

Daan van Smaalen

Faculteit Gedragwetenschappen
Universiteit Twente
Postbus 217
7500 AE Enschede
d.vansmaalen@utwente.nl

Onderwijs De Wageningse Methode

Idealistische wiskundedocenten ontwikkelen een eigen methode

Voor docenten die op zoek zijn naar wiskundeonderwijs waarin geen genoegen wordt genomen met het aanleren van manieren, is de Wageningse Methode een uitkomst. De opgaven zijn geen stapelopgaven (elkaar opvolgende onderdelen), maar doeopdrachten met een wiskundig puzzelkarakter. De Wageningse Methode bestrijkt, in tegenstelling tot de meest gebruikte methode Getal en Ruimte, de iets minder gebruikte methode Moderne Wiskunde en de nog minder gebruikte methode Netwerk, een minimaal deel van de wiskundeonderwijsmarkt. De auteurs zijn niet uit op winstbejag. Verschillende materialen zijn vrij toegankelijk op het internet. Het is de moeite waard deze idealistische benadering meer bekendheid te geven. Daan van Smaalen, een jonge auteur, licht een tipje van de sluier op. Als docent maakte hij kennis met de Wageningse Methode. Het was liefde op het eerste gezicht. Sinds 2005 is Daan van Smaalen actief betrokken bij Stichting de Wageningse Methode.

Het wiskundeonderwijs op de middelbare school is de laatste veertig jaar enorm veranderd. Het begon in 1968 met de invoering van de Mammoetwet, wat onder andere resulteerde in een nieuw leerplan voor wiskunde. De lesstof in de methoden voor het voortgezet onderwijs werd destijds onder invloed van 'New Math' geformuleerd in de gedachte-wereld en de taal van de volwassen wiskundige. De wiskunde werd abstract en formeel gebracht. De leerboeken waren niet geschreven voor zelfstandig leren. Integendeel, het merendeel van de leerlingen was volkomen afhankelijk van de docent. De docent kon de leerboeken lezen en wist wat de bedoeling was. Dit resulteerde in voornamelijk klassikaal gegeven lessen volgens het model voordoen (door de docent) – nadoen (door de leerling).

Het ontstaan van de Wageningse Methode

De wiskundedocenten van het Wagenings Lyceum (tegenwoordig RSG Pantarijn) vonden dat het anders moest en voegden in 1973 de daad bij het woord. Ze begonnen met het schrijven van lesmateriaal voor hun eigen leerlingen. Daarbij hanteerden ze de volgende uitgangspunten:

- de geboden wiskunde moet zinvol zijn;
- wiskunde is een aantrekkelijk en goed te begrijpen vak;
- leerlingen kunnen veel (mits ze goed worden aangesproken).

(Veertig jaar later zijn deze drie beginselen nog steeds belangrijke uitgangspunten voor de schrijvers van *de Wageningse Methode*.)

De wiskundesectie van het Wagenings Lyceum begon met het vervangen van hoofdstukken door werkbladen, daarbij gesteund

door de schoolleiding. Elke week hadden de wiskundeleraren een gemeenschappelijk tussenuur waarin ervaringen werden besproken, waarna het lesmateriaal (vaak in meerdere rondes) werd bijgeschaafd. Het maken van de materialen gebeurde door het 'schrijversteam', een viertal docenten in wisselende samenstelling. Zodoende was de hele sectie betrokken bij het project. Doordat met losse werkbladen werd gewerkt, kon het lesmateriaal stukje bij beetje worden ontwikkeld. De



Figuur 1 Een werkboekje voor de eerste klas. In dit werkboekje uit 1982 maken de leerlingen uit de eerste klas kennis met wiskunde.

wiskundesectie van het Wageningse Lyceum ontwierp zo langzaam maar zeker een eigen wiskundemethode, een die niet achter het bureau werd geschreven, maar in de klas. Een school die haar eigen methode schrijft dat was uniek in Nederland! (Nog steeds is het zeer zeldzaam in Nederland dat een school haar eigen wiskundemethode ontwikkelt. Er zijn recent enkele initiatieven, zoals *Wiskunde zonder Boek*, waarmee op dit momenteel wordt lesgegeven in de eerste en tweede klassen van havo en vwo, en het boek voor de eerste klas van het Barlaeus Gymnasium.)

Bij het ontwikkelen van het lesmateriaal werden de docenten van het Wageningse Lyceum ondersteund door het IOWO te Utrecht (tegenwoordig Freudenthal Instituut). De medewerkers van dit instituut hadden namelijk dezelfde visie over hoe onderwijs gegeven dient te worden: aansluiten bij de belevingswereld van het kind en wiskunde als menselijke activiteit. De sectie van het Wageningse Lyceum heeft in samenwerking met medewerkers van het IOWO als eerste een complete lesmethode voor de onderbouw ontwikkeld die is gebaseerd op de uitgangspunten van het realistisch wiskundeonderwijs. Op deze wijze hebben de wiskundedocenten van het Wageningse Lyceum de veranderingen in het Nederlandse wiskundeonderwijs mede vormgegeven.

In eerste instantie werden de materialen voor eigen lessen geschreven: zó wilden de docenten van het Wageningse Lyceum lesgeven. Door persoonlijke contacten raakten andere scholen geïnteresseerd en gingen collega's van deze scholen meeschrijven. Binnen jaren tachtig waren de lesmaterialen voor de onderbouw havo/vwo af. In een dertigtal werkboekjes werd de stof van de eerste drie leerjaren behandeld. Omdat meerdere

scholen belangstelling hadden voor de werkboekjes, werd op 28 november 1984 Stichting de Wageningse Methode opgericht. Mede dankzij een bevriende drukker die bereid was de materialen onder gunstige voorwaarden te drukken, kon de stichting haar werkboekjes tegen een lage prijs rechtstreeks aan de scholen leveren. In deze tijd werd ook begonnen met het schrijven van lesmaterialen voor de bovenbouw van havo en vwo. Daarbij heeft *de Wageningse Methode* ook dankbaar gebruik gemaakt van de ideeën en teksten van het IOWO/Freudenthal Instituut. Het resultaat: een complete leerlijn voor zowel havo als vwo. Naast aantrekkelijk geprijsde boeken, beschikt *de Wageningse Methode* ook over lesondersteunende materialen — antwoorden, werkbladen, zelftoetsen, proefwerken, handleidingen, lessuggesties en digitaal lesmateriaal — welke de stichting gratis aan haar gebruikers verstrekt.

Kenmerken van de Wageningse Methode

De bestaansreden van *de Wageningse Methode* is de afgelopen dertig jaar gewijzigd. In 1973 begonnen de docenten van het Wageningse Lyceum vanwege een didactische reden eigen lesmateriaal te schrijven: dichterbij de leerling. Wat dat betreft is *de Wageningse Methode* allang niet meer uniek. Tegenwoordig onderscheidt de methode zich doordat zij steeds weer een beroep op inzicht doet. *De Wageningse Methode* wil per se dat de leerlingen begrijpen wat ze doen. Andere methoden proberen natuurlijk ook de wiskunde uit te leggen, maar grijpen veel eerder naar een werkschema of algoritme.

De Wageningse Methode is klein. Er zijn ongeveer twintig scholen die de methode gebruiken. Ook de schrijversgroep is klein. Het

is dan ook hard werken om de methode bij te houden. Dat gaat alleen met een behoorlijke portie idealisme: *de Wageningse Methode* wil van het vak wiskunde iets moois maken. Wiskundesecties die gebruik maken van *de Wageningse Methode* kiezen bewust voor lesmateriaal dat opvallend anders is. De methode onderscheidt zich namelijk op een aantal punten.

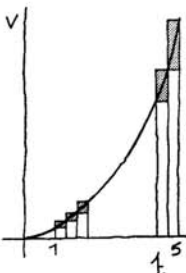
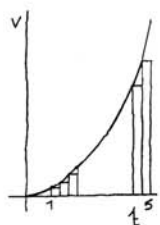
Bij *de Wageningse Methode* staat begrip voorop. Een constructie of berekeningswijze behoort voor de leerling niet correct te zijn omdat het in het boek staat, maar omdat de leerling zelf vindt dat deze juist is. *De Wageningse Methode* is geen voorstander van het klakkeloos toepassen van aangeleerde, maar niet begrepen technieken. Het devies is: liever helemaal geen wiskunde dan onbegrepen routines. (Dit betekent overigens niet dat leerlingen bijvoorbeeld geen vergelijkingen leren oplossen.) Dit heeft tot gevolg dat het wiskundige niveau van de methode relatief hoog is. *De Wageningse Methode* is zodoende een methode voor scholen die inzichtelijk leren belangrijk vinden en een intellectuele uitdaging aan durven gaan.

In *de Wageningse Methode* staat zelf ontdekken centraal. Daarom is in de methode een geringe hoeveelheid uitgewerkte theorie en voorbeelden opgenomen. Daarentegen leidt de leerling via opgaven zelf de wiskundige theorie af, daarbij gestuurd en ondersteund door de docent. De methode veronderstelt derhalve een actieve, zelfstandige werkhouding van de leerlingen en creëert ruimte voor eigen ideeën en een eigen aanpak. In *de Wageningse Methode* zijn theorie en oefening geïntegreerd verwerkt. Zo is met de indeling, theorie gevolgd door rijtjes opgaven, volledig gebroken en wordt techniek ingeoefend door deze steeds weer in allerlei situaties te laten uitvoeren. Rijtjes met opgaven van dezelfde soort, zonder iets verrassends, zonder iets nieuws, komen in *de Wageningse Methode* nauwelijks voor. Er is voor deze leervorm gekozen omdat ons inziens eigen wiskundige activiteiten beter beklijven dan de didactische aanpak van uitleggen, voordoen en na-doen.

De Wageningse Methode spreekt leerlingen aan op hun eigen niveau en zorgt voor voldoende uitdaging: uitblinken mag. Met name in de leerjaren één, twee en drie kunnen de verschillen tussen de leerlingen in een klas groot zijn. Door in de onderbouwboeken gebruik te maken van een opzet met twee stromen, kunnen leerlingen en docenten zelf kiezen op welk niveau ze willen werken. Zodoende blijft differentiatie niet beperkt tot de laat-



Figuur 2 Eerste opgave uit het hoofdstuk Pythagoras voor de tweede klas. De leerlingen maken door middel van legpuzzels kennis met de stelling van Pythagoras. Later in het hoofdstuk wordt de tweede puzzel gebruikt bij het bewijs. De legpuzzels activeren de leerlingen en vormen een startpunt voor inzichtelijk leren in dit hoofdstuk.



G.F.B. Riemann
1826-1866

2 Een auto trekt op

Een auto trekt op als het licht op groen springt. Na t seconden is zijn snelheid $v(t) = t^2$ meter.

We willen weten hoeveel meter de auto tijdens het tijdsinterval $[1,5]$ aflegt. Daarvoor moeten we de oppervlakte onder de grafiek van v tussen $t=1$ en $t=5$ berekenen. We kunnen deze oppervlakte benaderen met een ondersom en een bovensom van bijvoorbeeld 20 rechthoeken. Zie plaatje.

Daarvoor verdelen we het interval $[1,5]$ in 20 *gelijke* stukken. Inclusief het beginpunt 1 en het eindpunt 5 van het interval geeft dat 21 verdeelpunten.

a. Wat is de afstand Δt tussen twee opeenvolgende verdeelpunten?

De verdeelpunten noemen we van links af:

$$t_0, t_1, \dots, t_{19}, t_{20}.$$

$$\text{Dus } t_0 = 1, t_1 = 1\frac{1}{5}, \dots, t_{20} = 5.$$

b. Wat is t_7 en wat is t_k (uitdrukken in k)?

De rechthoeken in de ondersom en in de bovensom zijn met 1, 2, ..., 20 genummerd. De hoogtes van de rechthoeken van de bovensom zijn: $(1\frac{1}{5})^2, (1\frac{2}{5})^2, \dots, 5^2$.

c. Wat is de hoogte van de 7^{de} rechthoek in de bovensom?

Wat is de hoogte van de 7^{de} rechthoek in de ondersom?

Ga na dat de k^{de} rechthoek in de bovensom hoogte $v(t_k)$ heeft en de k^{de} rechthoek in de ondersom $v(t_{k-1})$.

De ondersom is dus: $\text{sum}(\text{seq}(1/5(1+K/5)^2, K, 0, 19, 1))$.

d. Geef een soortgelijke formule voor de bovensom.

e. Bereken de ondersom en de bovensom met de GR.

f. Hoe groot is het verschil tussen de onder- en de bovensom?

g. Verklaar met het plaatje hiernaast, dat het verschil tussen de onder- en bovensom precies $(v(5) - v(1))\Delta t$ is. Klopt dat met je antwoord in f?

Om de oppervlakte van de grafiek tussen 1 en 5 nauwkeuriger te bepalen, kun je een fijnere verdeling van rechthoeken nemen. Het verschil tussen de ondersom en de bovensom is weer: $(v(5) - v(1))\Delta t$.

h. Wat is het verschil tussen de onder- en bovensom als je het interval $[1,5]$ in 100 gelijke stukken verdeelt?

i. In hoeveel gelijke stukken moet je het interval $[1,5]$ verdelen om zeker te weten dat de exacte oppervlakte minder dan 0,001 verschilt van de gevonden onder- en bovensom?

Je kunt het verschil tussen ondersom en bovensom zo klein maken als je maar wilt.

De oppervlakte onder de grafiek van v tussen 1 en 5 is de *grenswaarde* of *limiet* van de ondersom (en van de bovensom) bij een steeds fijnere verdeling.

Om de oppervlakte onder de grafiek te bepalen is het niet noodzakelijk een regelmatige verdeling te nemen. Het doet er ook niet toe of je de grenswaarde van de boven- of ondersom neemt. We spreken - dit alles in het midden latend - over (de grenswaarde van) een **Riemansom**. De methode om de oppervlakte onder de grafiek met een steeds fijnere verdeling van rechthoeken te benaderen is afkomstig van de Duitse wiskundige Bernhard Riemann.

gerond. *De Wageningse Methode* vraagt de nodige toewijding van leraren en is daardoor geen methode voor gemakzuchtige docenten. Samenvattend kan worden gesteld dat de methode hoog inzet, zowel voor leerlingen als voor docenten.

De toekomst voor de Wageningse Methode

Begonnen begin jaren zeventig de docenten van het Wageningse Lyceum met het schrijven van lesmateriaal dat delen van het boek verving, anno 2011 is *de Wageningse Methode* opnieuw bezig met het ontwikkelen van leermiddelen 'buiten het boekje'. Aanleiding hiervoor zijn de ervaringen van de auteurs met het testen van nieuw lesmateriaal. Daaruit blijkt dat opdrachten die niet in het boek staan de sleur van alledag doorbreken en dat leerlingen veelal intensief en met plezier aan dit soort opdrachten 'buiten het boekje' werken, waardoor zij meer betrokken zijn bij de les(stof). Opdrachten 'buiten het boekje' veranderen zodoende het karakter van de wiskundeles, iets wat *de Wageningse Methode* belangrijk vindt. Maar hoe kom je als docent nu aan zulke opdrachten? Het maken van opdrachten 'buiten het boekje' is immers tijdrovend en niet voor alle docenten weggelegd. *De Wageningse Methode* heeft daarom besloten om 'lessuggesties' te ontwikkelen. Dit zijn concreet uitgewerkte opdrachten die de docent zo kan inzetten in zijn of haar les, maar ook kan bewerken naar zijn of haar eigen smaak. Sommige lessuggesties hebben een creatief aspect: leerlingen hebben verschillende eindproducten. Andere lessuggesties hebben het karakter van een onderzoek, een wedstrijd, een modelleerprobleem of een puzzel. Lessuggesties belichten waar mogelijk andere aspecten van wiskunde, zoals historie, taal of toepassing in kunst of techniek. Sommige lessuggesties leggen dwarsverbanden tussen onderwerpen uit de schoolwiskunde. Andere zijn niet zozeer gebonden aan een hoofdstuk en kunnen het hele jaar door ingezet worden. We hopen dat lessuggesties zullen bijdragen aan uitdagend, activerend en motiverend wiskundeonderwijs.

De Wageningse Methode levert al geruime tijd digitaal lesmateriaal bij haar boeken. Dit startte met in MS-DOS werkende programma's, zoals Basisvorming en Fundamenten algebra. (Een aantal van deze programma's is herschreven zodat ze op een Windows computer kunnen worden gebruikt. Deze programma's zijn gratis van de website van *de Wageningse Methode* te downloaden.) Met de intrede van internet in het onderwijs zijn tal van nieuwe mogelijkheden ontstaan. Binnen

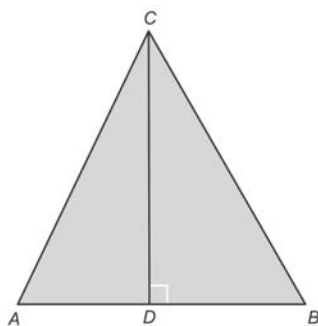
Figuur 3 Uit het hoofdstuk De integraal voor de zesde klas (vwo, wiskunde B). In deze opgave staan de kenmerken zelf ontdekken en begrip centraal.

ste bladzijden van een hoofdstuk, maar wordt differentiatie in het gehele hoofdstuk mogelijk gemaakt.

Bij *de Wageningse Methode* neemt de wiskundeleraar als begeleider en vakexpert een belangrijke plaats in binnen het leerproces. Zo is het de docent die overzicht aanbrengt, verbanden legt, enthousiasmeert en leerlingen ondersteunt, motiveert en helpt te reflecteren op het eigen leerproces. (Zo is *de Wa*

geningse Methode van mening dat leerlingen af en toe op problemen móéten stuiten. Alleen dan kan een leerling echte vorderingen maken. De docent is er dan om het zetje te geven dat nodig is om de hobbels te nemen.) De leraar moet het leerproces sturen en bovenal afronden. Zonder de docent hebben de leerlingen aan het eind van een hoofdstuk weliswaar alle opgaven gemaakt, maar blijft de lesstof voor de meesten van hen vaag en onaf-

- 46 In driehoek ABC geldt: $\angle A = 65^\circ$ en $\angle B = 60^\circ$. CD verdeelt driehoek ABC in twee driehoeken. De twee hoeken bij D zijn elk 90° .



Bereken $\angle ACD$ en $\angle BCD$.
Hoe kun je dit laatste antwoord in driehoek ABC controleren?

- 46 a In een driehoek verhouden zich de hoeken als $1 : 2 : 3$. Hoe groot zijn de hoeken?
b In een driehoek is de grootste hoek 15° groter dan de middelste hoek en is de kleinste hoek 15° kleiner dan de middelste hoek. Hoe groot zijn de hoeken?

Figuur 4 Differentiatie in de onderbouwboeken van *de Wageningse Methode*. Door middel van een opzet met twee stromen krijgen leerlingen en docenten de keus op welk niveau ze willen werken.

PATRONEN MAKEN

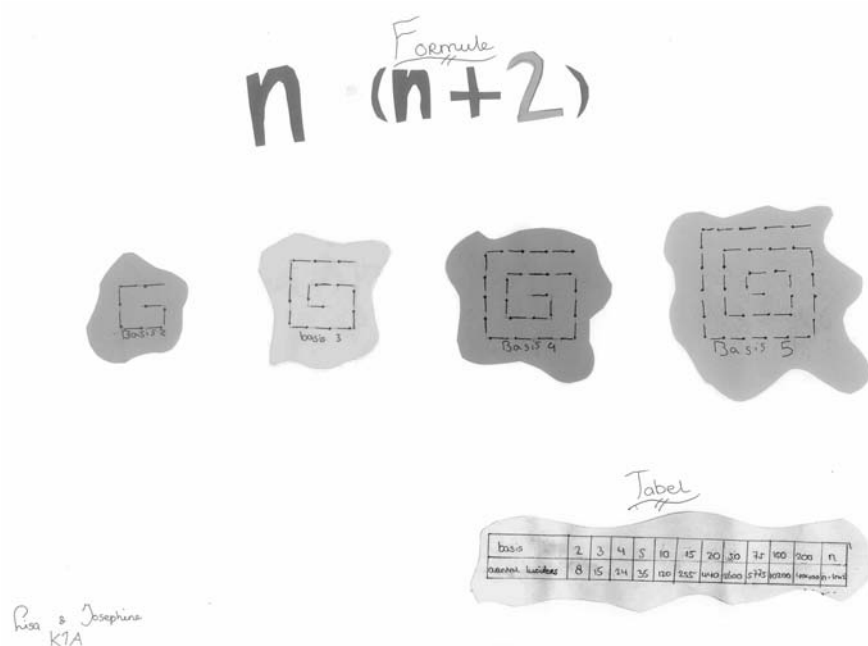
In paragraaf 1 heb je gezien hoe je met stippen, vierkantjes, lucifers en blokjes patronen kunt vormen. Je gaat nu zelf een patroon ontwerpen en de bijbehorende formule opstellen.

Wat moet je doen?

- Je tekent de eerste vier figuren van jouw patroon.
- Je maakt een tabel bij het patroon.
- Je bedenkt een formule die past bij het patroon.

Lever het resultaat in bij je docent.

Figuur 5 Voorbeeld van een lessuggestie. De lessuggestie 'Patronen maken' hoort bij het hoofdstuk Formules uit de eerste klas. Middels deze lessuggestie oefenen leerlingen met het opstellen van formules. Aangezien het patroon niet gegeven is maar door leerlingen zelf verzonden moet worden, wordt het beeld dat leerlingen van regelmaat hebben verder ontwikkeld.



Figuur 6 Voorbeeld van een eindproduct. Op de foto staat van een tweetal brugklasleerlingen het eindproduct behorend bij de lessuggestie 'Patronen maken'. In het patroon komen fraai de driehoeksgetallen terug.

het wiskundeonderwijs wordt hiervan gretig gebruik gemaakt. Met name het Freudenthal Instituut heeft met *WisWeb* en *RekenWeb* vernieuwend werk verricht op het gebied van digitaal wiskundeonderwijs. *De Wageningse Methode* heeft echter niet stilgezetten waar het digitalisering betreft. Zo zijn diverse schrijvers van de methode actief betrokken geweest bij de ontwikkeling van *Ratio*, een interactieve en uitdagende wiskundemethode voor de eerste en tweede klas van het vwo. Binnen dit project is ervaring opgedaan met (het ontwerpen van) interactief lesmateriaal. Recent heeft *de Wageningse Methode* het beheer van *Ratio* op zich genomen zodat de interactieve lesmaterialen van *Ratio* niet verloren gaan, maar verder ontwikkeld kunnen worden. Hiertoe is *de Wageningse Methode* gestart met het ontwerpen van interactief lesmateriaal voor de derde klas. Daarnaast participeert de methode in het open leermiddelenproject dat is geïnitieerd door de VO-raad. De lesmaterialen voor de eerste klas zijn daarom vrij toegankelijk via internet. (Het lesmateriaal voor de eerste klas staat zowel op *Wikiwijs* als op de website van *de Wageningse Methode*.) Zodoende is de methode betrokken bij de ontwikkelingen die plaatsvinden op technologisch gebied.

Tot slot

De Wageningse Methode heeft enkele nieuwe, jonge auteurs gevonden. Samen met de oude garde hebben zij de afgelopen jaren het lesmateriaal voor de onderbouw onder handen genomen en werken zij momenteel aan de ontwikkeling van lessuggesties en digitaal lesmateriaal. Deze combinatie van jong en oud lijkt een goede mix om een bijdrage te leveren aan het toekomstige wiskundeonderwijs in Nederland. *De Wageningse Methode* beschikt over veel hoogwaardig lesmateriaal waarmee prima wiskundeonderwijs kan worden verzorgd, nu en in de toekomst.

Meer informatie

Meer informatie over *de Wageningse Methode* is te vinden op www.wageningse-methode.nl. Op de website staan onder andere de lesmaterialen voor de eerste klas, de lessuggesties en de hoofdstukken voor wiskunde D (zowel voor havo als vwo).

Dankwoord

Bij het schrijven van dit artikel heb ik dankbaar gebruik gemaakt van de op- en aanmerkingen van Leon van den Broek en Dolf van den Hombergh, beide medewerkers van het eerste uur.