Sander Kupers
Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
Postbus 80010
3508 TA Utrecht
a.p.m.kupers@students.uu.nl

Boekbespreking Jan Aarts: Topologie door zien

Topologie als stripverhaal

Dat in topologieboeken veel afbeeldingen worden gebruikt, is begrijpelijk. Immers, de menselijke intuïtie laat ons boven drie dimensies ernstig in de steek en kan wel wat ondersteuning gebruiken. Sander Kupers legt uit hoe Jan Aarts hier nog een stap verder in gaat door afbeeldingen als basis te nemen om topologie uit te leggen. Met deze visuele aanpak kan een groter publiek bereikt worden, waarbij je ook aan het middelbaar onderwijs kunt denken. De auteur wordt dan ook aangemoedigd om zijn boek te bewerken tot een module voor wiskunde D.

Eén van de krachtigste hulpmiddelen van een wiskundige is zijn of haar eigen visueel vermogen. Voor veel bewijzen komt inspiratie uit een visueel inzicht. Daarna is het geven van een bewijs niet meer dan het rigoureus maken van dat inzicht. Dit ligt voor de hand in vakgebieden als grafentheorie en klassieke meetkunde, maar een ander goed voorbeeld is de topologie. Daar bestuderen we een algemener concept van ruimte: een topologische ruimte is simpelweg een verzameling punten met een notie van omgeving, waarmee we bijhouden welke punten dicht bij elkaar liggen. Omdat deze ruimtes algemener zijn dan degene die we gewend zijn, moeten we veel voorzichtiger zijn om niet een van de vele pathologische voorbeelden over het hoofd te zien. (Een mooie collectie voorbeelden is te vinden in *Counterexamples in Topology* [7].) Vanzelfsprekend wordt dan het vinden van goede definities ook subtieler. Toch valt veel van de topologie op zijn plaats als we weten wat we ons bij stellingen en hun bewijzen voor moet stellen.

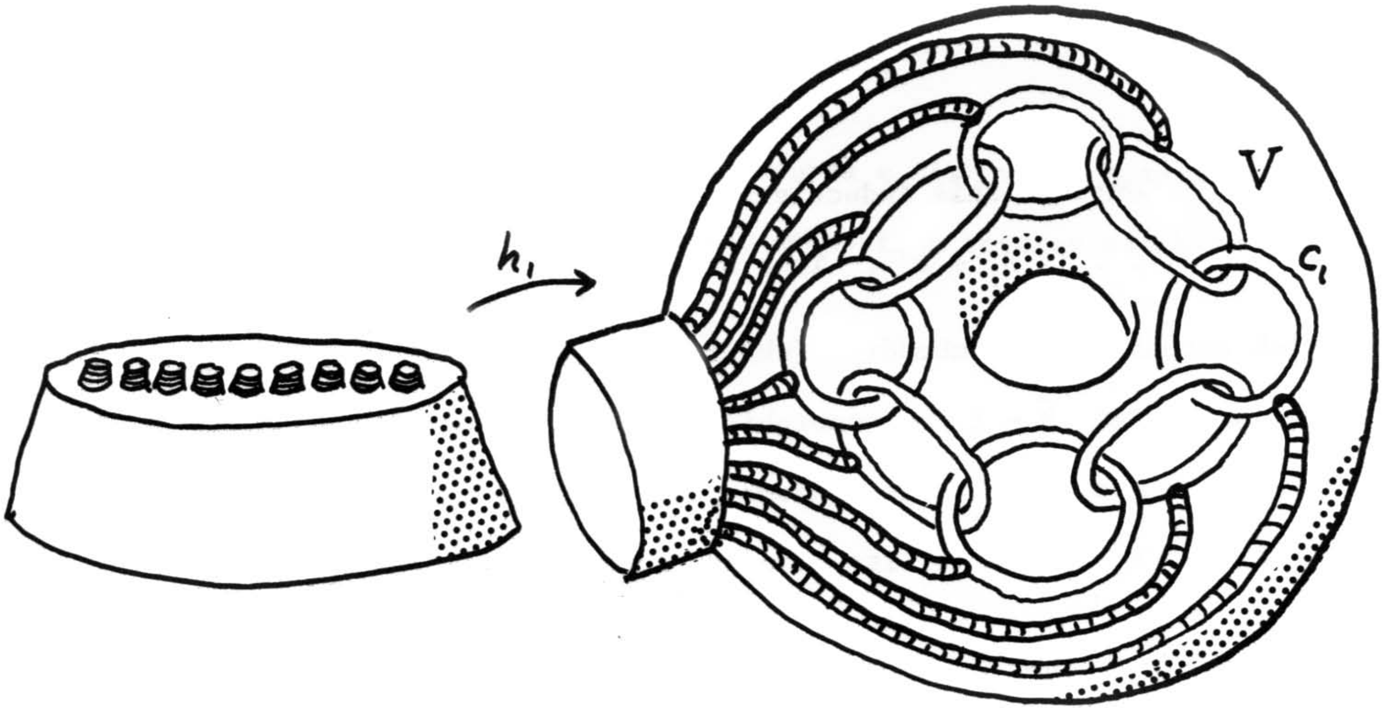
Topologie ondersteund door illustraties

Het is niet ongewoon om bij het uitleggen van topologie veel afbeeldingen te gebruiken, maar er zijn verschillende manieren om met deze afbeeldingen om te gaan. De grootste groep boeken gebruikt de afbeelding slechts als ondersteuning. Boeken van dit type zijn bijvoorbeeld Munkres' standaard lesboek over topologie [5] en Rolfsens *Knots and Links* [6]. In deze boeken geven de afbeeldingen voorbeelden voor de 'echte wiskunde' in de tekst. Deze keuze is begrijpelijk: de menselijke intuïtie over de ruimte werkt goed tot en met drie dimensies, maar faalt daarna vreselijk. Hierdoor zien we vaak opties over het hoofd of lopen we in de val om een pathologisch tegenvoorbeeld te vergeten. Zo had waarschijnlijk niemand intuïtief ingezien dat de zeven-dimensionale sfeer S^7 maar liefst 28 gladde structuren bezit [4] of dat er vlakvullende krommen bestonden.

Dat wil niet zeggen dat de afbeeldingen niet de moeite waard zijn. De tekeningen van knopen in het boek van Rolfsen en de tekeningen van figuren gekromd in hogere dimensies in George K. Francis' *A topological picturebook* [2] maken de definities en bewijzen inzichtelijker en zijn soms ware kunstwerken. Zie Figuur 1.

Topologie door middel van illustraties

Een tweede, kleinere, groep boeken gebruikt afbeeldingen als leidraad voor de uitleg. De 'bewijzen' zijn visueel: de lezer ziet waarom de uitspraken waar moeten zijn. Een mooi voorbeeld hiervan is J. Scott Carters *How Surfaces Intersect in Space* [1] over laag-dimensionale topologie. Het voorwoord van dat boek legt de beweegredenen van de auteur uit om een dergelijk boek te schrijven. Ten eerste geeft het de mogelijkheid aan de lezer om snel intuïtie voor het vakgebied te ontwikkelen. Daarnaast moet de auteur, aangezien er toch een voorbeeld op het papier getekend moet worden, vanaf het begin met goede instructieve voorbeelden komen. Maar het belangrijkste is dat het de tekst toegankelijker maakt voor een veel groter publiek, omdat veel technische details verborgen kunnen blijven zonder aan inhoud te verliezen. Hierdoor kunnen veel meer mensen delen in het gevoel van schoonheid dat wiskunde biedt, maar dat normaliter verborgen blijft achter een muur van definities en lemma's.



Illustratie: Dale Rolfsen

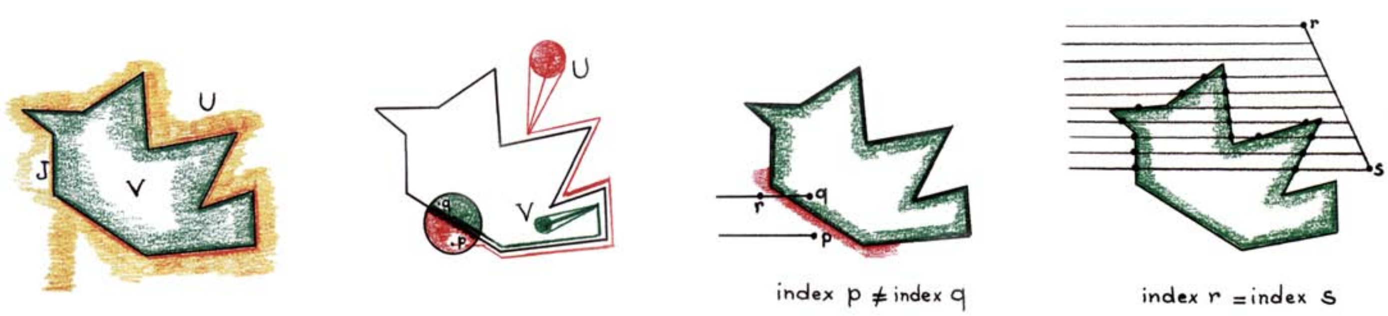
Figuur 1 Rolfsens tekening van een stap in de constructie van Antoines gehoornde sfeer

Jan Aarts schreef — of beter gezegd, tekende — een boek over topologie, met precies deze inslag: visueel topologie uitleggen. Dit boek, *Topologie door zien* getiteld, is vorig jaar uitgegeven door Epsilon Uitgaven. Het boek is opgebouwd als stripverhaal: in een serie gekleurde potloodtekeningen met tekst legt de schrijver allerlei topologische ideeën uit. Net zoals bij striptijdschriften kun je de verhalen los van elkaar lezen, hoewel er een rode draad in zit van concreet naar abstract.

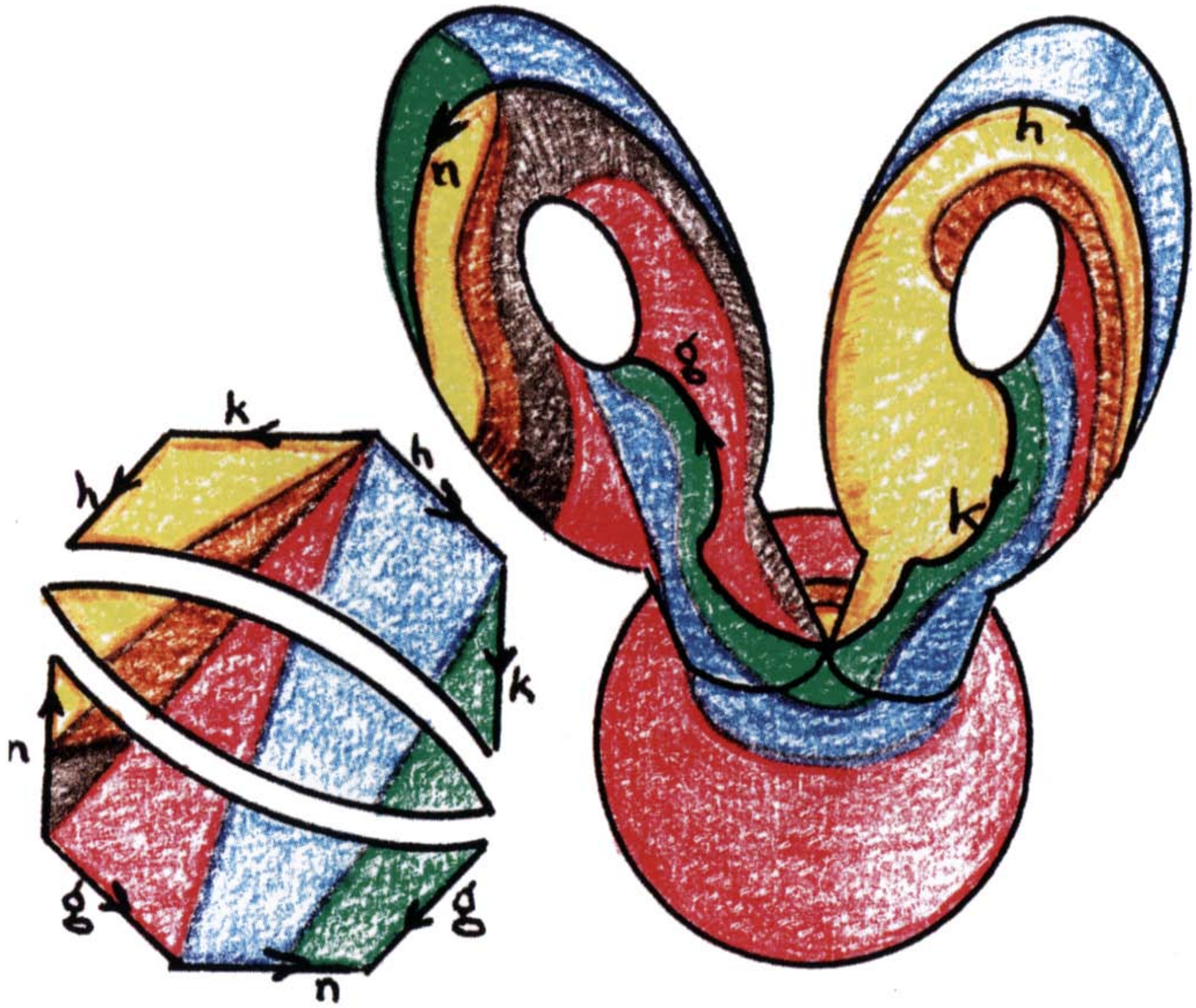
Het eerste deel van het boek begint met het schetsen van een beeld van topologische ruimten: rubberen oppervlakken waarmee je alles mag doen, behalve scheuren en plakken. Wat volgt is een uitleg over oriënteerbaarheid en een mooie schets van het bewijs van het vierkleurenprobleem. Tenminste, het boek beschrijft dat deel van het bewijs dat de vraag reduceert naar een eindig, maar groot, aantal irreducibele kaarten. Als laatste komt de stelling van Jordan aan bod. De schrijver legt hier mooi voor polygonen de stelling van Jordan uit: het complement van het beeld van een continue injectieve afbeelding $f : S^1 \to \mathbb{R}^2$ scheidt het vlak in twee samenhangende componenten. (Over Jordans bewijs is nogal wat discussie geweest. Een overzicht is te vinden in het artikel van Thomas Hales [3], waarin de wiskundige die een oplossing gaf voor het Keplerprobleem het oorspronkelijke bewijs van Jordan verdedigt.)

Het bewijs van de stelling van Jordan voor polygonen bestaat uit twee delen. Eerst maak je twee deelverzamelingen U, V van het complement X van het beeld J van f. Dit werkt als volgt: op het midden van een zijde van de polygoon plaats je een klein schijfje. In dit schijfje kies je een punt p aan de ene kant van de zijde en een punt q aan de andere kant. U is de verzameling van alle punten in X die je met p kan verbinden door een gebroken lijnstuk dat niet J snijdt en V is de verzameling van alle punten X die je op deze wijze met q kan verbinden. Per definitie zijn U and V samenhangend. De vraag is of er inderdaad geldt dat $U \cup V = X$ en $U \cap V = \emptyset$.

Voor de eerste uitspraak laat je zien dat elk punt van X in U of V zit. Van elk punt X kun je een pad naar de schijf maken: trek



Figuur 2 Het bewijs van Jordans stelling in stripvorm



Figuur 3 In deze tekening wordt duidelijk hoe je een oppervlak van genus 2 kunt krijgen door zijden van een polygoon aan elkaar te plakken

een lijnstuk naar een nabijgelegen zijde van de polygoon, natuurlijk zonder J te snijden, en volg deze tot je in de schijf komt. Verbind deze lijn met p of q, afhankelijk van de helft van de schijf waarin je pad terecht komt.

Voor de tweede uitspraak bekijk je de index van een punt: dit is het aantal keer dat de lijn naar links getrokken vanuit het punt de polygoon snijdt (als je een hoekpunt van de polygoon raakt, moet je de lijn een klein beetje verschuiven). Het is dan voldoende om te laten zien dat de index hetzelfde is voor twee punten die verbonden worden door een gebroken lijn die J niet snijdt en dat index(p) $\neq$ index(q). Het bewijs voor de stelling van Jordan voor alle krommen kan dan gegeven worden door deze met polygonen te benaderen [3]. Zie Figuur 2.

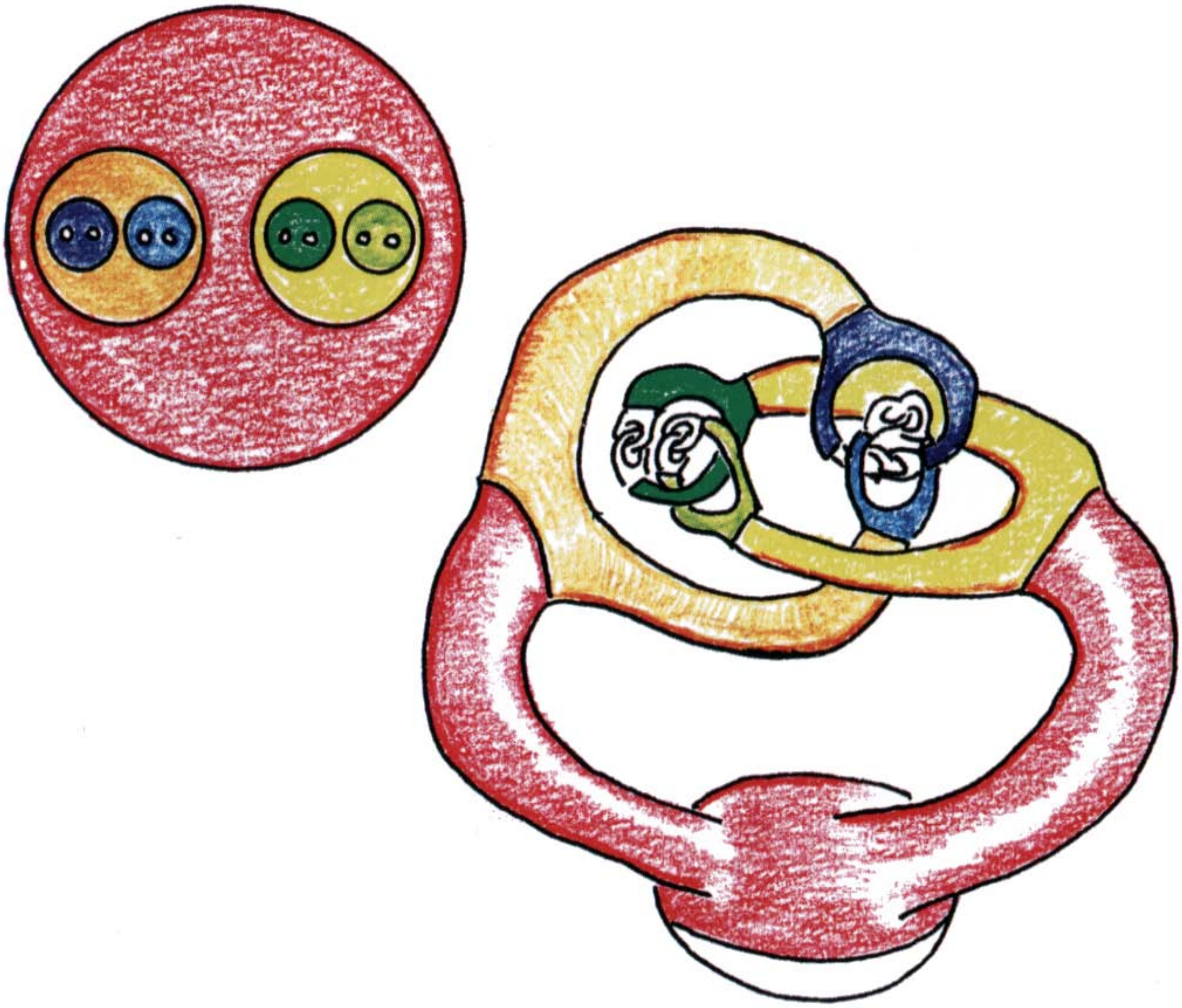
Het tweede deel van het boek gaat uit het vlak, naar knopen en gekromde oppervlakken. Zo leert de lezer over de drie Reidemeisterbewegingen: twee tekeningen van knopen in het vlak stellen dezelfde knoop voor dan en slechts dan als de tekeningen in elkaar over te voeren zijn door een samenstelling van isotopieën van het vlak en Reidemeisterbewegingen. Met behulp van de formule van Euler worden de regelmatige veelvlakken geclassificeerd, gevolgd door een uitleg over de fundamentaalgroep en een classificatie van tweedimensionale oppervlakken. Vooral in die laatste sectie staan mooie tekeningen, zie Figuur 3.

In het boek moeten natuurlijk technische details weggelaten worden om het leesbaar te houden. Toch heeft de schrijver er duidelijk werk van gemaakt waar nodig rigoureus te zijn. Zo noemt de begeleidende tekst vaak kort de voorwaarden. Nuttiger voor de leek dan het lezen over technische voorwaarden is het derde deel. Dit deel gaat, na een precieze uitleg over continuïteit in (metrische) ruimten, juist over de pathologische gevallen. Allerlei tegenvoorbeelden worden met duidelijke tekeningen geïntroduceerd: de Cantorverzameling, vlakvullende krommen, Antoines ketting en de gehoornde sfeer van Antoine. Zie Figuur 4.

Al met al komen er dus veel onderwerpen aan bod, allemaal een introductie tot een deelgebied van de topologie. Het is voor leken of wiskundigen met weinig kennis van topologie een mooi overzicht. Daarnaast staan er enkele parels van bewijzen in het boek, zoals het combinatorisch bewijs van de dekpuntstelling van Brouwer met behulp van het lemma van Sperner.

Topologie op de middelbare school

Omdat de visuele aanpak het mogelijk maakt om diepe ideeën aan een groot publiek over te brengen, zou het boek ook in het onderwijs van nut kunnen zijn. In het huidi-



Figuur 4 Jan Aarts zijn tekening van Antoines gehoornde sfeer

ge middelbaar onderwijs is wiskunde uit elkaar gevallen in vier vakken: wiskunde A tot en met D. Wiskunde D is een keuzevak in de bovenbouw van de vernieuwde tweede fase en biedt geïnteresseerde leerlingen de mogelijkheid om de onderwerpen die in wiskunde B geleerd worden te verdiepen en hun kennis te verbreden met andere wiskundige onderwerpen. Het vak werkt met een systeem van modulen, die elk voor een bepaald onderwerp enkele maanden aan lesmateriaal bieden. Zo zijn er modulen over cryptografie, grafentheorie en financiële wiskunde.

Wat er nog mist, is een module over topologie. Ik denk dat het boek van Jan Aarts een prima basis zou zijn voor een module voor wiskunde D over topologie. Naast het feit dat de onderwerpen als vlakvullende krommen tot de verbeelding spreken en dus kunnen inspireren, geeft het ook een goed beeld van de diversiteit van de wiskunde. Het is veel meer dan vergelijkingen oplossen en klassieke meetkunde, en wat je op school leert is pas het begin van een hele wereld vol interessante ideeën. Ik zou de auteur dan ook willen uitnodigen om het boek, of een deel daarvan, te bewerken tot een module voor wiskunde D.

Jan M. Aarts, *Topologie door zien*, Epsilon Uitgaven, 2010, 212 p., ISBN: 9789050411219, prijs € 28,00.

Referenties

1. J. Scott Carter, *How surfaces intersect in space*, volume 2 of *Series on Knots and Everything*. World Scientific, 2nd edition, 1995.
2. George K. Francis, *A topological picturebook*. Springer-Verlag, 1897.
3. Thomas C. Hales, Jordan's proof of the Jordan curve theorem. *Studies in logic, grammar and rhetoric*, 23(10):45–60, 2007.
4. Michel A. Kervaire en John W. Milnor, Groups of homotopy spheres: I. *The Annals of Mathematics*, 77(3):504–537, 1963.
5. James R. Munkres, *Topology*. Prentice Hall, 2nd edition, 2000.
6. Dale Rolfsen, *Knots and Links*. Publish or Perish, 1976. Herdrukt door de American Mathematical Society.
7. Lynn Arthur Steen en J. Arthur Seebach Jr., *Counterexamples in Topology*. Springer-Verlag, 2nd edition, 1978.