

Jan van de Craats

Korteweg-De Vries Instituut voor Wiskunde

Universiteit van Amsterdam

Postbus 94248

1090 GE Amsterdam

J.vandeCraats@uva.nl

Recreatieve wiskunde

Symmetrie op de bol en in het vlak

In het dagelijkse leven komen we allerlei symmetrische voorwerpen tegen. Soms heeft zo'n symmetrisch voorwerp een speciaal patroon, denk bijvoorbeeld aan een voetbal. In dit artikel gaat Jan van de Craats dieper in op die patronen, waarbij hij een onderscheid maakt tussen bolpatronen, rozetpatronen, strookpatronen en behangpatronen. Hij gebruikt hierbij een nieuwe notatie om de verschillende symmetriegroepen te beschrijven.

In dit artikel beschrijf ik de discrete symmetriegroepen van bolpatronen en patronen in het vlak. In mijn behandeling, die steunt op ideeën van Coxeter [2] en Fejes Tóth [3], gebruik ik alleen eenvoudige resultaten uit de euclidische meetkunde en de groepentheorie. Ik presenteer daarbij ook een aangepaste versie van de 'signature notation' van John H. Conway. Als bonus verkrijg ik Conways 'magic theorems' voor bolpatronen en vlakke periodieke patronen.

Bolpatronen

Veel alledaagse voorwerpen zijn symmetrisch, vaak op meerdere manieren. Biljartballen, ronde schalen, schotels en bekens (zonder oor) hebben zelfs oneindig veel spiegelingen en rotaties als symmetrieën, althans als ze glad en effen gekleurd zijn. Andere voorwerpen hebben maar eindig veel symmetrieën, zoals een rechthoekige tafel, een stoel, een kast of, in meer wiskundige terminolo-

gie, een kubus, een prisma of een piramide. Of ballen met een speciaal patroon zoals een voetbal, een volleybal, een basketbal of een tennisbal.

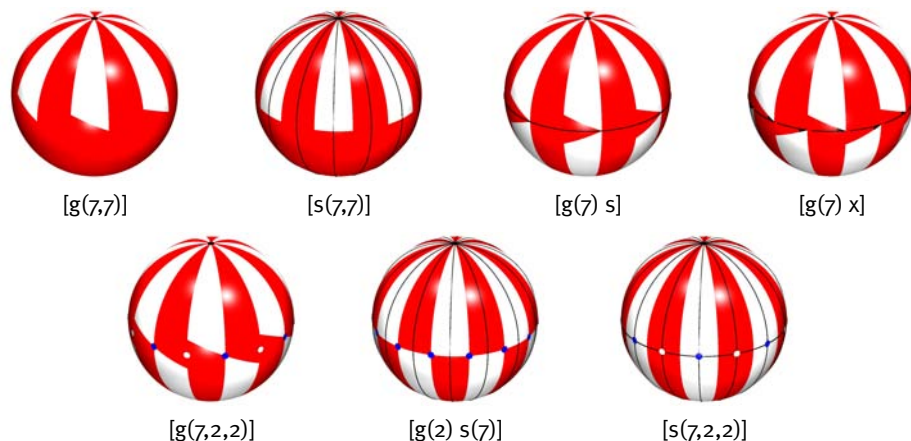
De symmetrieën van een voorwerp kunnen in wiskundige termen worden opgevat als *isometrieën* van de ruimte, dat wil zeggen transformaties die afstanden behouden. Na zo'n transformatie ziet het voorwerp er precies hetzelfde uit als ervoor. De symmetrieën vormen een groep, de *symmetriegroep* van het voorwerp. Het is interessant om alle mogelijke eindige symmetriegroepen van voorwerpen in de ruimte te beschrijven. Dat is in het verleden al door veel wiskundigen gedaan, op allerlei verschillende manieren. Het blijkt dat er precies veertien verschillende typen van eindige symmetriegroepen zijn (zie bijvoorbeeld [2, p.270] of [3, p.59]).

In de literatuur worden verschillende namen voor deze groepen gebruikt, maar een van de helderste is de 'signature notation',

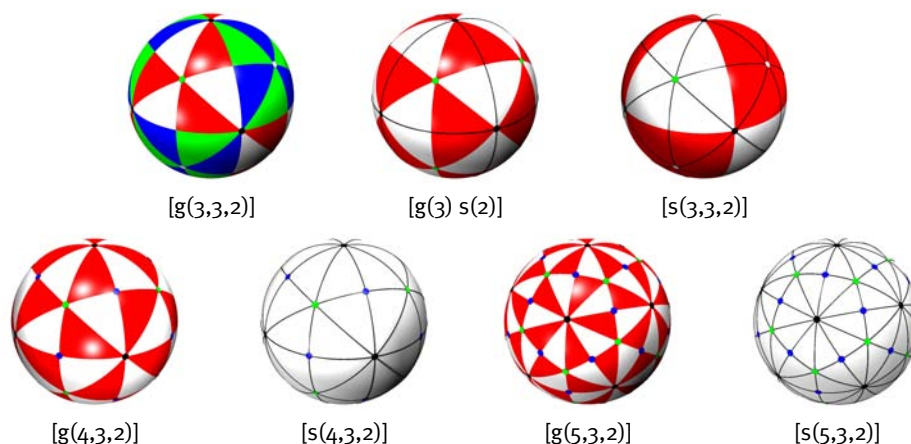
die ruim twintig jaar geleden bedacht is door John H. Conway. Ze wordt door Conway en zijn mede-auteurs Heidi Burgiel en Chaim Goodman-Strauss gebruikt in hun inspirerende en schitterend geïllustreerde boek *The Symmetries of Things* uit 2008 [1]. Deel I van dat boek gaat over de symmetrieën van bolpatronen en patronen in het vlak. Conways handtekeningnotatie, ook wel 'orbifold signature notation' genoemd, heeft het voordeel dat je er direct alle symmetrie-eigenschappen van een patroon uit kunt aflezen. Conway ontwikkelde die notatie met behulp van ideeën van William Thurston. In dit artikel gebruik ik deze notatie in een licht aangepaste vorm.

Symmetrische voorwerpen en bolpatronen

Elke eindige groep \mathcal{G} van isometrieën heeft minstens één vast punt, een punt dat bij alle isometrieën van \mathcal{G} op zijn plaats blijft. Neem om dit te bewijzen een willekeurig punt P samen met alle beelden van P onder de isometrieën van \mathcal{G} . Dat is een eindige puntverzameling, de *baan* (Engels: *orbit*) van P . Elke isometrie uit \mathcal{G} permuteert de punten van die baan, maar de baan als geheel blijft hetzelfde. Het *zwaartepunt* O ervan blijft dus bij elke isometrie van \mathcal{G} op zijn plaats.



Figuur 1 Parametrische patronen



Figuur 2 Platonische patronen

Maar omdat \mathcal{G} uit isometrieën bestaat, dat wil zeggen uit transformaties die afstanden behouden, gaat het oppervlak van elke bol met middelpunt O door alle isometrieën van \mathcal{G} ook in zichzelf over. Het beschrijven van alle eindige isometriegroepen in de ruimte is dus hetzelfde als het beschrijven van alle eindige groepen van isometrieën op het oppervlak van een bol. Slordig gezegd kun je elk symmetrisch voorwerp identificeren met het symmetrische bolpatroon dat ontstaat als je het vanuit zo'n vast punt O op het oppervlak van een omvattende bol met middelpunt O projecteert. Het classificeren van symmetrische patronen op het boloppervlak (dat tweedimensionaal is) lijkt eenvoudiger te zijn dan het classificeren van driedimensionale voorwerpen in de ruimte. Bovendien verbindt deze benadering de studie van bolpatronen met

de studie van symmetrische patronen in het vlak.

Voorbeelden van bolpatronen

In deze paragraaf geef ik voorbeelden van bolpatronen, voor elk type één, elk voorzien van zijn handtekening. Nu is die handtekening alleen nog maar een naam, maar later zal ik uitleggen hoe die in elkaar zit en hoe je zelf gemakkelijk de handtekening van een symmetrisch bolpatroon kunt vinden.

In elk voorbeeldpatroon zijn de eventuele vlakspiegelingen aangegeven door de grote cirkels (zwart getekend) waarin het spiegelvlak de bol snijdt. Rotaties zijn aangegeven door stippen in verschillende kleuren die de punten aangeven waar de rotatieas het boloppervlak snijdt. Later geef ik meer uitleg, maar nu al merk ik op dat de kleuringen essentieel

zijn: symmetrieën van het patroon moeten de kleuren onveranderd laten.

De zeven patronen in Figuur 1 heten *parametrisch* omdat ze afhangen van een parameter, in dit geval een geheel getal $N \geq 1$. Elke keuze van N geeft een ander patroon. In de voorbeelden heb ik steeds $N = 7$ genomen, maar het is duidelijk hoe zo'n patroon er bij een andere keuze van N uitziet. De zeven patronen in Figuur 2 worden *platonisch* genoemd omdat ze horen bij bepaalde symmetriegroepen van de *platonische lichamen*: de tetraëder (regelmatig viervlak), de kubus, de octaëder (regelmatig achthvlak), de dodecaëder (regelmatig twaalfvlak) en de icoosaëder (regelmatig twintigvlak), zie Figuur 3.

Eindige groepen van isometrieën op de bol

Elke isometrie op de bol is óf een *rotatie* rond een as door het middelpunt, óf een *spiegeling* in een vlak door het middelpunt, óf een *draaispiegeling*, dat wil zeggen een vlakspiegeling gevolgd door een rotatie om een as die loodrecht op het spiegelvlak staat (is de draaiingshoek nul, dan is de draaispiegeling dus een vlakspiegeling.) Rotaties zijn *directe* isometrieën, vlakspiegelingen en draaispiegelingen zijn *indirecte* isometrieën. Indirecte isometrieën draaien de oriëntatie om, directe isometrieën laten de oriëntatie intact.

Bij een vlakspiegeling snijdt het spiegelvlak de bol in een grote cirkel. Het is daarbij handig om te spreken van een spiegeling in die cirkel in plaats van een spiegeling in dat vlak. Ik noem die cirkel dan de *spiegelcirkel*.

Stel dat \mathcal{G} een eindige groep van isometrieën op de bol is van orde n , dat wil zeggen dat \mathcal{G} uit n isometrieën bestaat, inclusief de identiteit. Omdat het product van twee rotaties weer een rotatie is en het product van twee vlak- of draaispiegelingen ook, bestaat \mathcal{G} óf uitsluitend uit rotaties (inclusief de identiteit) óf de rotaties in \mathcal{G} vormen een ondergroep \mathcal{H} van orde $n/2$.

De as van een niet-triviale rotatie snijdt het boloppervlak in twee diametrale punten, de *polen* van die rotatie. (Een niet-triviale rotatie is een rotatie waarbij de rotatiehoek niet 0 is.) De rotaties in \mathcal{G} met een gemeenschappelijke as vormen een cyclische ondergroep van \mathcal{G} . Als p de orde is van die ondergroep, heten de twee polen p -voudige rotatiecentra of, kortweg, p -polen. De kleinste positieve rotatiehoek van een rotatie in die ondergroep is $2\pi/p$ radialen.

Twee polen heten *equivalent* in \mathcal{G} als er een isometrie in \mathcal{G} is die de een in de ander transformeert. In de voorbeelden in Figuur 1 en 2 hebben equivalente polen dezelf-



Figuur 3 De tetraëder, de kubus, de octaëder, de dodecaëder en de icoosaëder

de kleur. Merk op dat antipodale polen altijd dezelfde orde hebben, maar niet equivalent hoeven te zijn.

Chirale patronen

Een bolpatroon, of een voorwerp in de driedimensionale ruimte, heet *chiraal* als de enige symmetrieën ervan directe isometrieën zijn. In dat geval verschilt het patroon van zijn spiegelbeeld net zoals een linkerhand van een rechterhand verschilt (het Griekse woord ‘cheir’ betekent hand). Als de symmetriegroep minstens één indirecte isometrie bevat, is het spiegelbeeld niet van het origineel te onderscheiden. Het patroon heet dan *achiraal*. Met een spiegel kun je de chiraliteit van een patroon gemakkelijk vaststellen.

In deze paragraaf behandel ik de chirale bolpatronen. De symmetriegroep \mathcal{G} van zo'n patroon bestaat dan uitsluitend uit rotaties, inclusief de identiteit. De volgende afleiding heb ik ontleend aan [2, pp. 274–275].

Laat n de orde van \mathcal{G} zijn en laat P een p -voudige pool zijn op de bol. Dan is het aantal polen dat equivalent is met P (inclusief P zelf) gelijk aan n/p . Om dit te bewijzen neem ik een punt Q op de bol dat dichtbij P ligt. De rotaties met centrum P transformeren Q in een kleine regelmatige p -hoek op de bol met P als middelpunt. De andere isometrieën in \mathcal{G} transformeren deze p -hoek in p -hoeken rond de polen die equivalent zijn met P . In totaal vormen de hoekpunten van deze p -hoeken een verzameling van precies n punten op de bol, verdeeld in congruente regelmatige p -hoeken. Dat zijn er dus n/p , en bijgevolg zijn er ook net zo veel equivalente p -polen.

Ik zal nu de $n - 1$ niet-triviale rotaties in \mathcal{G} op een speciale manier tellen door ze samen te nemen in klassen van equivalente polen. Bij elke p -pool zijn er $p - 1$ niet-triviale rotaties dus bij een klasse van n/p equivalente p -polen zijn er $(p - 1)n/p$ niet-triviale rotaties. Dit geeft in totaal

$$\sum (p - 1)n/p$$

niet-triviale rotaties, waarbij gesommeerd wordt over alle klassen van equivalente polen, elk met zijn eigen waarde voor p . Maar bij antipodale polen horen dezelfde rotaties, dus elke rotatie wordt op deze manier tweemaal geteld. Daarom geldt de volgende vergelijking:

$$2(n - 1) = n \sum \frac{p - 1}{p},$$

die ook als volgt kan worden geschreven:

$$2 - \frac{2}{n} = \sum \left(1 - \frac{1}{p} \right). \tag{4}$$

Als $n = 1$, dan is de groep \mathcal{G} triviaal: ze bestaat alleen maar uit de identiteit. Er zijn dan geen polen en de som is leeg. Als $n \geq 2$, dan geldt

$$1 \leq 2 - \frac{2}{n} < 2.$$

Uit $p \geq 2$ volgt dat $\frac{1}{2} \leq 1 - 1/p < 1$, dus er kunnen alleen maar twee of drie equivalentieklassen van polen zijn.

Als het er twee zijn, geldt

$$2 - \frac{2}{n} = 1 - \frac{1}{p_1} + 1 - \frac{1}{p_2},$$

dat wil zeggen

$$\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} = 2.$$

Maar de beide termen links zijn positieve gehele getallen, dus beide moeten 1 zijn, zodat

$$p_1 = p_2 = n.$$

Elk van de beide equivalentieklassen bestaat dan uit slechts één n -voudige pool en \mathcal{G} is de cyclische groep met een n -pool aan elk uiteinde van zijn rotatieas. De handtekening van deze groep is $[g(n, n)]$. Zie Figuur 1 voor een voorbeeld met $n = 7$. Verderop wordt deze notatie tot in detail uitgelegd, maar nu al zeg ik er het volgende over. Om het lezen te vergemakkelijken zet ik handtekeningen altijd tussen rechte haken. De letter ‘g’ komt van de term ‘gyration point’ die Conway gebruikt om rotatiecentra aan te geven die *niet* op een spiegelcirkel liggen. (Het Griekse woord ‘gyros’ betekent rond of ronde, denk aan ‘gyroscoop’.)

Als er drie equivalentieklassen van polen zijn, geldt

$$2 - \frac{2}{n} = 1 - \frac{1}{p_1} + 1 - \frac{1}{p_2} + 1 - \frac{1}{p_3},$$

zodat

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1 + \frac{2}{n} > 1.$$

Daaruit volgt dat niet alle p_i groter dan of gelijk aan 3 kunnen zijn, en dus is er minstens

p_1	p_2	p_3	n	handtekening
p	p	–	p	$[g(p, p)]$
p	2	2	$2p$	$[g(p, 2, 2)]$
3	3	2	12	$[g(3, 3, 2)]$
4	3	2	24	$[g(4, 3, 2)]$
5	3	2	60	$[g(5, 3, 2)]$

Tabel 1 De mogelijkheden voor eindige rotatiegroepen op de bol

één, zeg p_3 , gelijk aan 2, dus

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} > \frac{1}{2}.$$

Dit kan worden geschreven als $2p_1 + 2p_2 > p_1 p_2$, of ook als

$$(p_1 - 2)(p_2 - 2) < 4.$$

Stel, zonder beperking van de algemeenheid, dat $p_1 \geq p_2$, dan zijn de oplossingen $(p_1, p_2) = (p, 2)$ voor willekeurige $p \geq 2$, $(p_1, p_2) = (3, 3)$, $(p_1, p_2) = (4, 3)$ en $(p_1, p_2) = (5, 3)$.

In Tabel 1 vatten we samen welke mogelijkheden we voor eindige rotatiegroepen op de bol kunnen vinden. Elk van deze mogelijkheden kan gerealiseerd worden als symmetriegroep van een chiraal bolpatroon (zie de voorbeelden in Figuur 1 en 2), waarmee bewezen is dat er precies vijf typen chirale symmetriepatronen op de bol zijn: twee parametrische typen, met handtekening $[g(p, p)]$ en $[g(p, 2, 2)]$ voor willekeurige $p \geq 2$, en drie platonsche patronen, met handtekening $[g(3, 3, 2)]$, $[g(4, 3, 2)]$ en $[g(5, 3, 2)]$. De laatste drie worden platonisch genoemd omdat hun symmetriegroepen de rotatiegroepen zijn van de platonsche lichamen: de tetraëder ($[g(3, 3, 2)]$), de kubus en de octaëder ($[g(4, 3, 2)]$) en de dodecaëder en de icosaeider ($[g(5, 3, 2)]$).

Achirale patronen

Ik neem nu aan dat het bolpatroon achiraal is, dat wil zeggen dat de symmetriegroep \mathcal{G} minstens één vlakspiegeling of draaispiegeling bevat. Stel dat $n > 1$ de orde van de \mathcal{G} is. De rotaties in \mathcal{G} vormen dan een ondergroep \mathcal{H} van orde $n/2$.

Ik bekijk weer de niet-triviale rotaties in \mathcal{G} . Dat zijn er nu $n/2 - 1$. Er kunnen dan op de bol twee soorten rotatiecentra voorkomen: ze kunnen al dan niet op een spiegelcirkel liggen. Als een q -voudig rotatiecentrum Q op een spiegelcirkel ligt, gaan er in totaal q spiegelcirkels door Q die elkaar daar onder gelijke hoeken van π/q snijden.

Bij een willekeurig punt T dichtbij Q maar niet op een van die spiegelcirkels, voeren alle rotaties om Q en spiegelingen in cirkels door Q het punt T over in de hoekpunten van een $2q$ -hoek. De andere isometrieën van \mathcal{G} voeren die $2q$ -hoek over in congruente $2q$ -hoeken rond de met Q equivalente rotatiecentra. In totaal hebben die $2q$ -hoeken precies n hoekpunten, en dus zijn er precies $n/(2q)$ van die veelhoeken, en net zoveel rotatiecentra die met Q equivalent zijn. Bij elke q -pool zijn er $q - 1$ niet-triviale rotaties, dus in totaal zijn er in de klasse van met Q equivalente polen $(q - 1)n/(2q)$ niet-triviale rotaties.

Net als in de vorige paragraaf tellen we voor elke p -pool P die niet op een spiegelcirkel ligt, in de klasse van met P equivalente polen in totaal $(p - 1)n/p$ niet-triviale rotaties.

Wanneer we op deze manier alle niet-triviale rotaties bij elkaar optellen, tellen we elke rotatie twee maal aangezien bij antipodale polen dezelfde rotaties horen. We krijgen nu dus de volgende vergelijking:

$$2\left(\frac{n}{2} - 1\right) = n \sum \frac{q-1}{2q} + n \sum \frac{p-1}{p},$$

waarin de eerste sommatie gaat over alle equivalentieklassen van polen die op spiegelcirkels liggen, en de tweede over alle equivalentieklassen van polen die niet op spiegelcirkels liggen. Na delen door n ontstaat hieruit de vergelijking

$$1 - \frac{2}{n} = \sum \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2q}\right) + \sum \left(1 - \frac{1}{p}\right). \quad (2)$$

Als $n = 2$ dan is het linkerlid 0 en dus zijn beide sommen rechts dan ook 0. Er zijn dan geen niet-triviale rotaties. De groep \mathcal{G} bestaat dan uit de identiteit en hetzij één enkele vlakspiegeling, hetzij een draaispiegeling met een rotatiehoek van π . Die laatste is de *centrale inversie*, de puntspiegeling in het centrum van de bol waarbij elk punt overgaat in zijn antipode, het punt dat er diametraal tegenover ligt.

Het eerste geval, waarbij \mathcal{G} dus naast de identiteit alleen maar één spiegeling bevat, krijgt als handtekening $[s]$, terwijl het tweede geval, waarin \mathcal{G} de centrale inversie bevat, als handtekening $[x]$ krijgt. Conway gebruikt hiervoor respectievelijk een ster (*) en een maaltteken (x), maar ik geef de voorkeur aan de letters 's' en 'x'. Zie ook mijn opmerking over notaties aan het einde.

q_1	q_2	q_3	n	handtekening
q	q	-	$2q$	$[s(q,q)]$
q	2	2	$4q$	$[s(q,2,2)]$
3	3	2	24	$[s(3,3,2)]$
4	3	2	48	$[s(4,3,2)]$
5	3	2	120	$[s(5,3,2)]$

Tabel 2 De vijf typen spiegelingsgroepen

Stel nu dat $n > 2$. Dan is

$$\frac{1}{3} \leq 1 - \frac{2}{n} < 1.$$

Voor $p > 1$ geldt $1 - 1/p \geq \frac{1}{2}$ en daarom bevat de tweede som hoogstens één term. Ik onderscheid nu twee gevallen.

Geval 1: alle rotatiecentra liggen op spiegelcirkels. Als alle rotatiecentra op spiegelcirkels liggen, heet \mathcal{G} een *spiegelingsgroep*. De groep \mathcal{G} wordt dan voortgebracht door cirkelspiegelingen. Als Q een q -voudig rotatiecentrum is, gaan er q spiegelcirkels door Q . Twee aangrenzende cirkels snijden elkaar in Q onder een hoek van π/q .

Vergelijking (2) luidt nu

$$1 - \frac{2}{n} = \sum \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2q}\right).$$

Maar als we $n' = n/2$ stellen (bedenk dat n even is!) kan dit geschreven worden als

$$2 - \frac{2}{n'} = \sum \left(1 - \frac{1}{q}\right),$$

en dat is precies dezelfde vergelijking als (1), de vergelijking die alle mogelijke eindige rotatiegroepen beschrijft. Hier beschrijft die vergelijking alle mogelijkheden voor de ondergroep \mathcal{H} van orde $n' = n/2$ van alle rotaties in \mathcal{G} . In de vorige paragraaf hebben we gezien dat er precies vijf typen rotatiegroepen zijn, zie Tabel 1. De voorbeelden in Figuur 1 en 2 laten zien dat het in elk van deze gevallen mogelijk is om de rotatiecentra door spiegelcirkels te verbinden op zo'n manier dat er door elke q -pool precies q spiegelcirkels gaan. De aldus uitgebreide rotatiegroepen zijn de vijf typen spiegelingsgroepen. Tabel 2 geeft een overzicht van hun eigenschappen en hun handtekening.

Geval 2: niet alle rotatiecentra liggen op spiegelcirkels. Stel dat de tweede som in vergelijking (2) niet leeg is, met andere woorden, dat er minstens één p -pool is (met $p > 1$) die niet

p	q	n	handtekening
p	-	$2p$	$[g(p) x]$
p	1	$2p$	$[g(p) s]$
2	q	$4q$	$[g(2) s(q)]$
3	2	24	$[g(3) s(2)]$

Tabel 3 De gemengde groepen

op een spiegelcirkel ligt. De symmetriegroep heet dan een *gemengde groep*.

Zoals we gezien hebben bevat de tweede som in vergelijking (2) dan slechts één term, dus alle p -polen zijn equivalent en vergelijking (2) kan geschreven worden als

$$\frac{1}{p} - \frac{2}{n} = \sum \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2q}\right).$$

Als $n = 2p$, dan zijn het linkerlid en het rechterlid beide nul. Omdat n/p het aantal equivalente p -polen geeft, zijn er $n/p = 2$ van die polen. Ze zijn dus antipodaal en ze horen bij de $p = n/2$ rotaties in \mathcal{G} (inclusief de identiteit).

Als er geen spiegelcirkels zijn, dan moet \mathcal{G} ook nog p draaispiegelingen bevatten. Het kwadraat van een draaispiegeling is een rotatie, dus elk van die draaispiegelingen moet de beide p -polen verwisselen. Daarmee is de hele groep beschreven. De handtekening is $[g(p) x]$.

Als er wel een spiegelcirkel is, moet de spiegeling in die cirkel de beide p -polen verwisselen want die polen liggen niet op een spiegelcirkel. De groep \mathcal{G} bestaat dus uit p rotaties (waaronder de identiteit), een spiegeling en $p - 1$ draaispiegelingen. Deze groep heeft handtekening $[g(p) s]$.

Stel nu dat $n > 2p$. Dan is er minstens één q -pool op een spiegelcirkel met $q \geq 2$. Dan geldt $\frac{1}{2} - \frac{1}{2q} \geq \frac{1}{4}$ en omdat $p \geq 2$, volgt hieruit dat

$$\sum \frac{1}{4} \leq \sum \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2q}\right) = \frac{1}{p} - \frac{2}{n} < \frac{1}{p} \leq \frac{1}{2}.$$

Dit betekent dat er maar één klasse van equivalente q -polen kan zijn en dat bovendien p alleen maar 2 of 3 kan zijn.

Als $p = 2$, dan geeft vergelijking (2)

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2q},$$

en dus is $n = 4q$. Er zijn dan $n/(2q) = 2$ noodzakelijkerwijs antipodale q -polen, met q spiegelcirkels erdoorheen. Die cirkels begrenzen $2q$ 'maantjes' (tweehoeken op de bol) met hoeken π/q . De centra van die maantjes zijn

	Rotatiegroepen (chirale patronen)	Gemengde groepen (achirale patronen)	Spiegelingsgroepen (achirale patronen)
Parametrische groepen	$[g(p,p)]$ $[g(p,2,2)]$	$[g(p) s]$ $[g(p) x]$ $[g(2) s(q)]$	$[s(q,q)]$ $[s(q,2,2)]$
Platonische groepen	$[g(3,3,2)]$ $[g(4,3,2)]$ $[g(5,3,2)]$	$[g(3) s(2)]$	$[s(3,3,2)]$ $[s(4,3,2)]$ $[s(5,3,2)]$

Tabel 4 De veertien typen eindige symmetriegroepen op de bol

de 2-polen. Ze liggen op de evenaar. Het zijn er $2q$ en ze zijn allemaal equivalent. De handtekening is $[g(2) s(q)]$.

Als $p = 3$ is, dan geldt wegens $\frac{1}{2} - \frac{1}{2q} = \frac{1}{p} - \frac{2}{n} < \frac{1}{p} = \frac{1}{3}$, dat alleen $q = 2$ mogelijk is. Vergelijking (2) geeft dan

$$1 - \frac{2}{n} = \frac{1}{4} + \frac{2}{3},$$

dus $n = 24$. Hieruit volgt dat er dan $n/p = 8$ polen P van orde 3 zijn die niet op spiegelcirkels liggen, en $n/(2q) = 6$ polen Q van orde 2 die wél op spiegelcirkels liggen. Deze spiegelcirkels snijden elkaar onder rechte hoeken in de zes punten Q . Dat betekent dat er precies drie spiegelcirkels zijn. Ze verdelen de bol in acht octanten, dat wil zeggen boldriehoeken met drie rechte hoeken (in de punten Q). De acht 3-polen P zijn de centra van deze driehoeken. Deze groep heeft handtekening $[g(3) s(2)]$.

Merk op dat de groepen van orde 2 met de handtekeningen $[s]$ en $[x]$ kunnen worden opgevat als speciale gevallen van respectievelijk de groepen met handtekening $[g(p) s]$ en $[g(p) x]$ voor $p = 1$, want een 1-voudige rotatie (rotatiehoek $2\pi/1 = 2\pi$) is hetzelfde als de identiteit.

Ik vat de resultaten samen in Tabel 3. Daarmee is de lijst van alle eindige symmetriegroepen bij bolpatronen compleet. We hebben bewezen dat er precies 14 typen van eindige symmetriegroepen zijn. Hun handtekeningen staan in Tabel 4, waarbij $p \geq 1$ en $q \geq 1$ willekeurige parameters zijn. Merk op dat $[g(1,1)]$ de triviale groep is die uitsluitend uit de identiteit bestaat, dat de handtekeningen $[g(1) s]$ en $[s(1,1)]$ allebei kunnen worden vereenvoudigd tot $[s]$, dat $[g(1) x]$ vereenvoudigd kan worden tot $[x]$ en dat $[s(1,2,2)]$ dezelfde groep is als $[s(2,2)]$.

Voorbeelden en handtekeningen verklaard

Van elk type symmetriepatroon heb ik in Figuur 1 of 2 een voorbeeld gegeven. Bij de parametrische patronen heb ik $p = 7$ of $q = 7$

genomen. Bij elk patroon zijn de spiegelcirkels zwart getekend en de rotatiecentra met stippen in verschillende kleuren gemarkeerd. Equivalente centra hebben dezelfde kleur gekregen.

Op die manier is de opbouw van de handtekening bijna vanzelfsprekend geworden. Alle equivalenteklassen van rotatiecentra die niet op spiegelcirkels liggen worden opgesomd tussen de haakjes na de letter ‘g’, en alle rotatiecentra die wel op spiegelcirkels liggen na de letter ‘s’. Bij de rotatiecentra wordt elke kleur dus maar één keer in de handtekening vermeld. De volgorde van de getallen tussen de haakjes is daarbij niet van belang; als regel heb ik ze in dalende volgorde vermeld. Ik heb $g(\dots)$ steeds vóór $s(\dots)$ gezet. En, ten slotte, als er in het patroon een draaispiegeling voorkomt die *niet* kan worden samengesteld uit een spiegeling en een draaiing in de symmetriegroep, dan heb ik dat aangegeven door de letter ‘x’ toe te voegen.

Je kunt nu zelf alle spiegelcirkels en alle rotatiecentra in de gegeven voorbeelden controleren, en op die manier nagaan dat de vermelde handtekeningen inderdaad correct zijn. Ga daarbij ook na dat equivalente centra inderdaad dezelfde kleur hebben gekregen (maar niet alle centra zijn zichtbaar in de tekeningen). Let op: de kleuren zijn essentieel: symmetrieën van het patroon moeten de kleuren in stand houden.

Het is nu ook heel gemakkelijk om zelf de handtekening van een willekeurig bolpatroon te vinden: bepaal (met een spiegel) eerst of het chiraal is of niet. Teken dan alle spiegelcirkels. Markeer vervolgens de rotatiecentra en geef equivalente centra daarbij dezelfde kleur. De handtekening kan dan direct worden afgelezen, waarbij het enige subtiele punt is dat het patroon achiraal kan zijn terwijl er toch geen spiegelcirkels zijn. Dan moet er een draaispiegeling zijn, en het patroon heeft dan als handtekening $[g(p) x]$ voor een zekere waarde van p . Let op: p kan 1 zijn. Dat is het geval als er ook geen rotatiecentra zijn. De handtekening kan dan worden vereenvou-

digd tot $[x]$, en de enige niet-triviale symmetrie is de centrale inversie.

Merk op dat steeds aan de vergelijkingen (1) of (2) voldaan is. De orde n van de symmetriegroep volgt uit deze vergelijkingen. Bedenk ook dat het aantal equivalente p -polen gelijk is aan n/p terwijl het aantal equivalente q -polen gelijk is aan $n/(2q)$. Dat geeft extra controle mogelijkheden.

De vergelijkingen (1) en (2) maakten het mogelijk om de 14 typen symmetriepatronen op een vrij eenvoudige manier af te leiden en te bewijzen dat er geen andere mogelijkheden zijn. In feite zijn die twee vergelijkingen gelijkwaardig aan Conways ‘Magic Theorem’ voor bolpatronen [1, p. 53]. Onze afleiding, die voor chirale patronen gebaseerd was op [2, pp. 274–275], is echter meer elementair omdat die geen gebruik maakt van topologische hulpmiddelen.

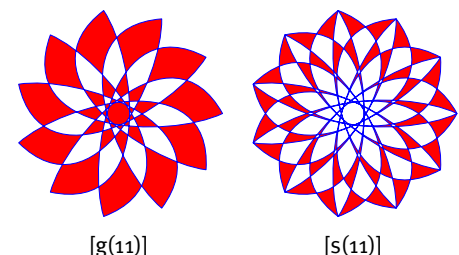
Rozetpatronen en strookpatronen

Ik stap nu over naar patronen in het euclidische vlak. Eerst bekijk ik patronen met een eindig aantal symmetrieën. Om redenen die zo dadelijk duidelijk zullen worden, heten zulke patronen *rozetpatronen*. Daarna bekijk ik *strookpatronen*, vlakke patronen waarin een motief telkens herhaald wordt in een rij.

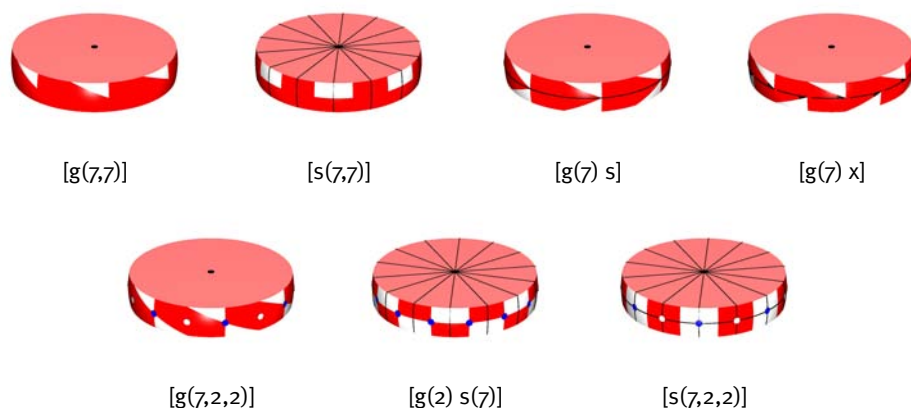
Rozetpatronen

Een rozetpatroon kan allerlei vormen van symmetrie hebben, maar er moet altijd minstens één vast punt zijn, een punt dat bij alle isometrieën uit de symmetriegroep \mathcal{G} van het patroon op zijn plaats blijft. Immers, omdat de baan van elk punt P een eindige puntverzameling is, blijft het zwaartepunt O ervan bij alle isometrieën uit \mathcal{G} op zijn plaats.

Als er twee verschillende vaste punten O_1 en O_2 zijn, moet de gehele lijn ℓ door O_1 en O_2 uit vaste punten bestaan want een isometrie die twee punten op hun plaats houdt, laat alle punten van de lijn door die twee punten op hun plaats. Als er daarnaast nog een vast punt O_3 is dat niet op ℓ ligt, dan blijft elk punt van het vlak onder alle isometrieën van \mathcal{G} op zijn plaats, dus dan bestaat \mathcal{G} alleen



Figuur 4 Twee rozetpatronen, links een chiraal patroon en rechts een achiraal patroon



Figuur 5 De parametrische bolpatronen uit Figuur 1 gereduceerd tot een schijf rond de evenaar

maar uit de identiteit. Het patroon heeft dan helemaal geen symmetrie. Als alleen de punten van een lijn ℓ vaste punten zijn, bestaat \mathcal{G} slechts uit twee isometrieën: de identiteit en de spiegeling in ℓ . Het patroon heeft dan ℓ als symmetrieas, maar verder geen andere symmetrie.

In alle andere gevallen is er precies één punt O dat onder alle isometrieën van \mathcal{G} op zijn plaats blijft. De symmetrieën kunnen dan alleen maar rotaties zijn met centrum O en spiegelingen in lijnen door O .

Als het patroon chiraal is, zijn er alleen maar rotaties. De groep \mathcal{G} is dan cyclisch. Als p de orde van de groep is, dan is de kleinste positieve rotatiehoek $2\pi/p$ en dan zijn alle banen regelmatige p -hoeken met middelpunt O . Als handtekening neem ik dan $[g(p)]$.

Als het patroon achiraal is, moet er een eindig aantal, zeg q , spiegellijnen door O zijn. Elk tweetal naburige lijnen snijdt elkaar in Q onder een hoek van π/q . De groep \mathcal{G} is dan de zogenaamde *dihedrale groep* die bestaat uit q lijnspiegelingen en q rotaties (waaronder

de identiteit). De orde van de groep is $2q$ en als handtekening neem ik $[s(q)]$. In Figuur 4 staan twee voorbeelden van rozetpatronen met hun handtekening, een chiraal patroon en een achiraal patroon.

Je kunt een rozetpatroon altijd op een grote bol plakken, zeg op de noordpool, waardoor er een parametrisch bolpatroon ontstaat met handtekening $[g(p, p)]$ bij de cyclische groep en $[s(p, p)]$ bij de dihedrale groep. Rozetpatronen kun je dus identificeren met bolpatronen met ‘dezelfde’ symmetriegroep. Als bolpatroon bestaan de symmetrieën dan uit rotaties om de poolas en spiegelingen in vlakken door de beide antipodale polen, en in het vlakke geval bestaan de symmetrieën uit rotaties rond het middelpunt en spiegelingen in lijnen door het middelpunt.

Strookpatronen

Strookpatronen (ze worden ook wel *friespatronen* genoemd) zijn vlakke patronen waarin een motief telkens herhaald wordt in een rij, zeg een horizontale rij. Hoewel strookpatro-

nen in werkelijkheid altijd eindig zijn, denken we ons in dat ze naar beide kanten onbeperkt voortgezet zijn, zodat er *translaties* onder de symmetrieën zijn. Als T de translatie is die elk motief in zijn rechterbuur overvoert, kan elke andere translatie in de symmetriegroep \mathcal{G} van het patroon worden geschreven als T^n voor zekere gehele n . Maar er kunnen ook nog andere symmetrieën zijn.

Het is welbekend dat er precies zeven verschillende typen strookpatronen bestaan, en in feite kennen we ze al omdat ze kunnen worden opgevat als limietgevallen van de zeven parametrische bolpatronen. Zoals Conway al opmerkte: neem een eindig segment uit een strookpatroon dat bestaat uit N kopieën van het motief en wikkel dat om de evenaar van een bol met de juiste straal zodat het er goed aansluitend omheen past. Dan krijg je een parametrisch bolpatroon met een van de zeven handtekeningen $[g(N, N)]$, $[s(N, N)]$, $[g(N) s]$, $[g(N) x]$, $[g(N, 2, 2)]$, $[g(2) s(N)]$ en $[s(N, 2, 2)]$.

Omgekeerd kan elk parametrisch bolpatroon in het vlak worden afgewikkeld waardoor er een N -segment ontstaat van het bijbehorende strookpatroon. In Figuur 5 zijn voorbeelden van parametrische bolpatronen getekend met $N = 7$, waarbij de bol gereduceerd is tot een schijf rond de evenaar.

Als je die bolpatronen in het vlak afgewikkelt, krijg je segmenten van lengte 7 van de bijbehorende oneindige strookpatronen. Het ligt voor de hand (laat N naar oneindig gaan) om als handtekening voor die strookpatronen respectievelijk $[g(\infty, \infty)]$, $[s(\infty, \infty)]$, $[g(\infty) s]$, $[g(\infty) x]$, $[g(\infty, 2, 2)]$, $[g(2) s(\infty)]$ en $[s(\infty, 2, 2)]$ te nemen. Zo krijg je de strookpatronen die in Figuur 6 getekend zijn.

Aangezien de symmetriegroep van elk strookpatroon oneindig is, geven de vergelijkingen (1) en (2) via $n \rightarrow \infty$,

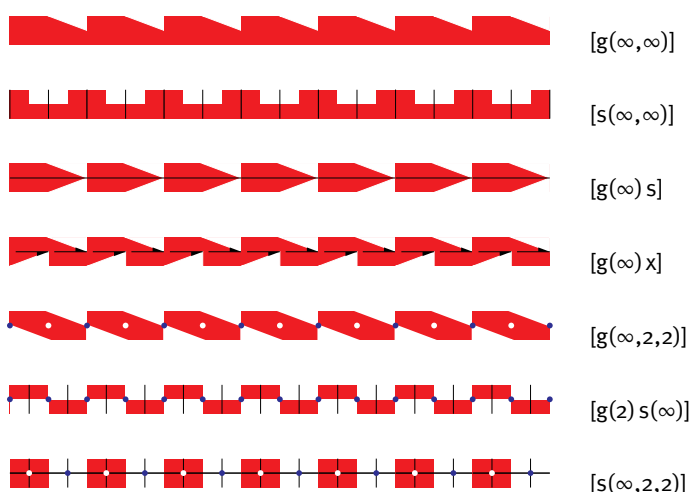
$$2 = \sum \left(1 - \frac{1}{p} \right) \tag{3}$$

voor chirale strookpatronen en

$$1 = \sum \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2q} \right) + \sum \left(1 - \frac{1}{p} \right) \tag{4}$$

voor achirale strookpatronen, waarbij de p -sommaties in (3) en (4) zich uitstrekken over alle equivalentieklassen van rotatiecentra die niet op spiegellijnen liggen, terwijl de q -sommatie in (4) gaat over alle equivalentieklassen van rotatiecentra op spiegellijnen.

Merk op dat de ‘noordpool’ en de ‘zuidpool’ naar oneindig zijn verdwenen in de ver-



Figuur 6 De bolpatronen uit Figuur 5 afgewikkeld in het vlak

ticale richting en dat de rotaties rond de polen daarmee horizontale translaties zijn geworden met 'rotatiehoek' 0 en 'centrum' plus of min oneindig in de verticale richting. Voor deze centra 'op oneindig' moet je respectievelijk $p = \infty$ of $q = \infty$ nemen, zodat $1/p = 1/(2q) = 0$. Dit levert bijdragen van 1 of $\frac{1}{2}$ in de bovenstaande sommaties. Op die manier kun je de vergelijkingen (3) en (4) gemakkelijk verifiëren voor alle strookpatronen.

Draaispiegelingen op de bol worden *glijspiegelingen* van de strookpatronen in het vlak, waarbij een glijspiegeling de combinatie is van een lijnspiegeling en een translatie langs de spiegelas. Tweemaal achter elkaar toepassen van een glijspiegeling geeft een translatie langs de as. Zie hierboven strookpatroon $[g(\infty)x]$ voor een voorbeeld van een horizontale glijspiegelas die geen spiegellijn van het patroon is. In dit voorbeeld heb ik de glijspiegelas aangegeven door een onderbroken lijn met alternerende halve pijlen.

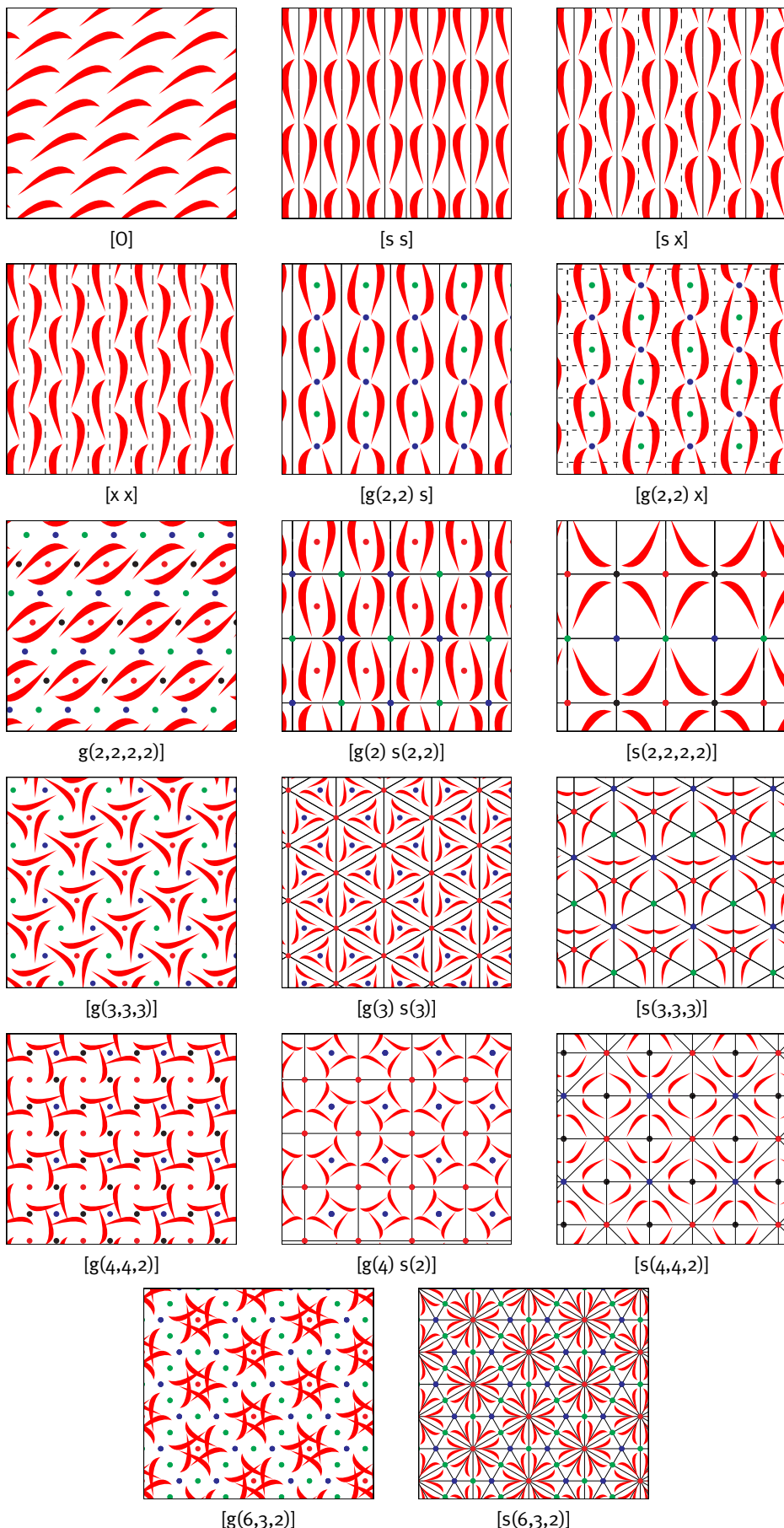
Patroon $[g(\infty)s]$ heeft ook horizontale glijspiegelingen, maar die zijn samengesteld uit lijnspiegelingen en translaties die al in de symmetriegroep van het patroon zitten. Daarom worden ze niet in de handtekening vermeld. Conways handtekening bevat nooit overbodige informatie. Dat is ook de reden waarom equivalente rotatiecentra slechts één vermelding krijgen.

Een horizontale glijspiegeling krijg je ook wanneer je een verticale lijnspiegeling combineert met een 2-voudige rotatie (een halve draai) rond een centrum dat niet op de verticale spiegelas ligt. De glijspiegelas is dan de horizontale lijn door het centrum van de halve draai. Omgekeerd geeft de combinatie van een horizontale glijspiegeling met een halve draai op de glijspiegelas een verticale lijnspiegeling. In de patronen $[g(2)s(\infty)]$ en $[s(\infty,2,2)]$ komen verticale lijnspiegelingen en halve draaiingen op een horizontale lijn voor. Maar omdat die symmetrieën zelf al in de symmetriegroep voorkomen, worden de bijbehorende glijspiegelingen niet in de handtekening vermeld.

Hiermee is de behandeling van de strookpatronen voltooid.

Behangpatronen

Terwijl er bij rozetpatronen geen translaties zijn en bij strookpatronen alleen translaties in één richting, treden bij de zogenaamde *behangpatronen* (Engels: *wallpaper patterns*) translaties op in meerdere richtingen. Ik zal aannemen dat de symmetriegroep \mathcal{G} van zo'n patroon *discreet* is, dat wil zeggen dat er bij elk punt P een cirkeltje met middelpunt P is



Figuur 7 Zeventien typen van behangpatronen met hun handtekeningen

dat buiten P zelf geen andere punten van de baan van P bevat. Dat betekent dat er een begrensd motief is dat via de translaties in \mathcal{G} over het gehele vlak onbepaald herhaald wordt.

Merk op dat ik bij bolpatronen, rozetpatronen en strookpatronen ook steeds stilzwijgend heb aangenomen dat de symmetriegroep discreet is. Bij bolpatronen en rozetpatronen was dat het geval omdat ik heb geëist dat de symmetriegroep eindig is. Dat sloot bijvoorbeeld het geval uit waarin het patroon alleen maar uit een (ongemarkeerde) cirkel bestaat. Die heeft immers oneindig veel rotaties en spiegelingen als symmetrieën.

Omdat de symmetriegroep \mathcal{G} van een behangpatroon discreet is, is er een translatie T_1 met een minimale positieve translatieafstand d_1 en een tweede translatie T_2 , in een andere richting, met een minimale positieve translatieafstand $d_2 \geq d_1$. Door de richting van T_2 zo nodig om te keren, kun je ervoor zorgen dat de hoek α tussen T_1 en T_2 niet stomp is. Als $\alpha < \pi/3$ zou zijn, zou de translatieafstand van de translatie $T_1 - T_2$ kleiner zijn dan d_2 op grond van de sinusregel, in tegenspraak met de keuze van T_2 . Er geldt dus $\pi/3 \leq \alpha \leq \pi/2$.

Het is eenvoudig om te bewijzen dat elke translatie T in \mathcal{G} geschreven kan worden als $T = T_1^n T_2^m$ voor zekere gehele getallen n en m , met andere woorden, dat de ondergroep \mathcal{T} van alle translaties in \mathcal{G} voortgebracht wordt door T_1 en T_2 . Voor elk punt P geldt dat de baan van P onder \mathcal{T} een rooster is dat wordt opgespannen door vectoren die bij de translaties T_1 en T_2 horen.

Maar behangpatronen kunnen ook nog andere symmetrieën hebben. In feite is welbekend (en ik zal het hier opnieuw bewijzen) dat er precies 17 verschillende typen van behangpatronen zijn. Elk type heeft zijn eigen handtekening, die in een notendop alle symmetrie-eigenschappen van het patroon samenvat. Net zoals dat bij bolpatronen, rozetpatronen en strookpatronen het geval was, is het heel gemakkelijk om de handtekening bij een gegeven behangpatroon te vinden als je eerst de chiraliteit ervan vaststelt, vervolgens alle eventuele spiegellijnen en rotatiecentra markeert, en ten slotte, als ze er zijn, de assen van de glijspiegelingen die niet ook al als spiegellijnen gemarkeerd zijn.

Zeventien typen van behangpatronen

In Figuur 7 geef ik bij elk van de 17 typen van behangpatronen een eenvoudig voorbeeld samen met de handtekening ervan. Bij elk voorbeeld heb ik de spiegellijnen zwart getekend en de rotatiecentra aangegeven met ge-

kleurde stippen, equivalente centra in dezelfde kleur. Glijspiegelingen die geen spiegellijnen zijn, heb ik aangegeven met gestreepte lijnen.

De lezer zal weinig moeite hebben om de gegeven handtekeningen te doorgronden en te verifiëren. In navolging van Conway gebruik ik $[O]$ als handtekening voor een patroon waarbij translaties de enige symmetrieën zijn.

Bij patroon $[s\ s]$ zijn er twee soorten spiegellijnen, allebei verticaal. Ze wisselen elkaar af op gelijke afstand. Bij patroon $[s\ x]$ wisselen verticale spiegellijnen en glijspiegelingen elkaar af met gelijke tussenruimten. De spiegellijnen zijn onderling allemaal equivalent, en hetzelfde geldt voor de glijspiegelingen. Patroon $[x\ x]$ heeft twee soorten glijspiegelingen, allebei verticaal, en allebei met dezelfde verticale translatieafstand.

Speciale aandacht verdient het patroon $[g(2,2)\ x]$, waarin twee niet-equivalente soorten 2-voudige rotatiecentra voorkomen, blauw en groen gekleurd, en twee soorten glijspiegelingen, horizontaal en verticaal. Merk op dat een horizontale glijspiegeling gevolgd door een halve draai om een centrum dat niet op de glijspiegeling ligt, een verticale glijspiegeling geeft. Daarom staat er in de handtekening van dit patroon maar één symbool 'x'.

In de volgende paragraaf geef ik meer details bij de verschillende patronen en daarna bewijs ik ook dat de opsomming volledig is: er zijn niet meer dan 17 verschillende typen van behangpatronen.

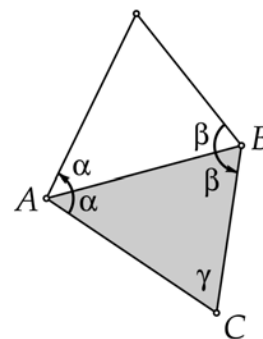
Isometrieën in het vlak

In deze en de volgende paragrafen gebruik ik ideeën van L. Fejes Tóth [3, p. 29].

Het is welbekend dat elke isometrie in het euclidische vlak een translatie, een rotatie, een lijnspiegeling of een glijspiegeling is. Translaties en rotaties zijn directe isometrieën, lijnspiegelingen en glijspiegelingen zijn indirecte isometrieën. Elke groep \mathcal{G} van isometrieën bestaat uitsluitend uit directe isometrieën, of de directe isometrieën in \mathcal{G} vormen een ondergroep \mathcal{H} van index 2.

Een patroon in het vlak heet *chiraal* als de enige symmetrieën ervan directe isometrieën zijn, anders heet het patroon *achiraal*. Je kunt de chiraliteit van een patroon gemakkelijk vaststellen met behulp van een spiegel.

Een rotatie heeft een *centrum* en een *rotatiehoek*, die we altijd tegen de klok in meten in radialen modulo 2π . Het is soms handig om translaties op te vatten als rotaties met rotatiehoek 0 en een centrum dat oneindig ver weg ligt in een richting loodrecht op de translatierichting.



Figuur 8

In een discrete groep \mathcal{G} vormen de rotaties met een gemeenschappelijk centrum een cyclische ondergroep van eindige orde p , voortgebracht door een rotatie met rotatiehoek $2\pi/p$. Evenzo vormen de translaties met een gemeenschappelijke translatierichting een oneindige cyclische ondergroep voortgebracht door een translatie met een translatieafstand $d > 0$.

Als R_1 en R_2 spiegelingen in respectievelijk spiegellijnen m_1 en m_2 zijn, dan is R_2R_1 (R_1 gevolgd door R_2) een translatie met afstand $2d$ als m_1 en m_2 evenwijdig zijn met een afstand d , en een rotatie met centrum A en rotatiehoek 2α als m_1 en m_2 elkaar in A snijden onder een hoek α .

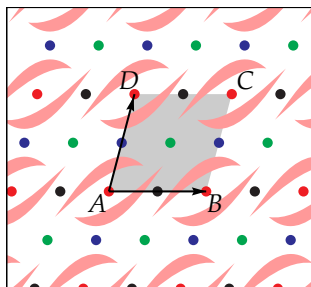
Als R_1 en R_2 rotaties met respectievelijk centra A_1 en A_2 en rotatiehoeken α_1 en α_2 zijn, dan is R_2R_1 een rotatie met rotatiehoek $\alpha_1 + \alpha_2$, of een translatie als $\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \pmod{2\pi}$. Als R_1 en R_2 beide halve draaien zijn, zodat de beide rotatiehoeken gelijk zijn aan π , dan is R_2R_1 een translatie met afstand $2d(A_1, A_2)$ in de richting van A_1 naar A_2 .

Als ABC een driehoek is met hoeken van respectievelijk α , β en γ radialen die georiënteerd is met de klok mee (zie Figuur 8), dan geeft een rotatie met centrum A en hoek 2α gevolgd door een rotatie met centrum B en hoek 2β een rotatie die C terugbrengt op zijn plaats, en dus is het een rotatie met centrum C (en rotatiehoek $2\alpha + 2\beta = 2\pi - 2\gamma$).

Als A en B dus rotatiecentra van een behangpatroon van orde p respectievelijk q zijn, en p en q zijn niet beide 2, dan is C , geconstrueerd als boven met hoeken $\alpha = \pi/p$ en $\beta = \pi/q$, ook een rotatiecentrum van het patroon.

Chirale behangpatronen

Stel dat een chiraal behangpatroon gegeven is met een discrete symmetriegroep \mathcal{G} . Dan zijn alle isometrieën in \mathcal{G} translaties of rotaties. Ik heb al laten zien dat de ondergroep \mathcal{T} van alle translaties in \mathcal{G} voortgebracht kan worden door twee translaties T_1 en T_2 met mi-



Figuur 9

nimale translatieafstanden $d_1 \leq d_2$ en hoek $\pi/3 \leq \alpha \leq \pi/2$. Als er geen rotaties zijn, valt \mathcal{G} samen met \mathcal{T} en dan is de handtekening [0].

Stel nu dat alle rotatiecentra in het patroon 2-centra zijn. Alle rotaties in \mathcal{G} zijn dus halve draaien. Stel dat A een 2-centrum is en stel dat $ABCD$ het parallellogram is met $B = T_1A$, $C = T_2T_1A$ en $D = T_2A$ (zie Figuur 9). Dan zijn de hoekpunten van het parallellogram, de middens van de zijden en het middelpunt van het parallellogram ook allemaal 2-centra, negen stuks in totaal.

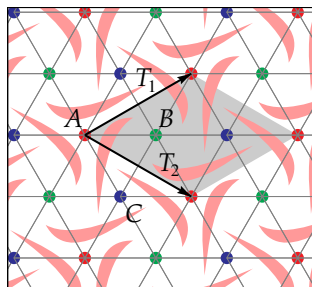
Maar centra die een translatie in \mathcal{T} verschillen, zijn equivalent, dus er zijn maar vier niet-equivalente 2-centra onder deze negen centra. Je kunt daarvoor A en de middens van AB , AC en AD nemen.

Ik beweer nu dat alle 2-centra in het patroon equivalent zijn met een van deze vier. Inderdaad, bij elk ander 2-centrum is er een equivalent 2-centrum E in of op de rand van $ABCD$. Maar als E niet een van de bovengenoemde negen centra is, geeft de samenstelling van halve draaien rond A en E een translatie die niet door T_1 en T_2 voortgebracht is, en dat is onmogelijk. Er zijn dus precies vier niet-equivalente soorten 2-centra in dit patroon en de handtekening ervan is $[g(2,2,2,2)]$.

Als niet alle rotatiecentra 2-centra zijn, neem ik twee centra A en B van respectievelijk orde p en q , beide groter dan 2, met een minimale afstand d . Stel dat C het hoekpunt is van de driehoek ABC met hoeken π/p en π/q in respectievelijk A en B . Dan is C het centrum van een rotatie in \mathcal{G} met een hoek $2\pi/p + 2\pi/q = 2\pi - 2\pi/r$ voor een zeker positief rationaal getal r , dus

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1. \tag{5}$$

Als $p = q = 3$ dan is ook $r = 3$, dus dan zijn A , B en C allemaal 3-centra. De combinatie van een rotatie met hoek $+2\pi/3$ rond A en een rotatie met hoek $-2\pi/3$ rond B geeft een translatie T_1 , en de combinatie van een rotatie met hoek $-2\pi/3$ rond A en $+2\pi/3$ rond B geeft een translatie T_2 (zie Figuur 10).



Figuur 10

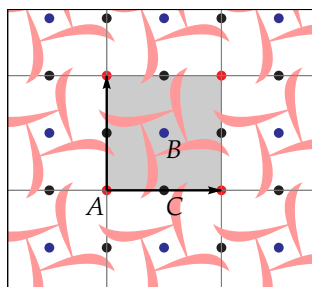
Door op B en C rotaties over $2\pi/3$ en $4\pi/3$ rond A toe te passen, gaan die over in de vier overige hoekpunten van een regelmatige zeshoek met middelpunt A . Met behulp van de translaties T_1 en T_2 kun je het gehele vlak betegelen met zulke zeshoeken. Omdat B op minimale afstand van A is genomen, kan er geen andere rotatiecentrum van orde groter dan 2 binnen de zeshoek met middelpunt A liggen, en dus evenmin elders in het patroon. Maar ook rotatiecentra van orde 2 kunnen niet voorkomen, want dan zouden er ook centra zijn van rotaties over een hoek $2\pi/2 - 2\pi/3 = 2\pi/6$, in tegenspraak met de bovenstaande opmerking. De 3-centra A , B en C zijn niet equivalent, dus deze groep heeft de handtekening $[g(3,3,3)]$.

Als in dezelfde notaties als boven p en q niet beide gelijk zijn aan 3 maar wel groter dan 2, ligt het punt C (dat een rotatiecentrum van het patroon is) dichterbij A dan B , en dus moet C een 2-centrum zijn. Hieruit volgt dat $r = 2$ en

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}, \tag{6}$$

hetgeen kan worden geschreven als $(p - 2)(q - 2) = 4$. De enige oplossingen met $p \geq q \geq 3$ zijn $(p, q) = (4, 4)$ en $(p, q) = (6, 3)$. Dat houdt in het bijzonder in dat in een behangpatroon alleen maar 2-centra, 3-centra, 4-centra en 6-centra voor kunnen komen. Dit is de beroemde *kristallografische beperking*.

Als $p = q = 4$ moeten A en B naburige 4-centra zijn en zoals we al weten is C een



Figuur 11 $[g(4,4,2)]$

2-centrum. Driehoek ABC is dan een gelijkbenige rechthoekige driehoek die je op kunt vatten als deel van een vierkant met A als een van de hoekpunten, B als middelpunt en C als het midden van een zijde die in A begint. Een combinatie van rotaties rond A en B met hoeken $\pm 2\pi/4$ en $\mp 2\pi/4$ geeft translaties langs twee van de zijden van dit vierkant. Deze translaties brengen \mathcal{T} voort. Hieruit volgt dat A en B niet-equivalente 4-centra zijn, en dus is de handtekening van deze groep $[g(4,4,2)]$ (zie Figuur 11).

Op net zo'n manier leidt het geval $p = 6$, $q = 3$ tot een patroon van 6-centra, 3-centra en 2-centra die een rooster van gelijkzijdige driehoeken vormen met 6-centra in hun hoekpunten, 3-centra in hun middelpunten en 2-centra in de middens van de zijden. De handtekening van dit patroon is $[g(6,3,2)]$ (zie Figuur 12).

Merk op dat vergelijking (5) kan worden geschreven als

$$2 = \left(1 - \frac{1}{p}\right) + \left(1 - \frac{1}{q}\right) + \left(1 - \frac{1}{r}\right),$$

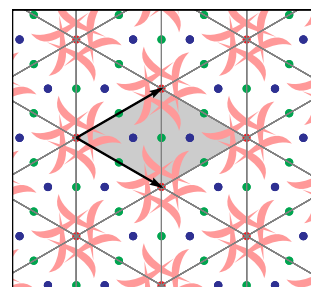
of, korter, als

$$2 = \sum \left(1 - \frac{1}{p}\right). \tag{7}$$

Deze vergelijking heeft dezelfde vorm als vergelijking (3). Ook het patroon $[g(2,2,2,2)]$ voldoet hieraan (met vier 2-centra van 'gewicht' $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$). Zelfs een patroon met handtekening [0] voldoet aan deze vergelijking als je de twee voortbrengende translaties ziet als rotaties met rotatiehoek 0 en 'orde' ∞ . Elk geeft dan een bijdrage van 'gewicht' $1 - 1/\infty = 1$ aan het rechterlid.

Achirale behangpatronen

Nu de achirale patronen. Dan moet de symmetriegroep \mathcal{G} minstens één lijnspiegeling of glijspiegeling bevatten. De directe isometrieën in \mathcal{G} vormen dan een ondergroep \mathcal{H} van index 2.



Figuur 12 $[g(6,3,2)]$

Rotatiegroepen (chirale patronen)	Gemengde groepen (achirale patronen)	Spiegelingsgroepen (achirale patronen)
[0]	[g(2,2) s] [g(2,2) x]	[s s] [s x] [x x]
[g(2,2,2,2)]	[g(2) s(2,2)]	[s(2,2,2,2)]
[g(3,3,3)]	[g(3) s(3)]	[s(3,3,3)]
[g(4,4,2)]	[g(4) s(2)]	[s(4,4,2)]
[g(6,3,2)]		[s(6,3,2)]

Tabel 5 De zeventien typen symmetriegroepen van behangpatronen

De translaties vormen een ondergroep \mathcal{T} van \mathcal{H} . Ik onderscheid nu vier gevallen.

Geval 1: achirale patronen zonder rotaties.

Stel eerst dat \mathcal{G} geen rotaties bevat. Dan is $\mathcal{H} = \mathcal{T}$. Spiegellijnen en glijspiegelingen kunnen dan maar in één richting voorkomen, want als ze elkaar snijden, zijn er ook niet-triviale rotaties. Ik neem aan dat alle eventuele spiegellijnen en glijspiegelingen verticaal zijn.

Als er een spiegellijn m is, zijn er ook oneindig veel, en ze liggen op gelijke afstanden van elkaar. Stel dat m' een spiegellijn is op minimale afstand van m . Als m en m' niet equivalent zijn, zijn er precies twee soorten spiegellijnen. Ze zijn equivalent met m of m' . De handtekening van de groep is dan [s s].

Als m en m' equivalent zijn, moet er een glijspiegeling zijn die ze in elkaar overvoert. De glijspiegelas moet dan precies halverwege m en m' liggen. Spiegellijnen en glijspiegelingen wisselen elkaar dan op gelijke afstanden af. Alle spiegelingen zijn equivalent en alle glijspiegelingen ook. De groep heeft als handtekening [s x].

Als er geen spiegellijnen zijn, dan zijn er glijspiegelingen, allemaal parallel. Als n en n' naburige assen zijn, kunnen ze niet equivalent zijn, maar alle andere assen zijn equivalent met hetzij n , hetzij n' . De handtekening is dan [x x].

Geval 2: alle rotatiecentra liggen op spiegellijnen.

Als er in een achiraal patroon rotatiecentra voorkomen, kunnen ze al dan niet op spiegellijnen liggen. Ik bekijk eerst het geval dat ze allemaal op spiegellijnen liggen. De ondergroep \mathcal{H} van alle directe isometrieën in \mathcal{G} is dan een van de vier typen met handtekening [g(2,2,2,2)], [g(3,3,3)], [g(4,4,2)] of [g(6,3,2)], en de voorbeelden in Figuur 7 laten zien dat het in de laatste drie gevallen mogelijk is om de rotatiecentra zo door spiegellijnen te verbinden dat er door elk q -centrum precies q spiegellijnen gaan, waarbij aangrenzende lijnen elkaar snijden onder een hoek van π/q radialen. Op die manier krijg je de spiege-

lingsgroepen met handtekeningen [s(3,3,3)], [s(4,4,2)], [s(6,3,2)].

Voor patronen met [g(2,2,2,2)] als handtekening lukt dat alleen als de parallelogrammen van de 2-centra rechthoeken zijn. De spiegellijnen vormen dan een rechthoekig rooster en de handtekening is [s(2,2,2,2)].

Merk op dat al deze spiegelingsgroepen voortgebracht worden door hun spiegelingen. Merk ook op dat vergelijking (7) in dit geval luidt $2 = \sum (1 - \frac{1}{q})$ of, na delen door 2,

$$1 = \sum \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2q} \right), \tag{8}$$

hetgeen overeenkomt met vergelijking (4) voor achirale strookpatronen (er zijn in dit geval geen p -voudige rotatiecentra).

Geval 3: er zijn rotatiecentra maar geen spiegellijnen.

Stel nu dat er wel rotatiecentra zijn maar geen spiegellijnen. Ook in dit geval moet de ondergroep \mathcal{H} van alle directe isometrieën een van de vier handtekeningen [g(2,2,2,2)], [g(3,3,3)], [g(4,4,2)] of [g(6,3,2)] hebben. En er moet dan een glijspiegeling G in \mathcal{G} zijn. Net als alle isometrieën in \mathcal{G} moet deze glijspiegeling p -centra in p -centra transformeren. Maar als G een p -centrum A in een p -centrum A' transformeert dat equivalent met A is in \mathcal{H} , dan is er een directe isometrie D die A' weer terugbrengt naar A . Dan heeft de indirecte isometrie DG het punt A als een vast punt, en dus moet die isometrie dan een spiegeling zijn in een lijn door A , in tegenspraak met de aanname dat het patroon geen spiegellijnen heeft.

Maar als G geen rotatiecentra in equivalente rotatiecentra kan transformeren (equivalent in \mathcal{H}) dan zijn de handtekeningen [g(4,4,2)] en [g(6,3,2)] voor \mathcal{H} uitgesloten omdat bijvoorbeeld de 2-centra in 2-centra moeten overgaan, en die zijn allemaal equivalent in \mathcal{H} .

Ook [g(3,3,3)] is niet mogelijk, want stel dat G een 3-centrum A transformeert in een 3-centrum B dat in \mathcal{H} niet equivalent is met

A . Dan gaat B over in $GB = G^2A$ en omdat G^2 een translatie is, is $GB = G^2A$ in \mathcal{H} equivalent met A . Alle 3-centra die in \mathcal{H} met A equivalent zijn, worden dus door G getransformeerd in centra die in \mathcal{H} met B equivalent zijn, en omgekeerd. Maar dan wordt elk 3-centrum C dat in \mathcal{H} noch met A , noch met B equivalent is, door G in een 3-centrum getransformeerd dat in \mathcal{H} equivalent is met C , hetgeen een tegenspraak is.

Als de handtekening van \mathcal{H} gelijk is aan [g(2,2,2,2)], kan het echter gebeuren dat er een glijspiegeling G is zonder dat er spiegellijnen zijn, namelijk als de 2-centra een rechthoekig rooster vormen. Als A, B, C en D 2-centra zijn die een rechthoek $ABCD$ vormen van minimale zijdelengten, dan is er een glijspiegeling G met $GA = C$ en $GB = D$. In feite zijn er zelfs twee van die glijspiegelingen met assen door het middelpunt van die rechthoek die evenwijdig aan de zijden zijn. Er zijn dan twee niet-equivalente soorten 2-centra en het patroon heeft handtekening [g(2,2) x].

Geval 4: er zijn spiegellijnen en rotatiecentra die niet op spiegellijnen liggen.

Ten slotte bekijk ik het geval dat er spiegellijnen zijn en rotatiecentra die niet op spiegellijnen liggen. Het kan voorkomen dat alle spiegellijnen parallel zijn. Neem aan dat ze verticaal zijn. Rotatiecentra die niet op die spiegellijnen liggen, kunnen dan alleen maar 2-centra zijn en ze moeten precies midden tussen twee naburige spiegellijnen in liggen. Als A zo'n 2-centrum is, moeten er op de verticale lijn door A nog meer van die centra liggen. Laat B het 2-centrum zijn dat het dichtst boven A ligt. Dan zijn de 2-centra A en B niet equivalent, en elk ander 2-centrum is equivalent met A of B . De handtekening van dit patroon is [g(2,2) s].

Als er spiegellijnen in meerdere richtingen zijn, kan het voorkomen dat alle rotatiecentra op spiegellijnen 2-centra zijn. De spiegellijnen vormen dan een rechthoekig rooster en de rotatiecentra die niet op een spiegellijn liggen moeten dan in de middelpunten van die rechthoeken liggen. Ze zijn dan allemaal equivalent via de spiegelingen in de lijnen van het rooster. Als het 2-centra zijn, zijn er twee soorten 2-centra op de snijpunten van de spiegellijnen, en de handtekening is dan [g(2) s(2,2)]. Als de middelpunten van de rechthoeken 4-centra zijn, moet het rooster van spiegellijnen een vierkantenrooster zijn. Alle snijpunten van roosterlijnen zijn dan equivalente 2-centra en de handtekening is [g(4) s(2)].

Ten slotte, als er q -centra van orde $q \geq 3$ op spiegellijnen liggen, dan heeft de ondergroep van alle isometrieën in \mathcal{G} die voortge-

bracht wordt door alle spiegelingen als handtekening $[s(3,3,3)]$, $[s(4,4,2)]$ of $[s(6,3,2)]$. Maar in de laatste twee gevallen zijn de ‘cellen’ die door de spiegellijnen worden begrensd rechthoekige driehoeken, en dan kunnen er geen rotatiecentra zijn die niet op spiegellijnen liggen. Dat kan wél in het geval $[s(3,3,3)]$. Dan zijn de cellen gelijkzijdige driehoeken, en in de centra daarvan kunnen 3-centra worden geplaatst. Dan worden alle 3-centra op de spiegellijnen equivalent, en de handtekening van dit patroon is $[g(3) s(3)]$.

Hiermee is de beschrijving van alle typen behangpatronen voltooid. Met het oog op Conways ‘magic theorems’ die nog ter sprake zullen komen, merk ik op dat je direct kunt controleren dat bij alle achirale patronen waarin rotatiecentra voorkomen, voldaan is aan de vergelijking

$$1 = \sum \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2q} \right) + \sum \left(1 - \frac{1}{p} \right), \quad (9)$$

die hetzelfde is als vergelijking (4) voor achirale strookpatronen. De p -sommatie strekt zich daarbij uit over alle equivalentieklassen van rotatiecentra die niet, en de q -sommatie over alle klassen van centra die wél op spiegellijnen liggen.

Samenvatting

In Tabel 5 vat ik de verkregen resultaten samen. De symmetriegroepen van de chirale patronen heten *rotatiegroepen* (bedenk dat translaties kunnen worden opgevat als rotaties met rotatiehoek 0 en centrum op oneindig). Groepen waarin alle rotatiecentra (voor zover aanwezig) op spiegellijnen liggen, heten *spiegelingsgroepen* en groepen van achirale patronen waarin rotatiecentra voorkomen die niet op spiegellijnen liggen, heten *gemengde groepen*.

Conways ‘Magic Theorems’

Een van de meest intrigerende zaken in de behandeling van de symmetriepatronen in [1] is het gebruik van ‘magic theorems’ om de opsomming van symmetriepatronen te vergemakkelijken. Deze stellingen worden al in het begin van het boek gebruikt, maar de bewijzen ervan worden steeds maar uitgesteld. Dat komt omdat de bewijzen die de auteurs uiteindelijk geven, gebruik maken van geavanceerde topologische hulpmiddelen zoals het begrip *orbifold*, de *Euler karakteristiek* en de classificatie van oppervlakken. In mijn meer elementaire behandeling van symmetrische patronen op de bol en in het vlak krijg ik ze

	JvdC	Con	orde
Rozetpatronen	$[g(N)]$	N•	N
	$[s(N)]$	*N•	$2N$
Bolpatronen (parametrisch)	$[g(N, N)]$	NN	N
	$[s(N, N)]$	*NN	$2N$
	$[g(N) s]$	N*	$2N$
	$[g(N) x]$	N×	$2N$
	$[g(N, 2, 2)]$	22N	$2N$
	$[s(N, 2, 2)]$	*22N	$4N$
	$[g(2) s(N)]$	2*N	$4N$
Bolpatronen (platonisch)	$[g(3, 3, 2)]$	332	12
	$[s(3, 3, 2)]$	*332	24
	$[g(3) s(2)]$	3*2	24
	$[g(4, 3, 2)]$	432	24
	$[s(4, 3, 2)]$	*432	48
	$[g(5, 3, 2)]$	532	60
	$[s(5, 3, 2)]$	*532	120

Tabel 6 Notaties voor eindige symmetriepatronen

	JvdC	Con	Int
Strookpatronen	$[g(\infty, \infty)]$	$\infty\infty$	p111
	$[s(\infty, \infty)]$	$*\infty\infty$	pm11
	$[g(\infty) s]$	$\infty*$	p1m1
	$[g(\infty) x]$	$\infty\times$	p1a1
	$[g(\infty, 2, 2)]$	22 ∞	p112
	$[s(\infty, 2, 2)]$	*22 ∞	pmm2
	$[g(2) s(\infty)]$	2* ∞	pma2
Behangpatronen	$[0]$	0	p1
	$[s s]$	**	pm
	$[s x]$	*×	cm
	$[x x]$	××	pg
	$[g(2, 2) s]$	22*	pmg
	$[g(2, 2) x]$	22×	pgg
	$[g(2, 2, 2, 2)]$	2222	p2
	$[g(2) s(2, 2)]$	2*22	cmm
	$[s(2, 2, 2, 2)]$	*2222	pmm
	$[g(3, 3, 3)]$	333	p3
	$[g(3) s(3)]$	3*3	p31m
	$[s(3, 3, 3)]$	*333	p3m1
	$[g(4, 4, 2)]$	442	p4
	$[g(4) s(2)]$	4*2	p4g
	$[s(4, 4, 2)]$	*442	p4m
	$[g(6, 3, 2)]$	632	p6
$[s(6, 3, 2)]$	*632	p6m	

Tabel 7 Notaties voor strookpatronen en behangpatronen

als bijvangst cadeau. Ik wijs er echter op dat Conways bewijs dieper inzicht geeft en ook gebruikt kan worden bij algemenere symme-

trieproblemen, zoals blijkt uit de delen II en III van het boek.

Allereerst definiëren Conway, Burgiel en

Goodman–Strauss bij elke symmetrie-eigenschap van een patroon die in een handtekening voorkomt, op de volgende manier de ‘kosten’ ervan. In plaats van ‘kosten’ gebruik ik liever de term ‘gewicht’.

- Voor een equivalentieklasse van p -voudige rotatiecentra die niet op spiegellijnen liggen, is het gewicht $1 - \frac{1}{p}$.
- Voor een equivalentieklasse van q -voudige rotatiecentra die op spiegellijnen liggen, is het gewicht $\frac{1}{2} - \frac{1}{2q}$.
- Voor een symbool ‘s’ (met of zonder haakjes erachter) is het gewicht 1.
- Voor een symbool ‘x’ is het gewicht 1.
- Voor het symbool ‘g’ is het gewicht 0.
- Voor het symbool ‘O’ is het gewicht 2.

Merk op dat voor equivalentieklassen van ∞ -voudige rotatiepunten (die voorkomen in strookpatronen) het gewicht gelijk is aan 1 als ze niet op spiegellijnen liggen, en $\frac{1}{2}$ als ze wel op spiegellijnen liggen (laat $p \rightarrow \infty$, respectievelijk $q \rightarrow \infty$). Ik geef nu Conways Magic Theorems.

Conways Magic Theorem voor bolpatronen.

Het totale gewicht van de handtekening van een bolpatroon met een symmetriegroep van orde n is $2 - \frac{2}{n}$.

Bewijs. Voor chirale patronen is dit vergelijking (1). Voor achirale patronen is dit vergelij-

king (2) als je bij de beide leden 1 optelt om het symbool ‘s’ of het symbool ‘x’ in rekening te brengen.

Conways Magic Theorem voor strookpatronen en behangpatronen. *Het totale gewicht van de handtekening van een strookpatroon of een behangpatroon is 2.*


Bewijs. Voor chirale strookpatronen is dit vergelijking (3). Voor achirale strookpatronen is dit vergelijking (4) als je bij de beide leden 1 optelt om het symbool ‘s’ of het symbool ‘x’ in rekening te brengen. Zie voor chirale behangpatronen vergelijking (7) en de opmerkingen erna. Voor achirale behangpatronen is het vergelijking (9) als je bij de beide leden 1 optelt om het symbool ‘s’ of het symbool ‘x’ in rekening te brengen. Ook bij de overblijvende gevallen [s s], [s x] en [x x] is het totale gewicht van de handtekening steeds gelijk aan 2.

Enige opmerkingen over notaties

Conways ‘signature notation’ is veel compacter dan die van mij. Hij laat alle haakjes en de letter ‘g’ weg. Voor mijn letters ‘s’ en ‘x’ gebruikt hij respectievelijk de symbolen * en x. Hij zet zijn handtekening in vette letters en cijfers. Zo luiden bijvoorbeeld mijn handtekeningen [g(2) s(2,2)] en [s x] bij hem **2*22** en *x.

Merk daarbij op dat Conway de ster (*) niet alleen gebruikt om rotatiecentra op spiegels aan te duiden, maar ook als scheidingstekens: elk getal *ervoor* heeft betrekking op rotatiecentra die *niet* op spiegels liggen terwijl elk getal *erna* rotatiecentra op spiegels aanduidt. Ik heb Conways notatie aangepast omdat ik denk dat beginners moeite hebben om alle subtiliteiten ervan op het eerste gezicht te doorgronden.

In Tabel 6 zet ik mijn notatie (JvdC) naast die van Conway (Con) en in Tabel 7, bij de strookpatronen en de behangpatronen, de notatie van de *International Tables for X-ray Crystallography* (Int). Voor eindige symmetriegroepen zet ik er ook de orde n van de symmetriegroep bij. Bij bolpatronen is het totale gewicht van een handtekening gelijk aan $2 - \frac{2}{n}$, en de lezer zal dit misschien nogmaals willen controleren.

Zie [1, p. 416] voor tabellen waarin Conways ‘signature notation’ voor de bolpatronen en de behangpatronen naast die van eerdere auteurs is gezet. 

Alle illustraties in dit artikel zijn van de hand van de auteur.

Referenties

- 1 John H. Conway, Heidi Burgiel en Chaim Goodman–Strauss, *The Symmetries of Things*, A.K. Peters, Ltd., Wellesley, Massachusetts, 2008.
- 2 H.S.M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, second edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1969.
- 3 L. Fejes Tóth, *Reguläre Figuren*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1965.