wandeling *Hilberts dogma* genoemd en is op Hilberts grafsteen gebeiteld. Hilbert neemt hiermee afstand van hen die menen dat er grenzen zijn aan de wetenschappelijke kennis. Hun positie was verwoord door de Duitse fysicus Emil du Bois-Reymond (1818–1896). Deze had in 1880 in Berlijn een rede gehouden voor de Berlijnse Academie van Wetenschappen en daarin een aantal problemen genoemd waarvan hij meende dat noch de wetenschap noch de wijsbegeerte ooit de oplossing zou vinden. Van hem is de spreuk afkomstig waartegen Hilbert bezwaar maakt, namelijk *Ignoramus et Ignorabimus*, oftewel 'Wij weten het niet, en we zullen het nooit weten'.

10 Intussen had Heyting naam gemaakt door een prijsvraag van het Wiskundig Genootschap te winnen waarin gevraagd werd op de manier van de klassieke (aristotelische) logica een axiomatisering van Brouwers logica te maken. Hij ontwikkelde zich tot een nieuwe propagandist van het intuïtionisme. Zijn werk vond expliciete waardering bij Brouwer. Van punten die Brouwer zelf naar voren had willen brengen zei hij dat zij door Heyting "op een magistrale wijze [waren] verhelderd".

11 Van 5 tot 7 september 1930 vond een symposium plaats in Königsberg in Pruisen over de grondslagen van de wiskunde. Er waren vier hoofdvoordrachten: Heyting voor de intuïtionisten, Von Neumann voor de formalisten, Carnap voor de logicisten, en Waisman vertolkte Wittgensteins ideeën. Gödel woonde dit congres bij, van Hilbert is dit niet zeker. Zeker is dat Hilbert er niet bij was toen Gödel zijn eerste zogenaamde onvolledigheidsstelling bekend maakte. Zijn volgelingen bespaarden hem aanvankelijk het desastreuze nieuws, waardoor Hilbert pas een half jaar later voor het eerst iets hoorde over Gödels opmerkelijke resultaten. Zie ook [7, p. 358; 11, p. 75; 1, p. 16; 8, p. 68–71].

12 Onder de volledigheid van een axiomasyteem verstaat men dat uit het axiomasysteem alle correcte formules van een zeker inhoudelijk te karakteriseren vakgebied te verkrijgen zijn. Consistentie van het axiomasyteem betekent dat er geen incorrecte formules uit zijn af te leiden. Zie bijvoorbeeld [11, p. 59].

13 145 wiskundigen ontvluchtten Duitsland, 17 werden vermoord, waaronder de eerder genoemde Blumenthal (1876–1944). Hij was een goede vriend van Hilbert. Vanwege zijn Joodse ras werd hij in 1933 in Aachen ontslagen als docent en in 1938 als redacteur van de *Mathematische Annalen*. Hij week uit naar Delft waar hij korte tijd als tutor werkzaam was aan de TU. Omdat hij slechts één student had was hij afhankelijk van liefdadigheid door het Protestantse Hulpcomité. Tijdens de Duitse bezetting vertrok hij naar Utrecht. In 1943 werden hij en zijn vrouw gearresteerd en naar Westerbork gezonden, waar zijn vrouw stierf. In 1944 werd hij verplaatst naar Theresienstadt; daar overleed hij zes maanden later aan longontsteking, dysenterie en tuberculose [24].

14 In de moderne fysica zoekt men naar een unificerende theorie voor alle elementaire deeltjes. Er wordt daarbij gebruik gemaakt van het begrip supersymmetrie. Supersymmetrie kan echter alleen bestaan als de ruimte tiendimensionaal is [15]. Het is opvallend dat deze theorie gebruik maakt van objecten buiten de voor ons waarneembare werkelijkheid. Objecten dus die onzichtbaar zijn, niet omdat ze te klein zijn om gezien te worden onder de beste microscopen, maar die niet te zien zijn omdat ze buiten onze driedimensionale werkelijkheid liggen; zij zullen dus nooit door een mens gezien worden. Voor een wiskundige hoeft dit niet heel verrassend te zijn. Het betekent dat de werkelijkheid waarin wij leven een deelruimte (lineair of niet-lineair) is van een grotere, hogerdimensionale werkelijkheid; doordat onze zintuigen niet buiten onze eigen werkelijkheid kunnen waarnemen zijn alle 'dingen' daarbuiten onzichtbaar. Interessant is in dit verband het volgende citaat van Brouwer: "...dat de fysicus zich slechts met de projecties der verschijnselen bezighoudt, ...". [7, p. 89].

15 Het is intrigerend om te filosoferen over de mogelijkheden die een vier- of hogerdimensionaal wezen heeft ten opzichte van wezens in een driedimensionale wereld. Het boekje *Flatland* van Edwin Abbott Abbott kan daarbij helpen; de auteur beschrijft daarin hoe iemand uit een denkbeeldige tweedimensionale wereld in contact komt met een driedimensionaal wezen, en daarbij uit zijn eigen wereld wordt gehaald. Het blijkt een ongelooflijk indrukwekkende ervaring te zijn; terug in zijn eigen wereld is hij er zo vol van dat het onmogelijk is om erover te zwijgen. Hij wordt echter niet begrepen, voor gek verklaard, en vervolgens opgesloten.

Referenties

1 Jeremy Avigad, Gödel and the metamathematical tradition, 2007. See http://www.andrew.cmu.edu/user/avigad/Papers/goedel.pdf.

2 A. Ben-Tal, L. El Ghaoui, en A. Nemirovski, *Robust Optimization*, Princeton Series in Applied Optimization. Princeton University Press, Princeton, USA, 2009.

3 A. Ben-Tal en A. Nemirovski, *Lectures on Modern Convex Optimization. Analysis, Algorithms, Engineering Applications*, MPS-SIAM Series on Optimization. SIAM, Philadelphia, USA, 2001.

4 Peter Borwein, The amazing number π, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5/1(3):254–258, 2000.

5 Henk J.M. Bos, De cirkel gedeeld, de omtrek becijferd en pi gebeiteld: Ludolph van Ceulen en de uitdaging van de wiskunde, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5/1(3):259–262, 2000.

6 Ludolph van Ceulen, *Van den Circkel*, Jan Andrieszoon, Boeckvercooper, Delft, 1596. Ik citeer uit de transcriptie van Marloes Bazeliet et al., die te vinden is op http://www.ludolphvanceulen.nl/site/vandencirckel.php.

7 D. van Dalen, *L.E.J. Brouwer, 1881–1966. Een biografie. Het heldere licht van de wiskunde*, Uitgeverij Bert Bakker, Amsterdam, 2001.

8 John W. Dawson Jr., *Logical dilemmas: The life and work of Kurt Gödel*, A K Peters Ltd., Wellesley, MA, USA, 2005.

9 D. den Hertog en C. Roos, A survey of search directions in interior point methods for linear programming, *Mathematical Programming*, 52:481–510, 1991.

10 Saul Friedlander, *Nazi-Duitsland en de Joden. Deel I: De jaren van vervolging 1933-1939; Deel II: De jaren van vernietiging 1929-1945*, Nieuw Amsterdam, Amsterdam, NL, 2007.

11 Gianbruno Guerrerio, *Gödel. Mathematische waarheid en logische paradoxen*, Natuur & Techniek, onderdeel van Veen Magazines, Amsterdam, 2004. Oorspronkelijke titel: Kurt Gödel - i grandi della scienza. Vertaling en bewerking: Jan Willem Nienhuys.

12 J. Huizinga, *In de schaduwen van morgen. Een diagnose van het geestelijk lijden van onzen tijd*, H.D. Tjeenk Willink & Zoon N.V., Haarlem, 1935. Vierde herziene druk.

13 Samuel D. Kassow, *Wie schrijft onze geschiedenis. Het dramatische verhaal van het verborgen archief uit het getto van Warschau*, Uitgeverij Balans, Amsterdam, NL, 2007.

14 Cor Kraaikamp en Irene Driessen, Pi in de Pieterskerk, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5/1(3):250–253, 2000.

15 George Musser, Extra dimensions, *Scientific American*, 302(6):39, 2010.

16 R.M.Th.E. Oomes, J.J.T.M. Tersteeg, en J. Top, Het grafschrift van Ludolph van Ceulen, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5/1(2):156–161, 2000.

17 Constance Reid, *Hilbert*, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

18 C. Roos, A new trajectory following polynomial–time algorithm for the linear programming problem, *Journal of Optimization Theory and its Applications*, 63:433–458, 1989.

19 C. Roos, *Modelleren en Optimaliseren met Wiskunde. Beoefening van Wiskunde in het Spoor van Newton*, Universiteit Leiden, Leiden, 1999. Intreerede.

20 C. Roos, De tijd zal het leren (in Dutch), *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5.5(3):186–202, 2004.

21 C. Roos, Y. Bai, en D. Chaerani, Robust electrical network topology design by conic optimization. Verschijnt binnenkort in *Sultan Qaboos University Journal for Science*.

22 C. Roos, T. Terlaky, en J.-Ph. Vial, *Theory and algorithms for linear optimization*, Springer, Chichester, UK (1st Edition, *Theory and Algorithms for Linear Optimization. An Interior-Point Approach*. John Wiley & Sons, 1997), 2005.

23 C. Roos en J.-Ph. Vial, A polynomial method of approximate centers for the linear programming problem, *Mathematical Programming*, 54:295–306, 1992.

24 R. Siegmund-Schultze, *Mathematicians fleeing from Nazi Germany*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2009.

25 Tamás Terlaky, editor, *Interior point methods of mathematical programming*, volume 5 of *Applied Optimization*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.

26 A. Tjallema en C. Roos, A new method for thrust allocation in dynamic positioning systems, 2009. Manuscript.

27 Hao Wang, *A logical journey. From Gödel to philosophy*, MIT Press, Cambridge, Masachusetts, 1997.

28 Steven Wepster, Ludolph van Ceulen in Hollandse kringen, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5/11(1):63–69, 2010.