

Bennie Mols

Kijkduinstraat 121-2

1055 XW Amsterdam

benniemols@gmail.com

Maatschappij Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2009

# Opties prijzen met storingsrekening

De formules waarmee banken de prijs van een optie berekenen, zijn lastig zo niet onmogelijk om exact en snel op te lossen. Sinds kort wordt storingsrekening, bekend uit de toegepaste wiskunde en natuurkunde, gebruikt om snel benaderende oplossingen te vinden. De Rabobank vroeg de Studiegroep Wiskunde met de Industrie om te onderzoeken of met storingsrekening een hybride model voor optiepreisen opgelost kan worden.

## Deelnemers van de studiegroep

Tasnim Fatima (TU/e)

Lech Grzelak (TUD)

Harrie Hendriks (RU)

Simone Munao (VU)

Adrian Muntean (TU/e)

Martin van der Schans (UL)

Wie een aandeel van een bedrijf koopt, koopt eigenlijk een klein stukje van dat bedrijf. De koper hoopt dat de waarde van het bedrijf gaat toenemen, waardoor ook zijn eigen aandeel in waarde gaat stijgen. Zo maakt de koper winst op zijn investering, en hopelijk meer dan hetzelfde geld op de bank aan spaarrente zou hebben opgeleverd. Een optie is een iets ingewikkelder financieel product dan een aandeel. Wie een optie koopt, koopt het recht om tegen een vooraf bepaalde prijs, en aan het einde van een vooraf afgesproken periode (variërend van maanden tot jaren), een

bepaald aandeel op de financiële markt te kopen (call-optie) of te verkopen (put-optie). Voor dit recht betaalt de optiekoper een bedrag aan degene die het recht verleent.

Stel dat een bepaald aandeel vandaag 40 euro kost en dat je een call-optie koopt die je het recht geeft om over een jaar hetzelfde aandeel voor 45 euro te kopen. Stel, dat de koers over een jaar 50 euro is, dan kun je het aandeel zoals afgesproken voor 45 euro kopen. Als je het dan meteen verkoopt, heb je een winst van 5 euro behaald, minus de kosten voor het kopen van de call-optie. De waarde van de optie voor het einde van de looptijd hangt dus af van de verwachte ontwikkeling van de aandelenprijs.

Banken zoeken naar rekentechnieken om optiepreisen te berekenen. De verwachte ontwikkeling van de aandelenprijs hangt zelf weer op een stochastische wijze af van drie belangrijke parameters: de huidige prijs van het aandeel, de rente en de volatiliteit, ofwel de beweeglijkheid van een bepaald aandeel.

Hoe meer de waarde van een aandeel in de loop van de tijd schommelt, hoe groter de volatiliteit. En hoe groter de volatiliteit, hoe groter het risico van een investering in dat aandeel. Stabiele beursfondsen hebben een vrij lage volatiliteit. Instabiele beursfondsen hebben een hoge volatiliteit. De optieprijs is verder ook nog afhankelijk van de rente. Immers: hoe hoger de rente, hoe aantrekkelijker het is om je geld op een spaarrekening te zetten in plaats van te beleggen in aandelen of opties.

Zowel de ontwikkeling van de rentestand als die van de volatiliteit is niet van tevoren bekend, en moeten dus geschat worden. In de afgelopen decennia zijn oplossingen gevonden voor verschillende eenvoudigere versies van het oorspronkelijke probleem om de waarde van opties te berekenen. In het veel toegepaste Black-Scholes-model uit 1973, worden zowel de rente als de volatiliteit constant in de tijd verondersteld. Dat heeft als grote voordeel dat de optieprijs uitgedrukt kan worden in een formule die snel en relatief eenvoudig kan worden opgelost. Het realistischere Heston-model uit 1993 gaat een stap verder dan het Black-Scholes-model door aan te nemen dat de volatiliteit willekeurig in de tijd varieert. De rentestand wordt wel nog steeds constant verondersteld.

### Hybride model

“De volgende logische stap is om ook de rente te laten variëren”, vertelt wiskundige Lech Grzelak. Grzelak is bezig aan een promotieonderzoek in de financiële wiskunde. Vier dagen per week werkt hij bij de Rabobank, die zijn promotieonderzoek financiert, en een dag per week bij de TU Delft. “De waarde van een optie wordt dan afhankelijk van drie stochastische processen, namelijk die voor het aandeel, de volatiliteit en de rente”, vertelt Grzelak. “Een extra complicatie is dat de rente en de volatiliteit van elkaar afhankelijk zijn. Zo’n model heet een hybride model.”

Sinds een aantal jaren wordt storingsrekening gebruikt in de financiële wiskunde om problemen op te lossen die met andere methoden te moeilijk te kraken zijn. Storingsrekening, of *perturbation method* in het Engels, wordt veel toegepast in de natuurkunde en de scheikunde. Deze methode wordt gebruikt om benaderende oplossingen te vinden van differentiaalvergelijkingen. Zo’n benaderende oplossing wordt wiskundig opgeschreven als een som van opeenvolgende termen, waarbij elke volgende term minder belangrijk is dan de vorige. De eerste term is de oplossing van een eenvoudiger probleem dat wel een exacte oplossing heeft. De volgende termen worden uitgedrukt in een of meer kleine parameters die in het gegeven probleem een belangrijke rol spelen. Hoe gedetailleerder je de oplossing wilt weten, hoe meer termen je moet meenemen en hoe langer de berekening duurt.

“Onze vraag aan de studiegroep was om te onderzoeken of storingsrekening gebruikt kan worden om een hybride model voor optieprijsen op te lossen”, zegt Grzelak.

### Limietgevallen

Wiskundige Martin van der Schans werkte samen met vier collega’s aan het Rabobankprobleem. “We realiseerden ons dat het om een veel bestudeerd probleem gaat dat we onmogelijk in een week konden oplossen. We moesten dus zorgen dat we niet te veel hooi op onze vork zouden nemen.”

De wiskundigen bestudeerden eerst het werk van een andere groep wiskundigen, die in 2007 tijdens de Studieweek Wiskunde met de Industrie in opdracht van ING een oplossing hadden gezocht van het Heston-model. “Dat is een eenvoudiger probleem,” aldus Van der Schans, “omdat van de drie stochastische processen — aandeelprijs, volatiliteit en rente — alleen de afhankelijkheid tussen aandeelprijs en volatiliteit wordt meegenomen. De andere twee van de drie correlaties veron-

derstel je 0. In ons hybride model nemen we twee van de drie correlaties mee, die tussen aandeel en volatiliteit en die tussen rente en volatiliteit.”

De wiskundigen vonden vervolgens in de wetenschappelijke literatuur verschillende manieren om dit hybride probleem aan te pakken. Uiteindelijk vonden ze een aanknopingspunt in een model dat het gedrag van de volatiliteit splitst in een langzaam en een snel proces. Van der Schans: “Het model dat wij wilden oplossen, leek op hun model. Deels konden we hun resultaten gebruiken, en deels hebben we daar onze eigen aanpak aan toegevoegd. De drie gekoppelde vergelijkingen voor de aandeelprijs, de volatiliteit en de rente konden we formuleren als een partiële differentiaalvergelijking, waarin twee kleine parameters voorkomen:  $\varepsilon$  en  $\delta$ .”

De optieprijs kan dan worden uitgedrukt als een som van termen. De eerste term is de exact bekende oplossing van de Black-Scholes-vergelijking. De tweede term wordt uitgedrukt in de kleine parameter  $\delta$  en de oplossing van het in de literatuur gevonden model. De derde term wordt uitgedrukt in de kleine parameter  $\varepsilon$  en een term die de wiskundigen zelf moesten uitrekenen.

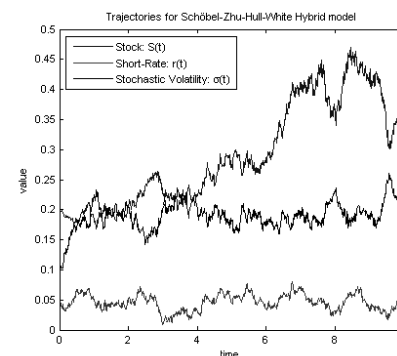
“Om die termen uit te rekenen”, vertelt Van der Schans, “hebben we de limietgevallen bekeken waarin of  $\varepsilon$  of  $\delta$  naar 0 gaan. Elk van die limietgevallen levert een partiële differentiaalvergelijking waarvoor we de algemene oplossing hebben bepaald. In de praktijk zal de bank die oplossingen numeriek moeten uitrekenen. Maar onze cruciale toevoeging is dat we de formules die wij hebben afgeleid sneller kunnen oplossen dan wanneer we zouden proberen de oorspronkelijke partiële differentiaalvergelijking numeriek op te lossen. De winst van het gebruiken van verstoringstheorie zit dus in de snelheid waarmee je een vrij goede, maar benaderende oplossing vindt.”

Hiermee heeft de studiegroep een eerste stap gedaan in het toepassen van verstoringstheorie op het hybride model. “Maar er moet nog wel wat extra werk worden gedaan wil Rabobank deze aanpak kunnen toepassen”, zegt Van der Schans. “Zo moet de benaderende oplossing worden gekalibreerd aan de marktdata. Stel dat de benadering niet nauwkeurig genoeg blijkt te zijn, dan is het nodig om hogere-orde termen te berekenen.”

### Nieuwe wegen

“We gaan met de resultaten van de studiegroep verder”, geeft Lech Grzelak van Rabobank als commentaar op het werk van de

studiegroep. “Wij hebben bij de bank geen experts op het terrein van storingsrekening, en dat was ook een belangrijke reden om het hybride model voor te leggen aan de studiegroep, met de vraag om het met storingsrekening aan te pakken. Onderzoekers proberen dit soort problemen uit de financiële wiskunde met steeds andere technieken op te



Figuur 1 Tijdafhankelijkheid van het aandeel, de rente en de volatiliteit

lossen, om te kijken welke in de praktijk het beste werkt. En verstoringstheorie is een relatief nieuwe techniek waarmee het probleem kan worden benaderd. Om die reden heeft een aantal mensen van Rabobank in 2008 een cursus storingsrekening aan de TU Delft gevolgd. De Studieweek Wiskunde met de Industrie zien we als een vervolgstap daarop.”

“Wij wisten ook wel dat een week onvolledige is om het hele probleem op te lossen, maar de wiskundigen hebben ons een aantal nieuwe wegen laten zien die we zelf verder gaan bewandelen. En dat zijn wegen die nog maar door weinig anderen worden verkend, zo hebben we gezien. Ook hebben ze ons op een aantal interessante eerdere studies uit de literatuur gewezen, die we ook verder gaan bestuderen.”

Dit is een verslag van de Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2009, van 26-30 januari in Wageningen. Voor de bijbehorende wetenschappelijke publicatie, waarin de gebruikte wiskundige modellen en methoden uitvoerig staan beschreven, verwijzen we u naar de website [www.swiz009.wur.nl](http://www.swiz009.wur.nl).