

In deze rubriek worden lezers door de redactie uitgenodigd te reageren op recent in dit blad verschenen artikelen.

Redacteur: Ferdinand Verhulst

derdewet@nieuwarchief.nl

Het onderstaande is een reactie op het artikel 'Wiskundige Verpoozingen' door Wieb Bosma uit het NAW-maartnummer van 2009.

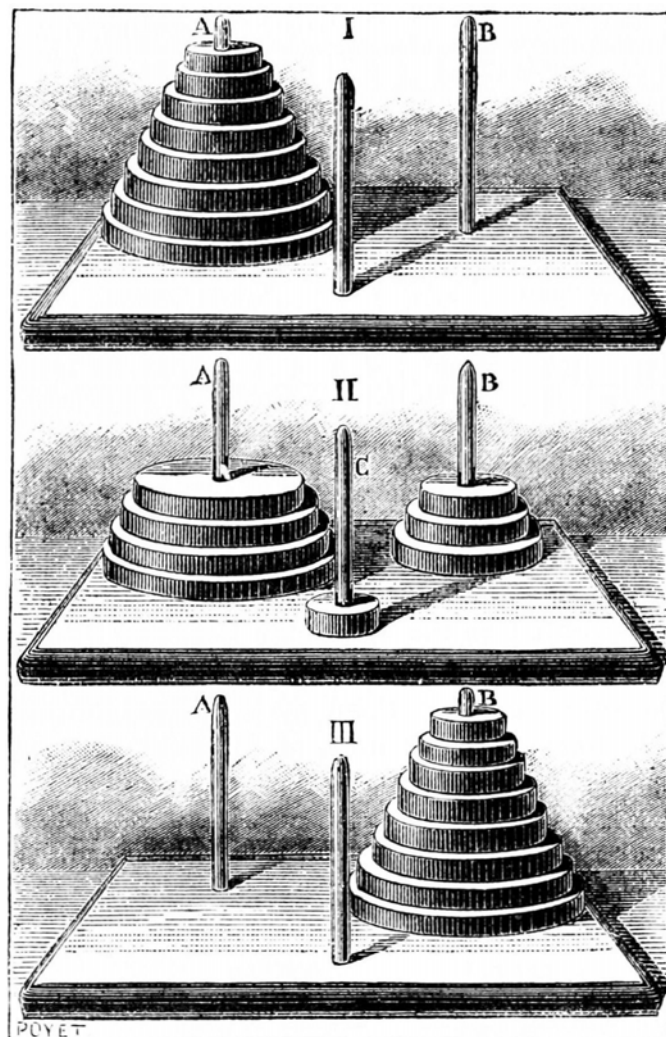
Tower of Hanoi

Wieb Bosma claims (in my interpretation of his Dutch) that a statement in my article [1] was 'nonsense'. It might be true that "generations of students of mathematics and computer science are nowadays taught algorithmic and recursive thinking" with the Tower of Hanoi, but obviously *not* mathematical thinking, "in particular for the question how many moves of discs are necessary" to transpose a complete tower. Although Schoute's mathematical analysis of the puzzle is one of the most valuable among the early papers on the subject, he, like almost all modern authors, fails to avoid in his 'bewijs' the unjustified use of an hypothesis, namely that the largest disc moves *directly* from the initial to the goal position in an optimal solution. This assumption, although provable for the classical task, is even false for the general problem to find a shortest solution when the initial and final states of the puzzle, i.e. legal distributions of the discs among the pegs, are prescribed arbitrarily. If Bosma had read further in my article, he would have found this discussion [1, p. 295] and a complete proof of minimality [1, p. 296] and thus could have avoided to write 'onzin'.

Andreas M. Hinz, Munich, Germany

Reference

- 1 Andreas M. Hinz, The Tower of Hanoi, *Enseign. Math.* (2) 35 (1989), 289–321.



Het onderstaande is een reactie op het artikel 'Hydrodynamische limieten en de pijl van de tijd' door Frank Redig uit het NAW-juninummer van 2011.

Boltzmann

Het artikel van Frank Redig heeft betrekking op de aloude vraag: Hoe kunnen de bewegingsvergelijkingen van moleculen van een gas tot toename van de entropie leiden? De bewegingsvergelijkingen zijn invariant voor tijd omkeer; om daaruit een niet-omkeerbaar verschijnsel af te leiden, moet er iets in gestopt worden. Dat heeft Boltzmann op de volgende manier gedaan.

Laat x staan voor de driedimensionale positie van een molecuul en p zijn snelheid. Laat $f_1(x, p; t)$ de verdeling van plaats en snelheid van de moleculen van een gas zijn ten tijde t . Laat de verdeling van de tweetallen moleculen $f_2(x, p; x', p'; t)$ zijn. Boltzmann stelde een vergelijking op die beschreef hoe f_1 met de tijd verandert ten gevolge van twee-deeltjes botsingen. Daarin treedt uiteraard f_2 op. Hij maakte de cruciale veronderstelling dat die vervangen kon worden door het product $f_1(x, p; t)f_1(x', p'; t)$.

Deze veronderstelling ('Stosszahlansatz') zegt dat twee botsende moleculen voor de botsing statistisch ongecorrleerd zijn. Na de botsing zijn ze uiteraard niet meer ongecorrleerd; dus de veronderstelling verbreekt de tijdsymmetrie. Dat opende de mogelijkheid om af te leiden dat de entropie in de tijd toeneemt.

Anderzijds is het duidelijk dat deze veronderstelling niet gelden kan als de deeltjes onderling een wisselwerking met lange afstand hebben. Inderdaad kan men met een eenvoudige berekening aantonen dat voor deeltjes met onderlinge zwaartekracht de uniforme verdeling niet stabiel is. Derhalve kan de entropiewet niet gelden voor deeltjes in de ruimte. De 'entropie van het heelal' is dus een zinloos begrip.

Het natuurkundige probleem is om deze cruciale Stosszahlansatz precies te formuleren en te begrijpen, zodat je weet wanneer en waarom die geldt. Dat is vereist als men de toename van de entropie als natuurkundig fenomeen wil verklaren. In het artikel van Redig wordt een stel voorbeelden van mathematisch vernuftig geconstrueerde stochastische processen gegeven, maar het is niet duidelijk wat daarmee aan het natuurkundige begrijpen bijgedragen wordt.

N.G. van Kampen, Utrecht

Reactie Frank Redig

De afleiding die Boltzmann zelf geeft van zijn vergelijking berust op de 'Stosszahlansatz'. Een wiskundig volledige afleiding van de Boltzmann-vergelijking zal dus ook het bewijs moeten geven van deze Stosszahlansatz. Helaas beschikken we slechts in beperkte mate over een dergelijke afleiding. De door Lanford gegeven afleiding is weliswaar rigoureus en bewijst de Stosszahlansatz, maar geldt enkel voor korte tijden of voor alle tijden in een lage dichtheidslimiet.

Een afleiding van de Boltzmann-vergelijking geeft bovendien nog niet noodzakelijk een afleiding van irreversibele hydrodynamische vergelijkingen zoals de diffusievergelijking. Hiervoor is een extra limiet nodig, of een aanname zoals lokaal evenwicht. Vervolgens is het niet meer duidelijk of men dan vertrekkend van de microdynamica *rechtstreeks* de diffusievergelijking kan afleiden.

Op de vraag wat vereenvoudigde stochastische modellen bijdragen aan natuurkundig begrijpen kan ik het volgende antwoorden:

- In de context van deze modellen kunnen we *rigoureuze* afleidingen geven van irreversibele macroscopische vergelijkingen zoals de diffusievergelijking. In het bijzonder wordt daarmee aangetoond dat microscopische reversibiliteit verenigbaar is met macroscopische irreversibiliteit. Er is dus geen fundamentele paradox (inderdaad

wist Boltzmann dit reeds). Cruciaal hierbij is het nemen van een macroscopische limiet. Zolang deze limiet niet genomen is, blijven we de effecten van reversibele microdynamica (zoals Poincaré-recurrenties) zien.

- De afleiding van de macroscopische vergelijking is *controleerbaar*. Bijvoorbeeld kan men de kans uitrekenen van trajecten die afwijken van de oplossing van de macrovergelijking. De entropiefunctie van dit principe van grote afwijkingen kan vervolgens gebruikt worden in niet-evenwichts-statistische mechanica (van dergelijke modellen).
- Recente resultaten voor coupled map lattices laten zien dat het *stochastische karakter* van de (karikaturale) microdynamica niet *noodzakelijk* is en kan vervangen worden door 'ruimte-tijd chaos'.

De stochastische dynamica's of modellen van coupled map lattices geven dus een 'eenvoudigere context' of 'karikatuur' (van de fysische werkelijkheid) waarin het probleem van de afleiding van macrovergelijkingen is opgelost. We mogen hopen dat de ontwikkelde technieken op dit 'oefenterrein' nuttig zijn voor afleidingen van macrovergelijkingen in een fysisch realistische context. De scepticus mag blijven opmerken dat dit nog te bezien valt.

