



### Discrete tomography for integer-valued functions

Arjen Stolk

Op 15 juni 2011 promoveerde Arjen Stolk aan de Universiteit Leiden op het proefschrift *Discrete tomography for integer-valued functions*, dat hij schreef onder begeleiding van prof. dr. Bas Edixhoven en copromotor prof. dr. Joost Batenburg (CWI en Universiteit van Antwerpen).

#### Discrete tomografie

Tomografie houdt zich bezig met het opbouwen van plaatjes aan de hand van afgeleide gegevens, projecties in vaktermen. Een bekende medische toepassing is de CT-scan, waarbij CT staat voor Computer Tomografie: vanuit verschillende hoeken worden röntgenfoto's van dwarsdoorsneden van het menselijk lichaam gemaakt. Uit al die beelden tezamen probeert men dan een goed beeld van de driedimensionale structuur te reconstrueren.

In discrete tomografie zijn de plaatjes discreet, vaak met vakjes op een rechthoekig rooster, die ieder 'aan' of 'uit' kunnen zijn. Een dergelijk plaatje kun je ook bekijken als een matrix van nullen en enen. Sta je in plaats daarvan gehele getallen in de matrix toe, dan kom je terecht bij de configuraties die Stolk in zijn onderzoek heeft bekeken.

#### Reconstructie, consistentie en uniciteit

Er zijn bij (klassen van) tomografieproblemen drie kernvragen: reconstructie, consistentie en uniciteit. Reconstructie is het daadwerkelijk uit de projecties terugvinden van de figuur of matrix, consistentie gaat om het herkennen aan de data of reconstructie mogelijk is en uniciteit ten slotte gaat om de vraag of er één of meerdere oplossingen of mogelijke reconstructies zijn.

Het grootste deel van het werk van Stolk betrof de consistentievraag. Denk hiervoor aan een rechthoekige matrix met gehele getallen. Van zo'n matrix kunnen de rij- en kolomsommen worden bepaald. Niet zomaar elk rijtje getallen kan de uitkomst van deze berekening van sommen zijn. Er is namelijk een relatie of afhankelijkheid tussen: wanneer de rijssommen bij elkaar op worden geteld, komt daar hetzelfde getal uit als wanneer de kolomsommen bij elkaar worden opgeteld.

#### Twee soorten afhankelijkheden

De situatie is interessanter wanneer ook sommen worden genomen over lijnen in andere richtingen. Bijvoorbeeld over de diagonalen, zoals in Figuur 1. Er zijn in zulke gevallen meer afhankelijkheden tussen de diverse lijnsommen en ze zijn vaak ook ingewikkelder van structuur. Er komen bijvoorbeeld lijnen uit drie of meer richtingen in voor, of niet alle lijnen in een richting hebben hetzelfde gewicht. Een belangrijk deel van Stolks onderzoek gaat over het beschrijven en berekenen van deze afhankelijkheden. Hij heeft twee stellingen bewezen die hier samen een compleet beeld van geven. De ene stelling beschrijft hoe de ruimte van afhankelijkheden opgebouwd is uit twee delen, de andere geeft een beschrijving voor een van die delen. Expliciteer: de afhan-

*Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht.*

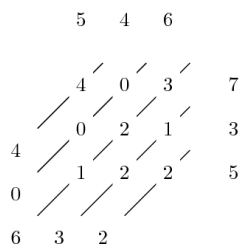
Redacteur: Geertje Hek

la Voie-du-Coin 7

1218 Grand-Saconnex

Zwitserland

verdediging@nieuwarchief.nl



kelijkheden vormen een vrije abelse groep van eindige rang, die te schrijven is als een directe som van twee ondergroepen. Deze twee ondergroepen komen overeen met de twee soorten relaties die al in 2001 beschreven werden door Hajdu en Tijdeman. Zij gaven ook typische voorbeelden voor beide soorten: (1) de som van de rijssommen is gelijk aan de som van de kolomsommen; (2) de twee lijnen die alleen door dit ene hoekpunt gaan hebben (dus) dezelfde lijnsom.

Hajdu en Tijdeman gaven ook een vermoeden voor de rang van beide ondergroepen. Birgit van Dalen construeerde vervolgens in haar masterscriptie afhankelijkheden van de tweede soort, precies zoveel als er volgens het vermoeden zouden moeten zijn. Stolk heeft nu de vermoede rangen bevestigd en een constructie gegeven voor een (redelijk kleine) voortbrengende verzameling voor de afhankelijkheden van de eerste soort.

Naast dit alles heeft hij ook een aantal resultaten bereikt op het gebied van uniciteit, vooral over het beschrijven van matrices met dezelfde lijnsommen. In de algebraïsche aanpak blijkt dit veel met de consistentie te maken te hebben.

### Veranderd van promotie-onderwerp

Halverwege zijn promotietijd is Stolk gewisseld van promotie-onderwerp. Hij vond het onderzoek waarop hij nu gepromoveerd is leuker, had er ook al meer resultaten in bereikt dan in zijn eigenlijke onderwerp (dat schoot totaal niet op) en het was op dat moment duidelijk dat er nog meer resultaten te behalen waren als hij echt de tijd zou nemen om zich op de discrete tomografie te focussen. Achteraf gezien een verstandige beslissing, maar op dat moment was er een grote drempel om die beslissing te nemen. Gelukkig heeft iedereen, ook zijn leidinggevenden binnen het Mathematisch Instituut, hem hierin volledig gesteund.

Bas Edixhoven was zijn promotiebegeleider, ook al bij het originele onderwerp. Stolk heeft altijd met veel plezier met hem samengewerkt. Achter een aantal belangrijke resultaten in zijn proefschrift zit een leuk algebraïsch-meetkundig idee dat ze samen hebben uitgewerkt.

Joost Batenburg is er als co-promotor bijgekomen toen Stolk veranderde van onderwerp. Alles wat hij over tomografie weet, heeft Stolk naar eigen zeggen van hem geleerd. Batenburgs inbreng was ook om de koppeling met de tomografie in de gaten te houden. Hij heeft veel relevante onderzoeksvragen aangedragen. Ook zorgde hij ervoor dat Stolk voldoende aandacht besteedde aan het presenteren van de resultaten op zo'n manier, dat de koppeling met tomografie voor meer mensen dan alleen hemzelf duidelijk was.

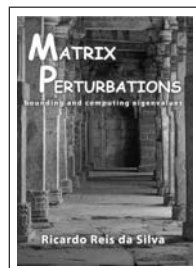
### Leuke wiskunde gewoon omdat het kan

Nieuwe wiskunde leren, dat vindt Stolk leuk en daar is tijdens de promotietijd een heleboel ruimte voor. Wat dat betreft was hij helemaal op zijn plek. Ook het begeleiden van werkcolleges heeft hij met veel plezier gedaan en hij heeft veel geleerd van het mede-organiseren van het studentenseminarium. De mooiste herinnering bewaart hij aan gesprek-

ken die hij voerde met Hendrik Lenstra over zijn promotie-onderwerp. Het fundament voor zijn proefschrift is toen gelegd. Ze hebben samen een paar lange middagen in Lenstra's werkkamer krijtborden vol wiskunde geproduceerd. De ervaring om op zo'n manier met je vak bezig te zijn, in samenwerking met een van zijn grootheden, vond Stolk erg bijzonder.

Hoewel hij ook heel plezierig heeft samengewerkt met zijn begeleiders, heeft hij deze gesprekken met Lenstra anders ervaren. Juist ook omdat het hier niet ging om begeleiding, maar om leuke-(nieuwe)-wiskunde-gewoon-omdat-het-kan.

Ondanks zijn positieve ervaringen heeft Stolk niet gekozen voor een vervolg in de wiskunde. Sinds september 2010, toen zijn aanstelling als promovendus afliep, werkt hij als softwareontwikkelaar bij TOPdesk in Delft. Het bevalt hem daar erg goed. Zijn huidige werk is niet echt gerelateerd aan zijn promotieonderzoek, maar hij heeft er zeker wel veel profijt van. ←



### Matrix Perturbations, bounding and computing eigenvalues

Ricardo Reis da Silva

Originally from Portugal, Ricardo Reis da Silva came to Utrecht in 2005, to do his master studies. He continued as a Ph.D. student at the University of Amsterdam. Despite the natural ups and downs, he has enjoyed his time in the Netherlands. "The country has a good research and academic environment and I was fortunate enough to work alongside some of the top researchers in my area." He felt very welcome, both at the Mathematics Department in Utrecht as an international student as well as at the Korteweg-de Vries Institute in Amsterdam as a Ph.D. candidate. But more important than the particular place or the particular work he did, was the global experience of living abroad.

This episode abroad surely did not match his expectations. Strikingly however, precisely the many unexpected things he encountered, made the whole experience so valuable for Reis da Silva.

### Matrix and eigenvalue perturbations

On June 10th, 2011, Reis da Silva successfully defended his Ph.D. thesis *Matrix Perturbations, bounding and computing eigenvalues*, written under guidance of dr. Jan Brandts and prof. dr. Rob Stevenson at the Universiteit van Amsterdam. His thesis belongs to the areas of linear algebra and numerical linear algebra and its contents are divided into two parts covering two distinct though related topics.

The first part is on matrix and eigenvalue perturbation theory. In this part he studies amongst others Hermitian rank- $k$  perturbations of Hermitian matrices and their eigenvalues. The study of such matrices and perturbations has a background in numerical methods for partial differential equations. For instance, the finite difference discretization of certain reaction-diffusion differential equations yields a standard

positive definite Hermitian tridiagonal matrix resulting from the diffusion part. This discretization can also lead to a rank- $k$  Hermitian matrix resulting from the reaction part, which can be seen as a perturbation of the diffusion Hermitian matrix. The study of matrix perturbations is, however, also relevant for the analysis of iterative methods for eigenvalue problems.

For Hermitian perturbations of Hermitian matrices much is known about the relative position of the eigenvalues after perturbation. The results follow from the variational characterisation of the eigenvalues given by the Courant–Fischer theorem, from Weyl's inequalities bounding the eigenvalues of the resulting matrix by those of the original and the perturbation matrices, and to some extent also from the Cauchy Interlace Theorem on the interlacing property between the eigenvalues of a matrix and of its  $n - 1$  principal submatrix. These are all well known and useful results for Hermitian matrices.

For Hermitian rank- $k$  perturbations of Hermitian matrices, Reis da Silva developed Weyl-type bounds for the eigenvalues, that are tighter than Weyl's classical bounds while the additional computational costs are very modest. He then used the same technique to obtain bounds for the eigenvalues of arrowhead matrices (square matrix whose entries are all zero except for the diagonal and the first row and column) and for the singular values of perturbed rectangular matrices.

### Normality preserving perturbations

For normal matrices much less is known than for Hermitian matrices. For example, given two normal matrices  $A$  and  $E$ , it is still not fully understood under which conditions  $A + E$  is also normal. In chapter 3 of his thesis, Reis da Silva makes inroads in that direction. He studies normality preserving perturbations and augmentations of normal matrices and their consequences to the eigenvalues. Ikramov and Elsner had studied normality preserving augmentations (adding additional rows and columns) of normal matrices before, but nothing was known about their impact on the eigenvalues. In Reis da Silva's thesis it is shown how the eigenvalues of the original matrix are influenced by the augmentation, and moreover, bounds for them are found. Next, normality preserving normal perturbations are studied. For  $2 \times 2$  and for rank-one matrices, the analysis is now complete. For higher rank, all essentially Hermitian (normal matrices with collinear eigenvalues) normality preserving perturbations are described. And finally, using the stratification of normal matrices presented by Huhtanen in 2001, Reis da Silva constructed all augmentations that result in normal matrices with eigenvalues on a quadratic curve in the complex plane.

In his opinion, these results on perturbations of normal matrices are his most interesting results. They appear to resemble those we know for Hermitian matrices and will hopefully motivate others to look more closely into perturbations of normal matrices.

### Analysis of a method developed by chemists

Part two of the thesis focuses on iterative methods for eigenvalue problems and, in particular, on the analysis of a somewhat unknown

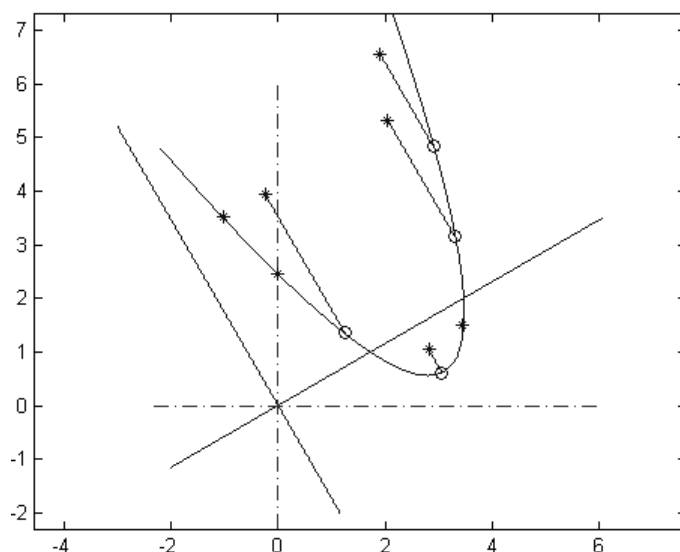


Illustration of the augmentation of a normal matrix  $A$  with three of the seven eigenvalues (indicated by the stars) on the quadratic curve  $C$  onto a normal matrix with all eigenvalues in  $C$ .

method, the Subspace Projected Approximate Matrix method. This method was developed by chemists and is a relatively recent (2001) iterative method for eigenvalue problems. The introduction of the method and the first results of numerical experiments for chemical applications were promising. However, the method had not yet been analysed from a numerical linear algebra point of view and it was mostly tested in comparison with Davidson's method. It was, thus, unclear whether it could serve as an alternative to well-known methods like Jacobi–Davidson or Lanczos. In Reis da Silva's thesis it is shown that, although for certain choices of the preconditioner SPAM is mathematically equivalent to Lanczos method, it is not a strong alternative to Jacobi–Davidson.

### The next step

Reis da Silva enjoyed being a Ph.D. candidate. He especially found the combination of learning and being responsible for his own learning process valuable. He also welcomed the additional responsibilities such as teaching. There were several ups and downs during his Ph.D. time. About halfway his four years he faced a hard time. He suddenly realised that the time ahead was shorter than the time already spent on the research, while his actual results were not half of what would be needed in the end. Other Ph.D. candidates had shared similar experiences with him, but it was still quite a shock to actually go through this period. The climax of his time at the UvA was indeed to have sent the manuscript to the printer. Just after his thesis defence, he had not yet in mind what would be the next step in his career. But for a while at least he wants to take some distance from doing research and try something different. And after almost six years in the Netherlands he also thinks it is time to move to another (hopefully warmer) location.