Jan P. Hogendijk
Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
Postbus 80010
3508 TA Utrecht
j.p.hogendijk@uu.nl

Vakantiecursus

Middeleeuwse islamitische geometrische ornamentiek

Overal in de islamitische wereld zijn prachtige geometrische patronen te zien in middeleeuwse moskeeën en paleizen. Wat zijn de methoden van de middeleeuwse ontwerpers? Welke wiskundige kennis gebruiken ze? En heeft de islamitische geometrische ornamentiek een diepere betekenis? Tijdens de CWI-vakantiecursus 'Symmetrie' in augustus 2011 gaat Jan Hogendijk op deze vragen in.

Geometrische ornamenten kwamen al vroeg in de islamitische traditie voor, en werden in de loop van de tijd steeds ingewikkelder. In de West-Arabische kunst (Spanje, Marokko) zijn de patronen bij voorkeur gebaseerd op regelmatige zeshoeken en achthoeken, en ook regelmatige veelhoeken met 12, 24, 16 en 32 zijden. Veel voorbeelden zijn te vinden in het Alhambra in Granada. In Iran en aangrenzende gebieden hadden de ontwerpers een voorliefde voor de vijfhoek en tienhoek. Patronen met regelmatige zevenhoeken, negenhoeken, elfhoeken en dertienhoeken zijn zeldzaam maar komen wel voor. De islamitische geometrische ornamentiek bereikte een hoogtepunt in de zeventiende eeuw in Iran.

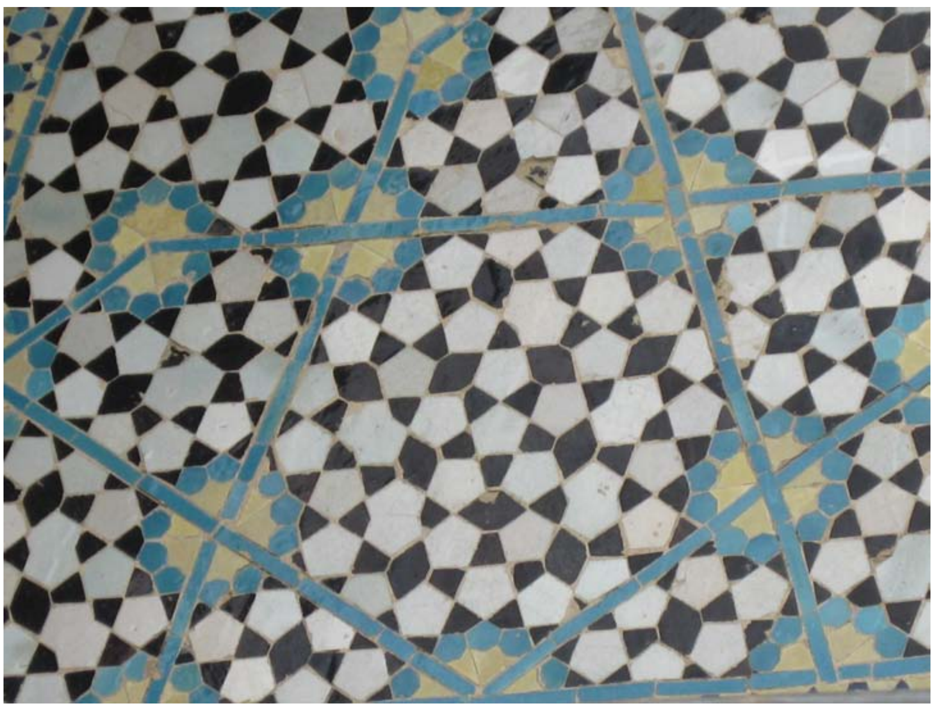


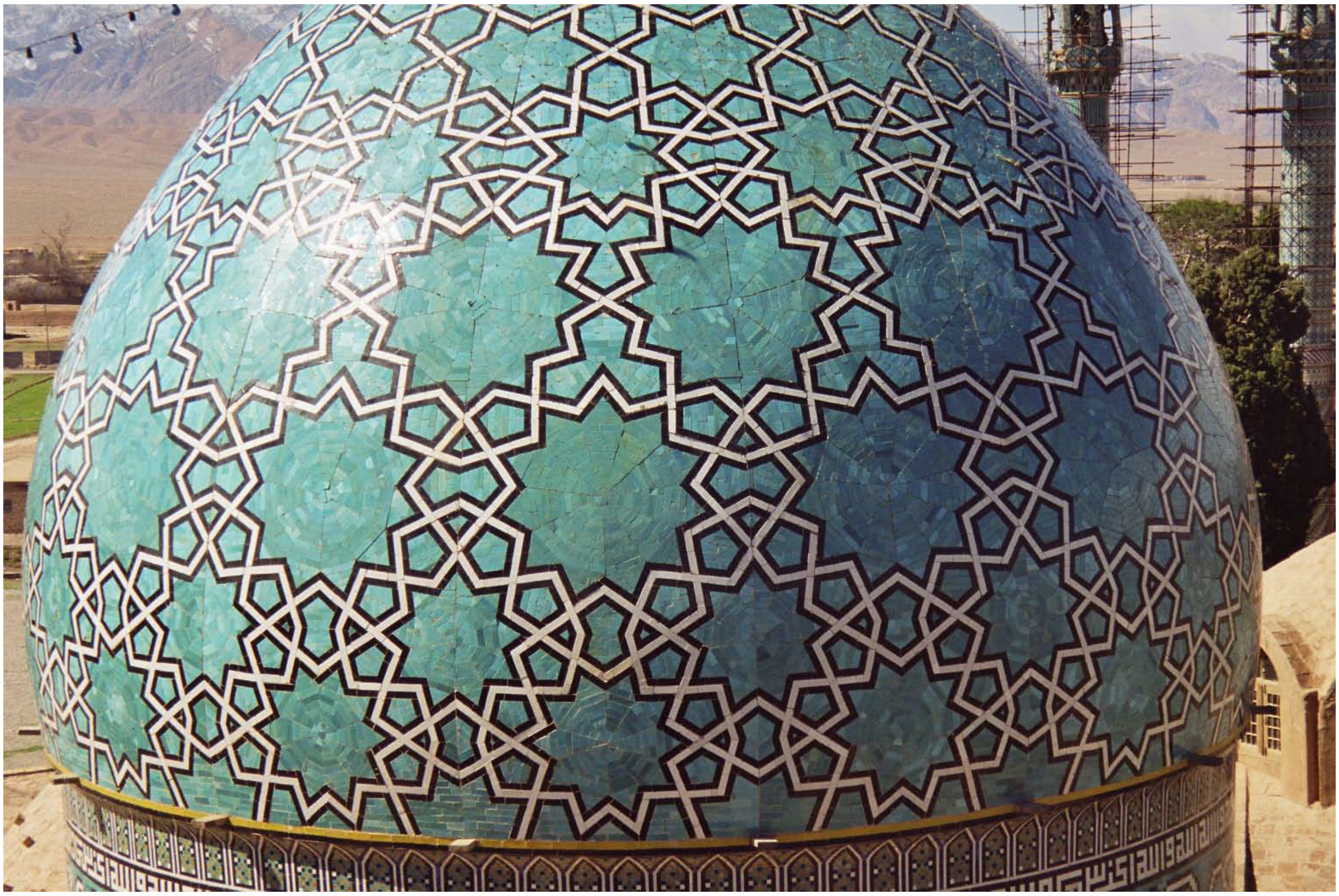
Foto: J.P. Hogendijk

Figuur 1 Detail van mozaïek in de Darb-e Imam, Isfahan

Driedimensionale geometrische patronen zijn te vinden op de buitenkant van sommige koepels. Het bekendste voorbeeld is de koepel op het graf van de soefi-heilige Shah Nematollah Vali (1330–1431) in Mahan, Iran. Zie Figuur 2.

Een andere driedimensionale geometrische kunstvorm is de muqarnas, oorspronkelijk een soort stalactietengewelf. In het begin was de functie van muqarnas om in een vierkant gebouw met een ronde koepel een mooie overgang van de verticale muren naar de koepel te maken. De muqarnas ging al gauw een eigen leven leiden, en soms is de hele binnenkant van de koepel met een stalactietengewelf overdekt. Ook hiervan zijn prachtige voorbeelden in het Alhambra te vinden. In dit artikel gaan we niet verder op muqarnas in (om een indruk te krijgen zie [8], en op het internet staan prachtige platen).

De islamitische geometrische kunst heeft in de moderne tijd velen geïnspireerd. M.C. Escher (1898–1972) maakte een studie van de kunst in het Alhambra en ontwikkelde op basis daarvan een eigen manier om het vlak te vullen met figuren [2, pp. 24, 41, 50–55]. islamitische geometrische ornamenten laten zich uitstekend gebruiken om wiskundige begrippen zoals 'symmetrie' en ook 'aperiodie-



Figuur 2 Graftombe van Shah Nematollah Vali in Mahan, Iran

ke betegelingen' aan een breed publiek uit te leggen.

In dit artikel onderzoeken we enkele achtergronden van de middeleeuwse islamitische ornamentiek, en we zullen moderne theorieën over dit onderwerp vergelijken met het weinige dat bekend is uit middeleeuwse bronnen.

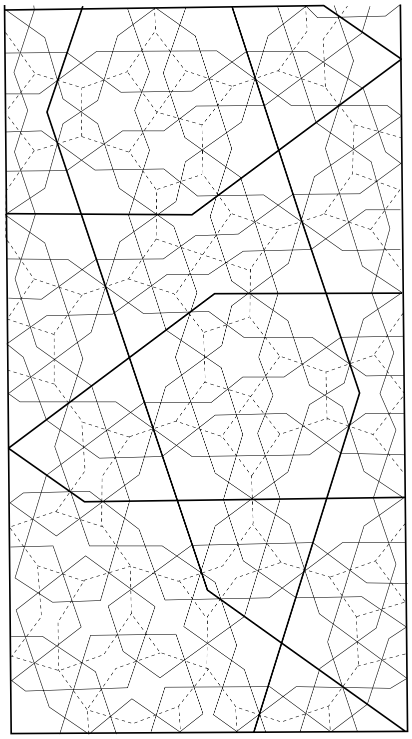
De methoden van de ontwerpers

Diverse moderne islamitische geleerden en handwerkers hebben tegen mij gezegd dat de islamitische geometrische kunst niet zozeer met bewuste methoden te maken had. De kunstenaars zouden door hun gevoel zijn geleid en God (of hun geloof in God) zou er voor gezorgd hebben dat de ornamenten perfect waren. Er zou dus geen wiskunde en geen methode nodig zijn.

Deze opvatting komt niet overeen met mijn eigen ervaring. Wie wel eens geprobeerd heeft, een ingewikkeld middeleeuws islamitisch patroon precies na te tekenen, weet dat dit een oefening in nederigheid is. En daarna is het weer een nieuwe opgave om zo'n patroon zo te construeren dat het precies in een gegeven ruimte past.

Laten we eens kijken naar wat de middeleeuwse islamitische bronnen zeggen over het construeren van (vlakke) geometrische ornamenten. Die bronnen zijn er in twee soorten. Allereerst zijn er de ornamenten zelf, op middeleeuwse gebouwen, en soms in ruïnes. De tweede soort bronnen bestaat uit manuscripten met tekeningen, met of zonder begeleidende tekst. Het bekendste voorbeeld is een boekrol die in de bibliotheek van het Topkapipaleis in Istanbul wordt bewaard en die daarom de Topkapirol (Engels: Topkapi scroll) wordt genoemd. Hij is gepubliceerd in een facsimile editie [12] en ook voor een klein gedeelte op het internet beschikbaar. De Topkapirol is 29,5 m lang en 33 cm breed en bestaat uit stukken papier die aan elkaar zijn gelijmd. Op de rol staan tekeningen van tweedimensionale patronen en ook van horizontale projecties van (driedimensionale) muqarnas. De rol is vermoedelijk in de zestiende eeuw in de stad Tabriz in Noordwest-Iran vervaardigd. Er zijn maar weinig andere boekrollen en werktekeningen zoals de Topkapirol bekend. Mogelijk bestaan er veel meer van zulke tekeningen die op zolders van moskeeën of in kelders van bibliotheken op ontdekking liggen te wachten.

In de Topkapirol staan alleen figuren, zonder instructies over hoe deze moeten worden getekend. Figuur 3 is afgeleid van een tekening van een tweedimensionaal patroon uit de Topkapirol. In het origineel bestaat de tekening uit zwarte en rode lijnen en oranje stippellijnen, zie het artikel [15] dat via het internet toegankelijk is. Figuur 3 is ontstaan door het overtrekken van een tekening in de Topkapirol, en de figuur laat daardoor goed zien hoe nauwkeurig deze tekening is. De rode lijnen in de tekening, die in Figuur 3 vet zijn weergegeven, vormen een grof patroon. Dit patroon wordt in een veel fijner patroon onderverdeeld door de zwarte lijnen in de tekening, die in de figuur met doorgetrokken dunne lijnen worden weergegeven. Verder staan er in de tekening oranje stippellijnen, die in de figuur ook met stippellijnen zijn weergegeven. Deze stippellijnen zouden hulplijnen geweest kunnen zijn om het patroon te kunnen tekenen. De tekening is aan de bovenkant afgesneden en de lezer wordt uitgenodigd om het symmetriecentrum iets boven het midden te localiseren. Door een rotatie van 180° om dat centrum kan de rest van de oorspronkelijke tekening worden gereconstrueerd, en daar-

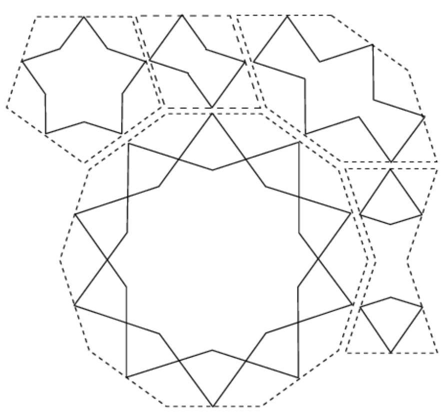


Illustratie: Steven Wepster

Figuur 3 Een patroon uit de Topkapirol [12, p. 300]

na kan het patroon worden voortgezet door herhaalde spiegeling van de tekening.

De stippellijnen in Figuur 3 vormen vijf verschillende figuren die in de moderne literatuur bekend staan als *girih*-tegels, van het Perzische woord *gīreh*, knoop. Deze tegels zijn apart getekend in Figuur 4. De zijden van deze vijf tegels zijn even lang, en de patronen waar het uiteindelijk om gaat zijn opgebouwd uit de doorgetrokken lijnen door de middelpunten van de zijden in Figuur 4. Door de vijf *girih*-tegels op de juiste manier aan elkaar te leggen vormen de doorgetrokken lijnen mooie patronen. Moderne onderzoekers nemen aan dat deze *girih*-tegels bij het ontwerpproces zijn gebruikt, en Figuur 3 zou het resultaat van zo'n ontwerp geweest kunnen zijn.



Illustratie: Steven Wepster

Figuur 4 De vijf *girih*-tegels uit Figuur 3

Het blijkt dat met deze *girih*-tegels aperiodieke betegelingen kunnen worden gelegd [5,15]. Deze ontdekking is de afgelopen twintig jaar diverse keren gedaan en heeft geleid tot nieuwe belangstelling voor islamitische geometrische kunst, die nu ook gebruikt kan worden om aperiodieke betegelingen uit te leggen [20]. Sommige moderne auteurs beweren dat de middeleeuwse ontwerpers, die vanaf de twaalfde eeuw met deze *girih*-tegels werkten, ook aperiodieke betegelingen van het hele vlak met deze vijf tegelvormen kenden. Dit zou worden geïllustreerd door betegelingen in de Darb-e Imam in Figuur 1 en op enkele andere plaatsen in de islamitische wereld. Deze opvatting wordt niet door de bronnen gesteund. De patronen op de Darb-e Imam beslaan samen een zo klein gedeelte van het vlak dat niet kan worden uitgemaakt of de ontwerper een aperiodiek patroon wilde maken. Nergens in de middeleeuwse islamitische teksten vinden we enig spoor van het begrip aperiodiciteit; ook niet van het begrip periodiciteit trouwens. Wel staat vast dat middeleeuwse Iraanse ontwerpers bekend geweest zijn met het volgende principe [5, p. 54–55]: In vele grote patronen die bestaan uit vijfhoeken en tienhoeken en andere figuren, kunnen de elementen op fraaie wijze met een soortgelijk patroon op kleinere schaal worden gevuld. Figuur 3 en 5 zijn hiervan voorbeelden. Om dit alles correct op schaal te tekenen zijn de *girih*-tegels nuttig. De monumenten van Isfahan laten een duizelingwekkende variatie zien van grotere patronen die in kleinere patronen zijn onderverdeeld.

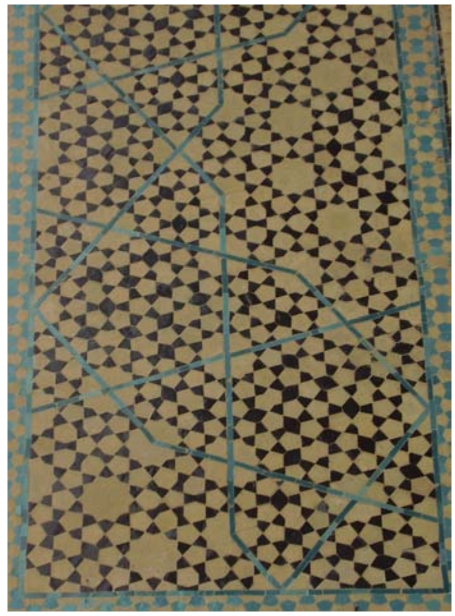
We keren terug naar de bronnen. Er is één voorbeeld bekend van een set werktekeningen met begeleidende teksten waarin staat hoe de tekening moet worden vervaardigd. Deze set is gevonden in een zestiende-eeuws Perzisch manuscript van veertig bladzijden, dat nu in Parijs wordt bewaard in de Bibliothèque Nationale. Het manuscript is nog niet gepubliceerd. Voor een Russische vertaling zie [3, pp. 315–340], voor een modern Perzische vertaling zie [10, pp. 73–93]. Voor verdere gegevens en voorbeelden uit het handschrift zie [7; 12,pp. 146–150; 13]. Figuur 6 is een weergave van een tekening uit het handschrift. De bijbehorende tekst is receptachtig en geeft geen verdere uitleg van de noodzakelijke voorkennis, zoals de constructie van een hoek van $\frac{3}{7} \cdot 90°$. De tekst in het handschrift is als volgt:

"Maak hoek BAG drie zevende van een rechte hoek. Deel lijn AG doormidden in punt D. Pas BE af gelijk aan AD. Markeer lijn EZ evenwijdig aan AG. Trek (een willekeurige) lijn TI evenwijdig aan BE, deel TE doormidden in punt H, en maak TI gelijk aan TH. Verleng EI tot hij lijn AB doorsnijdt in punt K. Markeer KL evenwijdig aan BE. Met middelpunt Z cirkelboog KMN zodat het stuk KM gelijk is aan MN. Op lijn AF neem punt S (hoe wordt niet gezegd) en dat is het middelpunt van een zevenhoek. Voltooi de constructie als God de Verhevene het wil.

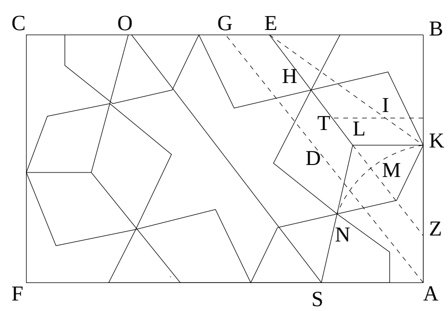
En anders construeer hoek ELN gelijk aan hoek ELK en met de lijn LN vind het middelpunt S.

En anders snijd EO af gelijk aan EL, zodat punt O het middelpunt van een zevenhoek is. En maak lijn OS evenwijdig aan GA en gelijk aan AG (in het handschrift staat AD). En dan is punt S het middelpunt van een tweede zevenhoek. En anders laat GO gelijk zijn aan AS. God weet het het beste."

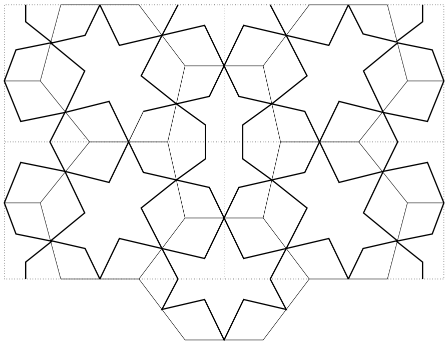
Dit voorbeeld is extra interessant omdat de tekening hoort bij een patroon dat echt op een gebouw voorkomt, namelijk in de Noordelijke koepel van de Vrijdagmoskee in Isfahan [9]. We kunnen daaraan zien hoe de tekening werd gebruikt. Het patroon in de



Figuur 5 Patroon in de Vrijdagmoskee in Isfahan



Figuur 6 Moderne weergave van de tekening uit het Perzische handschrift Parijs, B.N. Ancien Fonds 169, f. 192a. Onderbroken lijnen zijn ook onderbroken in het handschrift.



Figuur 7 Het patroon uit het Parijse handschrift aan elkaar gelegd

rechthoek werd als een soort 'fundamentaalgebied' beschouwd. Kopieën van het fundamentaalgebied en het spiegelbeeld daarvan werden naast elkaar gelegd en het resultaat was dan een patroon als in Figuur 7. De situatie is dus net zo als met Figuur 3 uit de Topkapirol. In het Perzische handschrift wordt nergens uitgelegd hoe met zo'n fundamentaalgebied moest worden omgegaan. Vermoedelijk hoorde bij de tekst in het handschrift een uitgebreide mondelinge uitleg.

De dunne lijnen in Figuur 7 vormen twee nieuwe zeshoekige *girih*-tegels die bij het ontwerp gebruikt zouden kunnen zijn. Als we $\alpha = \frac{180}{7}^\circ$ noteren dan zijn de hoeken in deze *girih*-tegels $4\alpha, 5\alpha, 5\alpha, 4\alpha, 5\alpha, 5\alpha$ en 4α, 4α, 6α, 4α, 4α, 6α. Het patroon heeft een leuke symmetrie doordat de eerste *girih*-tegel in twee schuine en een liggende positie voorkomt. Ook over deze symmetrie staat niets in het handschrift. In het mozaïek in de Vrijdagmoskee zijn de *girih*-tegels niet te zien, en het is duidelijk dat ze in het productieproces geen rol speelden (zie de kleurenfoto in [9]), dat wil zeggen dat het niet *girih*-tegels waren die in de praktijk werden gefabriceerd (uitgehakt of gebakken) en aan elkaar gemetseld om het patroon te maken. Ook bij de Darb-i Imam (Fi guur 1) lijkt uit de foto te volgen dat de vijf *girih*-tegels van Figuur 4 niet in het productieproces werden gebruikt. Deze tegels hoorden dus bij het ontwerpstadium. We kunnen in elk geval concluderen dat de middeleeuwse islamitische kunstenaars methodes gebruikten voor het ontwerpen van geometrische ornamenten. Het is niet uitgesloten dat enkele genieën alles op het gevoel tekenden, maar voor de gewone ontwerper was dit een brug te ver.

De wiskundige kennis van de ontwerpers

We vragen ons nu af hoe de geometrische ornamentiek zich verhoudt tot wat bekend is over middeleeuwse islamitische wiskunde en wiskundigen.

In die tijd werd weinig wiskunde gebruikt in de landmeetkunde en voor administratieve doeleinden. Wat kennis van het rekenen en een paar meetkundige vuistregels waren hiervoor voldoende. Er werd wel aan wiskunde van hoger niveau gedaan, namelijk algebra (kwadratische en kubische vergelijkingen), een beetje getallenleer, veel meetkunde in de stijl van de Grieken, en veel trigonometrie. Deze meetkunde en trigonometrie werd gebruikt door sterrenkundigen, die hun levensonderhoud meestal moesten verdienen als astroloog of als privéleraar. Er bestond zelfs een soort standaard leerplan meetkunde voor gebruik in de sterrenkunde, dat doorlopen werd onder leiding van een leraar. Men begon met Arabische vertalingen van Griekse wiskundige werken. Eerst de *Elementen* en de *Data* van Euclides, en dan *Over de Bol en de Cylinder* en de *Cirkelmeting* van Archimedes. Wanneer de student deze boeken had doorgewerkt, had hij (of in een enkel geval zij) in elk geval een goed idee van wat een meetkundig bewijs is. Daarna stonden een paar boeken over meetkunde op de bol op het programma, zoals de *Sphaerica* van Theodosius en de *Sphaerica* van Menelaus. Dit laatste boek ging over boldriehoeksmeetkunde en gebruikte de verouderde trigonometrische functie 'koorde'. Daarom konden in plaats hiervan ook modernere Arabische boeken worden gelezen die gebruik maakten van sinus en cosinus. Vervolgens kon men beginnen aan de eigenlijke sterrenkunde. In het ideale geval las de student nu de hele *Almagest* van Ptolemaeus. Dit dikke boek was zwaar verteerbaar en ook verouderd en het was te veel voor de gemiddelde student. Gelukkig waren er ook veel boeken over sterrenkunde van middeleeuwse (islamitische en andere) auteurs die in het Arabisch schreven. In elk geval leerde iedere aankomende sterrenkundige of astroloog hoe om te gaan met minstens één Arabisch sterrenkundig handboek met circa honderd bladzijden tabellen, en met een astrolabium. Met deze hulpmiddelen kon de sterrenkundige de posities van hemellichamen op elk moment berekenen. Wie astroloog wilde worden moest vervolgens nog een hele literatuur doorwerken over astrologische interpretaties.

Een beroep 'wiskundige' bestond niet in de middeleeuwse islamitische wereld. De meeste wiskundig geschoolden werkten als sterrenkundige, astroloog, of privé-leraar, en sommigen hielden zich in leven met het kopiëren en verkopen van handschriften.

We keren nu terug naar de geometrische kunst. De ornamenten zijn duidelijk van een hoger wiskundig gehalte dan wat nodig is voor landmeten en administratie. De vraag die nu rijst, is of de ontwerpers en makers van zulke ornamenten dezelfde wiskundigen waren die ook aan sterrenkunde deden, of dat het om een heel andere groep gaat. We krijgen enig inzicht in deze vraag dankzij de Iraanse meetkundige en sterrenkundige Abu'l-Wafa al-Buzjani (940–998). Deze man kwam uit de stad Buzjan (nu verlaten) nabij de tegenwoordige grens met Afghanistan, en hij werkte, zoals vele geleerden uit zijn tijd, in Irak. Hij schreef een speciaal boek *Over de meetkundige constructies die de handwerkslieden en bouwers nodig hebben*. (Van deze tekst is een Franse vertaling verschenen in [21], en een Duitse vertaling in [19]. Deze vertalingen zijn gebaseerd op onvolledige manuscripten, en ze bevatten niet het interessante deel over de contacten tussen wiskundigen en handwerkers. Dit gedeelte is gepubliceerd in het Arabisch met Engelse vertaling in [14].) Volgens Abu'l-Wafa bestonden er twee groepen: de wiskundig geschoolde meetkundigen die wel theoretische bewijzen konden geven maar weinig ervaring hadden in praktisch tekenen, en de makers van ornamenten die praktisch konden tekenen maar geen benul hadden van bewijzen, en die daardoor niet konden onderscheiden tussen exacte en benaderende constructies [14]. Abu'l-Wafa had geen hoge pet op van de meetkundekennis van deze laatste groep mensen en probeerde hen door middel van zijn eigen boekwerk op te voeden tot het gebruik van exacte wiskundige constructies van vijfhoeken en andere figuren. Hij beschreef ook een paar constructies met een passer met vaste opening. Hiermee vermeed hij onnauwkeurigheden die konden ontstaan door het steeds opnieuw instellen van een passer. Abu'l-Wafa gaf geen bewijzen in zijn boek omdat die toch niet aan zijn doelgroep besteed waren.

Dankzij Abu'l-Wafa begrijpen we waarom er in de meeste Arabische teksten over euclidische meetkunde niets over geometrische ornamenten wordt gezegd. Deze teksten zijn namelijk geschreven door theoretisch geschoolde wiskundigen, en niet door de makers van geometrische ornamenten. Er waren onder de wiskundigen echter uitzonderingen. In een klein tekstje over algebra construeert de wis- en sterrenkundige Omar Khayyām (1048–1131) een rechthoekige driehoek waarbij een van de rechthoekszijden plus de hoogtelijn gelijk is aan de basis [7, 13]. Dit probleem loopt algebraïsch uit op een derdegraads vergelijking en Khayyām gebruikt een hyperbool en een cirkel om de driehoek te construeren. Hetzelfde probleem wordt ook in het Perzische manuscript genoemd, waar wordt vermeld dat een andere wis- en sterrenkundige Ibn al-Haytham (965–circa 1040) het probleem ook met kegelsnedes had opgelost. Helaas is het patroon dat uit deze driehoek ontstaat niet erg mooi, en het is geen wonder dat het nooit aangetroffen is op een echt gebouw. Toch geven deze voorbeelden aan dat twee van de grootste islamitische wiskundigen zich met geometrische ornamentiek bezig hielden. Het is goed mogelijk dat Khayyām de ontwerper is van het patroon met de zevenhoeken van Figuur 7. Hij woonde in Isfahan toen de noordelijke koepel van de Vrijdagmoskee omstreeks 1080 gebouwd werd, en hij was bevriend met de opdrachtgever.

Het Perzische handschrift dat hierboven is genoemd (Figuur 6 en 7) is volgens de Turkse historicus Özdural [14] ook het werk van iemand die geschoold was in de Griekse wiskunde. Omdat in het handschrift geen onderscheid wordt gemaakt tussen exacte en benaderende constructies, denk ik dat de tekst in het handschrift grotendeels afkomstig is van makers van ornamenten die geen uitgebreide kennis hadden van de *Elementen* van Euclides. Het enige dat aan Euclides herinnert, is het feit dat punten in de figuren worden aangegeven met de Arabische equivalenten van de Griekse letters $A, B, \Gamma \ldots$. In het Perzische handschrift staan een paar verbazend slimme benaderingsconstructies, van een type dat in de 'normale' islamitische wiskunde in euclidische stijl niet voorkomt. Daarom denk ik dat het handschrift een tipje van de sluier oplicht over de praktische meetkundekennis van de islamitische ontwerpers. Deze kennis, en de bijbehorende tekeningen van patronen, kunnen van vader op zoon zijn doorgegeven in families van handwerkers, en misschien werden de constructiemethoden geheim gehouden uit concurrentieoverwegingen. Ook in de moderne tijd bestaan zulke handwerkers nog, al worden het er wel steeds minder. In het tegenwoordige Iran worden de ontwerpen meestal met de computer gemaakt.

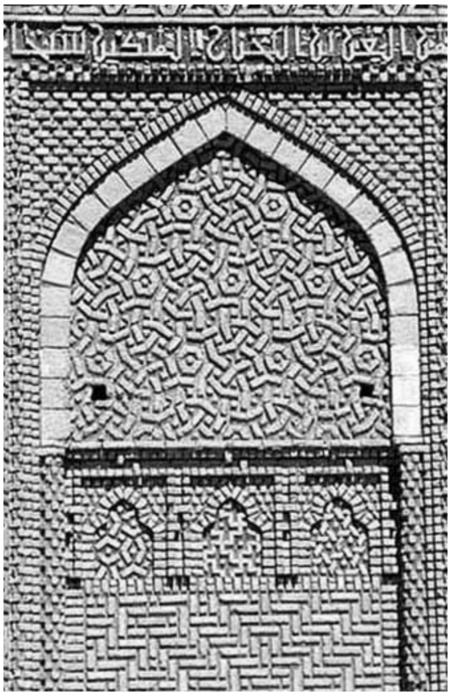
Dit alles maakt het beantwoorden van de vraag "welke wiskunde gebruikten de middeleeuwse ontwerpers?" er niet eenvoudiger op. De ontwerpers waren niet geschoold in de *Elementen* van Euclides. Zij hadden een ander soort wiskundekennis die grotendeels niet op schrift is vastgelegd. Zulke schriftloze tradities bestaan ook in andere culturen en worden soms 'ethnomathematics' genoemd. In elk geval krijgen we uit andere stukken van het Perzische handschrift het idee dat de auteur of auteurs goed konden werken met congruente figuren en het opknippen van figuren. Maar voor de rest is de vraag wat voor wiskundige begrippen de ontwerpers precies gebruikten, (nog) niet goed te beantwoorden wegens gebrek aan authentieke bronnen. Als er een antwoord is, ligt dat verborgen in bibliotheken in de islamitische wereld.

Men kan zich afvragen of de middeleeuwse islamitische kunstenaars beïnvloed kunnen zijn door de wiskunde van India. Dit is in principe best mogelijk omdat er op grote schaal kennis over wiskunde en sterrenkunde vanuit India in de islamitische cultuur is terechtgekomen. Omstreeks 775 werden zelfs delegaties Indiase wetenschappers aan het hof van de kalief in Bagdad uitgenodigd. Tussen 1970 en 1980 meenden moderne onderzoekers een verband te hebben gevonden tussen islamitische geometrische kunst en de oude Vedische wiskunde. Deze opvatting werd eind jaren 1970 breed geëtaleerd in een tentoonstelling *Islamathematica*, onder andere in Rotterdam in het Museum Boymans van Beuningen [16]. Het verband dat de onderzoekers hadden gelegd was helaas niet met authentieke Vedische wiskunde uit de periode rond 500 voor Christus, maar met het rekensysteem dat was 'herontdekt' uit de Veda's door Goeroe Sri Bharati Krsna Tirthaji (1884–1960). Goeroe Tirthaji was een oplichter en een echt verband tussen islamitische geometrische kunst en oude Indiase wiskunde is tot nu toe niet gevonden.

Is er een diepere betekenis?

De islamitische geometrische ornamentiek was voor een groot deel sacrale kunst. Het geometrische karakter van deze sacrale kunst had te maken met het verbod op het afbeelden van levende wezens in de Hadieth (overlevering) over het leven van de profeet Mohammad. Men hield zich lang niet overal in de middeleeuwse islamitische samenleving aan dit verbod, maar wel in de moskee en in andere religieuze gebouwen zoals graftomben.

De handwerkers die de geometrische ornamenten vervaardigden behoren of behoorden soms tot mystieke islamitische ordes. Zo rijst de vraag of deze kunst een spirituele betekenis had. We bespreken eerst de opvattingen van de twee bekendste auteurs die over dit thema hebben gepubliceerd. De veel geciteerde Shiïtische filosoof Seyyed Hossein Nasr zegt over de betekenis van de islamitische geometrische kunst: "This art makes manifest, in the physical order directly perceivable by the senses, the archetypal realities and acts therefore as a ladder for the journey of the soul from the visible and the audible to the Invisible which is also Silence transcending all sound" [11, p. 6]. De architectuurhistoricus Keith Critchlow werkt dit uit door een verband te leggen met magische vierkanten [4, pp. 42–56]. Een magisch vierkant van orde n is een vierkant waarin de getallen 1 tot en met n^2 opgesteld worden in n kolommen en rijen zodat de som van de getallen in elke kolom en rij en in de beide diagonalen gelijk is aan een vast getal $M = \frac{n}{2}(n^2+1)$. Critchlow presenteert een rij magische vierkanten van orde 3 tot en met 9 die in de middeleeuwse islamitische wereld en in middeleeuws Europa in verband werden gebracht met Saturnus, Jupiter, Mars, Zon, Venus, Mercurius en de Maan. Hij beschouwt elk vierkant als het archetype van het bijbehorende hemellichaam. De getallen in elk vierkant kunnen op allerlei manieren met elkaar vergeleken worden. Zo leidt hij uit elk magisch vierkant een aantal patronen af die volgens hem dan met deze hemellichamen te maken hebben. Over de rol van de bijbehorende archetypen zegt hij verder dat: "Islam's concentration on geometric patterns draws attention away from the representational world ... to one of pure forms, giving insight into the workings of the inner self and their reflection in the universe. Whereas the experienced world ... is of necessity in three dimensions, the paradisiac world, or world of motivating intelligences, exists two-dimensionally only, the principle being that as archetypes are released from the limitations of existentiality, so also is their confine-



Figuur 8 Een van de acht kanten van een van de torens in Kharraqan, met boven de patronen de woorden uit de Koran: "...de machtige, de geweldige, de trotse. Geprezen zij God, verheven ...."

ment within dimensions . . .” [4, p. 8]. Uiteraard staat het ons vrij om de standaardopvattingen van Nasr en Critchlow naar het rijk der fabelen te verwijzen. Magische vierkanten werden uitgebreid onderzocht door de wiskundigen in de middeleeuwse islamitische traditie. Een grote hoeveelheid teksten over dit thema is gepubliceerd door Jacques Sesiano [17]. Een verband tussen magische vierkanten en geometrische ornamentiek wordt door de middeleeuwse auteurs nergens gelegd, ook niet in teksten over magie en talismans waarin magische vierkanten voorkomen.

Tot dusver zijn er heel weinig echte aanknopingspunten gevonden over de betekenis van de islamitische geometrische ornamentiek. We kunnen hier wel het werk van Carol Bier vermelden. Deze Amerikaanse onderzoekster is gespecialiseerd in de geschiedenis van textiel en zij heeft de islamitische geometrische ornamentiek in verband gebracht met patronen die (als het ware automatisch) ontstaan bij het knopen van tapijten en het weven van stoffen. Haar idee over de betekenis is dat de geometrische ornamenten vaak te vinden zijn op religieuze bouwwerken waarop ook Koranverzen staan afgebeeld. Als de ornamenten een betekenis hebben, zouden de Koranverzen hiervoor een sleutel kunnen zijn. Zij vindt hiervan een voorbeeld in twee elfde-eeuwse graftorens in Kharraqan, halverwege tussen Qazwin en Hamadan in Noordwest-Iran [1]. De torens in Kharraqan zijn in 2002 beschadigd door een aardbeving. Voor 2002 waren het achthoekige gebouwen van 13 meter hoog die bedekt waren met een enorme hoeveelheid decoratieve patronen in baksteen. Zie Figuur 8. Rond elk van beide gebouwen liep boven de patronen een band waarin de volgende Koranverzen in steen waren afgebeeld (uit soera 59, verzen 21 tot 24):

“Als Wij [God] deze Koran tot een berg hadden neergezonden, dan had jij [de profeet Mohammad] hem zich zien verootmoedigen en uit vrees voor God zien barsten. Dit zijn de vergelijkingen (voorbeelden, patronen) die Wij voor de mensen maken; misschien zullen zij nadenken. Hij is God; er is geen god dan Hij, de kenner van het verborgene en het waarneembare, de erbarmer, de barmhartige. Hij is God; er is geen god dan Hij, de koning, de allerheiligste, de instandhouder, de veiligheidgever, de bewaker, de machtige, de geweldige, de trotse. Geprezen zij God, verheven als Hij is boven wat zij aan Hem als metgezellen toevoegen. Hij is God, de schepper, de maker, de vormgever. Hem komen de mooiste namen toe. Hem prijst wat er in de hemelen is en wat er op de aarde is en Hij is de machtige, de wijze.”

Bier stelt dat de bouwers van deze torens het Arabische woord vergelijkingen (Arabisch: *amthāl*) letterlijk geïnterpreteerd kunnen hebben als patronen. De ‘wereld van patronen’ was in de Perzische mystiek een wereld tussen tussen de zintuiglijk waarneembare wereld en het Goddelijke. Onmiddellijk na de patronen noemt de Koran de ‘mooiste namen’ van God, ook een belangrijk thema in de islamitische mystiek. Dit alles zou kunnen betekenen dat de bedoeling van decoratieve patronen was om de aandacht van de toeschouwer te verleggen van de zichtbare driedimensionale wereld naar een hogere wereld. Ditzelfde is ook het doel van sommige rituelen in islamitische mystieke ordes. Natuurlijk zou meer bewijsmateriaal nodig zijn om de patronen in verband te brengen met Koranverzen, maar in ieder geval doet Bier een poging om een verband te leggen tussen de betekenis van de islamitische ornamentiek en authentiek bronnenmateriaal.

Aan elke lezer of lezeres die dit onderwerp verder wil exploreren zou ik aanraden om een reis naar Isfahan te maken, en de monumenten in alle rust te bekijken. Iedereen die het interieur van de Lotfollah moskee in Isfahan op zich laat inwerken, zal begrijpen waarom men islamitische geometrische ornamentiek in verband heeft gebracht met religieuze en spirituele ervaring.

Dankwoord
De auteur dankt Steven Wepster en Viktor Blåsjö voor het geven van commentaar op eerdere versies van dit artikel.

Referenties

1 Carol Bier, Art and Mithāl: Reading Geometry as Visual Commentary, *Iranian Studies* 41 (2008), 491–509.

2 F.H. Bool et al., *Leven en Werk van M.C. Escher*, Amsterdam, Meulenhoff, 1981

3 M.S. Bulatov. *Geometricheskaya Garmonizatsiya v arkhitekture Srednei Azii IX - XV vv.* (Geometrische harmonisering in de architectuur van Centraal-Azië), Moskou: Nauka 1988. [Russisch.]

4 Keith Critchlow, *Islamic Patterns: An Analytical and Cosmological Approach*. Foreword by Seyyed Hossein Nasr. London: Thames and Hudson, 1976, vele herdrukken.

5 Peter R. Cromwell, The Search for Quasi-Periodicity in Islamic 5-fold Ornament. *Mathematical Intelligencer* 31 no. 1 (2009), 36–56.

6 www.jphogendijk.nl/publ.html

7 J.P. Hogendijk, Een workshop over Iraanse mozaïeken. *Nieuwe Wiskrant* 16 (1996) no. 2, 38–42, internet: zie [6].

8 J.P. Hogendijk, Wiskunde en islamitische kunst: werk in uitvoering. *Euclides* 79 (2004), 135–137, internet: zie [6].

9 J.P. Hogendijk, Ancient and modern secrets of Isfahan. *Nieuw Archief voor Wiskunde* fifth series, 9 (juni 2008), 121, internet: zie [6].

10 (Abū al-Wafā’ al-Būzjānī) *Applied geometry, Abolvefa Mohammad ibn Mohammad Albuzjani, rewritten into modern Persian with appendices by Seyyed Alireza Jazbi*. Tehran: Soroush Press, 1991. [Perzisch.]

11 Seyyed Hussein Nasr, *Islamic Art and Spirituality*. New York: State University Press, 1987.

12 Gülru Necipoğlu, *The Topkapı Scroll: Geometry and Ornament in Islamic Architecture*. Santa Monica, Ca., Getty Center for the History of Art and the Humanities, 1995.

13 Alpay Özdural, On Interlocking Similar or Corresponding Figures and Ornamental Patterns of Cubic Equations. *Muqarnas* 13 (1996), 191–211.

14 Alpay Özdural, Mathematics and Arts: Connections between Theory and Practice in the Medieval Islamic World. *Historia Mathematica* 27 (2000), 171–201.

15 Sebastian R. Prange, The tiles of infinity. *Saudi Aramco World* 60, September/October 2009, 24-31, internet: www.saudiaramcoworld.com/issue/200905/the.tiles.of.infinity.htm

16 Fred Ros et al., *Islamathematica*. Rotterdam: Museum voor land- en volkenkunde, 1973.

17 Jacques Sesiano, *Les carrés magiques dans les pays Islamiques.* Lausanne 2004.

18 F. Sezgin, ed. *Abu’l-Wafâ al-Būzjānī. Texts and Studies, Collected and Reprinted*. Vol. 2. Frankfurt, Institut für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften, 1998. Series: *Islamic Mathematics and Astronomy,* vol. 61.

19 H. Suter, Das Buch der geometrischen Konstruktionen des Abu’l-Wefā’. *Beiträge zur Geschichte der Mathematik bei den Griechen und Arabern,* Hsg, J. Frank. *Abhandlungen zur Geschichte der Naturwissenschaften und der Medizin Heft IV*. Erlangen 1922. Herdruk in Heinrich Suter, *Beiträge zur Geschichte der Mathematik und Astronomie im Islam,* ed. F. Sezgin. Frankfurt, Institut für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften, 1986, vol. 2, 635–630 Ook herdrukt in [18, 280–295]

20 R. Tennant, Medieval Islamic Architecture, Quasicrystals and Penrose and Girih Tiles: Questions from the Classroom. *Symmetry, Culture and Science: Issue on Symmetry and Islamic Art*, 2008, pp. 113–125, internet: http://home.earthlink.net/~mayathelma, onderaan de pagina.

21 F. Woepcke, Recherches sur l’Histoire des Mathématiques chez les Orientaux. Duexième Article: Analyse et Extrait d’un recueuil de constructions géométriques par Aboûl Wafâ. *Journal Asiatique* 5 (1855), 218–255, 309–359. Herdruk in: Franz Woepcke, *Études sur les mathématiques arabo-islamiques*, ed. F. Sezgin. Frankfurt, Institut für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften, 1986, vol. 1, 483–572. Ook herdrukt in [18, 84–174]. Digitale versie op http://books.google.com/books?id=Z4gvAAAAYAAJ