

## Rob van Oord

Coenecoopcollege  
Dreef 2, 2741 SR  
Waddinxveen  
robvanoord@tiscali.nl

### Evenement 17de Nationale Wiskunde Dagen

# Tijdloos en cultuuroverstijgend

Eind januari vonden in Noordwijkerhout voor de zeventiende keer de Nationale Wiskunde Dagen (NWD) plaats. Dit door het Freudenthal Instituut georganiseerde evenement is bedoeld voor wiskundeleraren uit het voortgezet onderwijs. Zij kunnen hier ideeën opdoen en creatief en actief met hun vak bezig zijn. Docent Rob van Oord doet verslag van hoe hij met de wiskunde de wereld rond ging.

Ook dit jaar was er op de NWD een rijk aanbod van lezingen en workshops. Over toepassingen van wiskunde bij stromingen, bij energie en in de fabriek. Ook veel over meetkunde, zowel over grote syntheses, waaronder de elementen van Euclides, als over gebruik in Islamitische mozaïeken, moirékunst en 3D-tv. Verrassend is een serie workshops over hoe wiskunde in verschillende landen wordt onderwezen. En dan zijn er de workshops met onderwerpen die direct toepasbaar zijn in de les: analytische meetkunde voor vwo wiskunde B, een module speltheorie voor wiskunde D en een uitje naar het Museum Boerhaave. Verder lezingen over coryfeeën uit de wiskunde en het wiskundeonderwijs die vorig jaar zijn overleden, Benoit Mandelbrot en Pierre van Hiele. Op de website [www.fi.uu.nl/nwd](http://www.fi.uu.nl/nwd) zijn van de meeste workshops de handouts en presentaties te vinden. Echt de moeite waard om daar eens wat van te bekijken. Ook al was je niet zelf op de NWD.

Professor Fokkema van de TU Delft opende de NWD met het motto 'door meten tot weten'. Wat kun je anders verwachten van iemand uit Delft. Fokkema gaf ons een kijkje in zijn specialiteit, het opsporen van aardolie en aardgas in lagen diep onder de zeebodem, door seismografie. Een valkuil is een a priori model te hanteren, waardoor je alleen de informatie krijgt die je zoekt, en misschien net niet wat je zou willen krijgen. Fokkema vat het kort samen: wetenschap is het stellen van de

juiste vraag. Daar kun je niet vroeg genoeg mee beginnen. Hij sprak dan ook vol lof over de LEGO-dag in Delft waar bij jonge onderzoekertjes al de fascinatie voor de wetenschap begint.

#### Origami

Op de startlezing door Philippe Cara over origami verheugde ik mij het meest. Veelbelovend lagen er enkele vierkante vouwblaadjes

op onze stoelen. Verrassend was zijn betoog. Op een van de eerste dia's stond een getekende kraanvogel. Die tekening deed me denken aan mijn eerste Chinese vouwboek, gekregen van mijn moeder toen ik op 11-jarige leeftijd met een hersenschudding 14 dagen op bed moest blijven. Ik heb het boek nog steeds en origami heeft me nooit meer losgelaten. Philippe liet enkele belangrijke toepassingen van vouwen zien, waaronder airbags en ingenieus opgevouwen buisjes die in opgevouwen toestand in aderen worden gebracht om ze daar, eenmaal op hun plek, te kunnen uitvouwen. Na de inleiding werden we aan het werk gezet. Cara liet ons ontdekken hoe we breuken kunnen vouwen.



Philippe Cara

Eerst werd er uitgelegd hoe je met zo min mogelijk vouwen een strook van een breukdeel van een vouwblaadje met als noemer een macht van 2 kan vouwen. Een voorbeeld: de binaire 'decimale' schrijfwijze van  $\frac{5}{8}$  is 0,101. Dit kun je begrijpen als je bedenkt dat

$$\frac{5}{8} = 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}.$$

Zo is

$$\begin{aligned} \frac{25}{32} &= 0,11001 \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} \left( 0 + \frac{1}{2} \left( 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 \right) \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Om een strook van  $\frac{25}{32}$  van een blaadje te vouwen moet je de enen en nullen van rechts naar links lezen, dus in volgorde 1-0-0-1-1. Voor elke 1 vouw je de onderrand van het vouwblaadje naar de laatst gemaakte vouw, voor elke 0 vouw je de bovenrand naar de laatst gemaakte vouw. De eerste vouw is altijd gewoon dubbelvouwen. Het deel van de bovenrand tot de laatste vouw is dan de gevraagde breuk. Zo kun je elke breuk met noemer  $2^n$  in precies  $n$  keer vouwen krijgen. Je had natuurlijk ook het blaadje eerst net zo vaak kunnen vouwen tot je allemaal strookjes van  $\frac{1}{32}$  hebt, eerst dubbel (=  $1 \times$  vouwen), dan de beide helften dubbel (=  $2 \times$  vouwen) tot 4 kwarten, dan elke kwart halveren (=  $4 \times$  vouwen), en zo door tot 32-sten. Dat vraagt in totaal  $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31 \times$  vouwen. Dan tel je 25 strookjes, en je hebt  $\frac{25}{32}$  deel van het blaadje. De binaire 'decimale' manier levert een besparing van  $\frac{26}{31} = 84\%$  op. Zonder die truc van de enen en nullen kun je zelf ook die 5 keer vouwen uitvoeren als je bedenkt dat  $\frac{25}{32} = (16 + 8 + 1)/32 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32}$ . Dus 1 keer dubbelvouwen (voor de  $\frac{1}{2}$ ), de ene helft nog eens dubbelvouwen (voor die  $\frac{1}{4}$ ), dan de vierde kwart 3 keer naar zijn vouwlijn halveren (voor die  $\frac{1}{32}$ ). Ook met 5 keer vouwen. Maar het leuke is dat je in een les het binaire stelsel kunt toepassen in vouwen en meteen rekenen met breuken kunt oefenen. Spectaculair vond ik het volgende deel van de lezing. Daar in werd aangetoond dat klassieke problemen, zoals trisectie van een hoek en verdubbeling van een kubus, die niet kunnen worden opgelost met passer en liniaal, wel eenvoudig te hanteren zijn met vouwen. Je voegt dan een zesde origami-axioma toe aan de bestaande. Je kunt door schuiven twee willekeurige punten naar twee willekeurige lijnen vouwen. Als toepassing hiervan demonstreerde Cara een origami-trisectie van een (scherpe) hoek.

### Kaminski

De eerste workshop die ik bezocht ging over het (ontzenuwen van het) onderzoek van Kaminski. In hun lezing kwam de opzienbarende uitkomst van het onderzoek in een heel ander daglicht te staan. Kinderen zouden beter wiskunde leren via generieke, abstracte voorbeelden dan met contextrijke. In hun betoog lieten Dirk De Bock en Johan Deprez zien dat er te lichtvoetig is omgesprongen met de resultaten van het onderzoek van Kaminski. Ook zijn in het bewuste artikel enkele onderzoeksresultaten verzwegen, dan wel weggelaten. Juist enkele onderdelen waar geen significant verschil zat tussen beide manieren van aanbieden: alleen abstract of met context. Ze deden zelf bij 130 van hun studenten een vergelijkbaar onderzoek. De deelnemers werd middels voorbeelden de theorie van commutatieve groepen van orde 3 aan geleerd = rekenen modulo 3. Daarna moest in de testfase een aantal vragen beantwoord worden om te zien of ze de theorie hadden gesnapt. Bij de transferfase waarin het geleerde in een nieuwe situatie moest worden toegepast, deden de studenten die met concrete voorbeelden geleerd hadden het beter. Waarom kwam Kaminski tot een andere conclusie? De contextvoorbeelden waren zo gemakkelijk dat je de antwoorden op de vragen ook direct zag. Die voorbeelden vertroebelden eerder het modulo rekenen dan dat het daarmee duidelijker werd.

### Nuna5

Een volgende sessie betrof het Nuna5 Solar Team binnen het thema Wiskunde en Energie. De Nuna5 stond in de zaal. Student Thomas van Alsenoy van de TU Delft vertelde over zijn belevenissen van 2009. Ruim 3000 km door Australië alleen op zonne-energie. De wiskunde die gebruikt is, werd aangewend om een zo glad mogelijke romp te ontwerpen. Maar de keiharde cijfers die na testen in de windtunnel vrijkomen geven pas echt aan of de luchtweerstand werkelijk zo laag is als berekend. Er moest ook voortdurend gerekend worden (in de volgauto) hoe groot de reservevoorraad energie in de accu is, om ook als er geen zon is nog te kunnen doorrijden. Verder komt het vooral op tactiek en communicatie aan. Waar zitten de wolkenvelden? Waar rijden de andere deelnemers? Kortom, het is vooral een avontuur, een jongensdroom.

### Nspire

De eerste ochtendlezing die ik bijwoonde was van Monica Neagoy. Ze liet zien welke apps ze allemaal heeft gemaakt voor TI-Nspire. Omdat

ik sinds 3 januari na 37 jaar lessen met een krijtje op het bord eindelijk een digibord heb, leek het me interessant om daar mijn licht eens op te steken. Grappig vond ik de Franse en Engelse woorden voor boxplot: boîte à moustaches en box-and-whiskers plot.

### Wiskunde de wereld rond

Door naar de laatste workshop in het thema 'De wereld rond'. Vriend en professor Rainer Kaenders gaf een heldere uiteenzetting over wat met wiskundeonderwijs aan besef bij leerlingen moet worden bijgebracht. Naast *number sense* en *symbol sense* passeerden nog een tiental 'senses' de revue. De nieuwe inzichten van Pierre van Hiele en Hans Freudenthal over de didactiek van wiskunde die ons huidige onderwijs bepalen, dringen ook door in de Grundkurs en Leistungskurs in het Duitse Noordrijn-Westfalen. Dat we daarbij de leerlingen eigenlijk net niet vertellen hoe het zit, bijvoorbeeld met limieten bij differentiëren, draagt in feite bij aan het experimenteel en instrumenteel besef. Je hoeft nog niet alles exact te kunnen bewijzen om te snappen waarover het gaat. Rainer eindigde met de oproep tot het bieden aan variatie van besef zonder afbreuk te doen aan de begrippen. Zo kun je met het differentiequotient de afgeleide van  $y = x^2$  wel aannemelijk maken: wordt  $2x$  als  $h$  tot 0 nadert, hoewel het eigenlijk geen exact bewijs is.

### Mantra

Dan de slotlezing van professor Jan Hogendijk. Jan zong een soort boeddhistische mantra die leerlingen in India moesten leren om de sinus van een boog van een gegeven aantal boogminuten te berekenen. De gezongen benaderingsmethode van Madhava uit Kerala (Zuid-India) is rond 1400 ontwikkeld en klopt op een factor na met onze moderne Taylorformule van een hoek in radialen. Je kunt  $\sin \alpha$  benaderen met  $\alpha - c^3(t - c^2(s - c^2(r - c^2(q - c^2 p))))$  met  $c = \frac{\alpha}{5400}$ . En zo zijn we weer terug bij de geneste binaire schrijfwijze van de eerste lezing. De getallen  $p, q, r, s, t$  in deze formule zitten in de mantra. Ze vormen de tellers van breuken met resp. noemers  $60^3, 60^2$  en 60. En zo kwam er een mooi slot aan deze 17de conferentie waarin wordt aangetoond dat wiskunde in zekere zin tijdloos en cultuuroverstijgend is. Zeker als je bedenkt dat de Internationale Wiskunde Olympiade dit jaar in Nederland is, en dat Pythagoras al 50 jaar verschijnt. ←