

Federica Pasquotto

Afdeling Wiskunde
Vrije Universiteit
De Boelelaan 1081a
1081 HV Amsterdam
pasquott@few.vu.nl

Onderzoek

Een korte geschiedenis van het vermoeden van Weinstein

Een heel natuurlijke en fundamentele vraag (vanuit historisch en wiskundig perspectief) is die van het bestaan van periodieke banen van Hamiltoniaanse stromingen op bepaalde energieoppervlakken. In 1978 vermoedde Alan Weinstein dat een meetkundige eigenschap van het desbetreffende energieniveau een voldoende voorwaarde zou zijn om het bestaan van zulke banen te bewijzen. Hij noemde oppervlakken met deze eigenschap contacttypeoppervlakken. Federica Pasquotto beschrijft in dit artikel in het kort de geschiedenis van het vermoeden van Weinstein, dat een van de belangrijkste krachten achter de ontwikkeling van de symplectische meetkunde aan het eind van de twintigste eeuw is en de achtergrond oplevert voor enkele van de meest vruchtbare interacties tussen analyse, meetkunde en topologie. Het vermoeden van Weinstein is in een aantal belangrijke gevallen bewezen, maar blijft, in zijn algemene formulering, een buitengewoon interessant en uitdagend openstaand probleem.

Veel belangrijke fysische fenomenen worden beschreven door de oplossingen van een systeem van Hamiltoniaanse differentiaalvergelijkingen. In hun bekendste vorm zien de Hamiltonvergelijkingen er als volgt uit:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}.$$

Hierin is H de energiefunctie en zijn p en q vectoren van dezelfde dimensie: in het geval van de beweging van een planeet of een deeltje stellen deze vectoren respectievelijk snelheid en positie van het bewegende object voor. Dankzij het principe van behoud van energie liggen oplossingen op een bepaald *energieniveau*, dat wil zeggen een niveauverzameling van de energiefunctie.

Onder de eerste conservatieve systemen waarnaar in de loop der geschiedenis veel belangstelling is uitgegaan en die uitgebreid zijn

onderzocht, zijn de systemen die de bewegingen beschrijven van planeten, sterren en andere astronomische objecten. Het is daarom niet verrassend dat de vraag of er periodieke oplossingen (of banen) van zulke systemen bestaan op een natuurlijke manier ontstond en heel snel een centrale rol ging spelen in de Hamiltoniaanse mechanica. Vanuit een mathematisch perspectief zijn oplossingen die periodiek gedrag vertonen heel belangrijk, want juist deze oplossingen komen overeen met de stationaire punten van een bepaalde functionaal, de *actie*.

Symplectische meetkunde biedt ons het geschikte wiskundige formalisme om deze systemen te bestuderen en speelt daarom een grote rol in de zoektocht naar periodieke banen. Symplectische structuren verschenen voor het eerst in verband met klassiek mechanische systemen, maar zij maken het ook mogelijk om de studie van Hamiltoniaanse sys-

temen voorbij de grenzen van de standaard euclidische ruimte uit te breiden, naar ruimtes met niet-triviale meetkunde en topologie (bijvoorbeeld met kromming en gaten). Het vermoeden van Weinstein introduceert een voldoende voorwaarde die leidt tot existentie van periodieke banen op een bepaald energieoppervlak: deze voorwaarde wordt uitgedrukt in termen van de meetkunde van het energieoppervlak en door middel van de symplectische structuur waarmee de omliggende faseruimte is uitgerust. Dit vermoeden heeft de relatie tussen Hamiltoniaanse dynamica en symplectische meetkunde nogmaals versterkt en het heeft, in de laatste dertig jaar, veel bijgedragen aan de ontwikkeling van de symplectische meetkunde. (Alan Weinstein is hoogleraar aan de University of California, Berkeley. Hij heeft in 2003 een eredoctoraat van de Universiteit Utrecht ontvangen.)

De technieken en resultaten waarover we tegenwoordig beschikken (en die ik hieronder zal bespreken) hebben betrekking op energieniveaus die begrensd zijn (*compact*). In de praktijk ontstaan onbegrensde energieoppervlakken op heel natuurlijke wijze. Dit blijkt bijvoorbeeld uit de volgende vergelijking (de Fisher–Kolmogorov vergelijking):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - F(u).$$

Deze vergelijking kan voor verschillende keu-

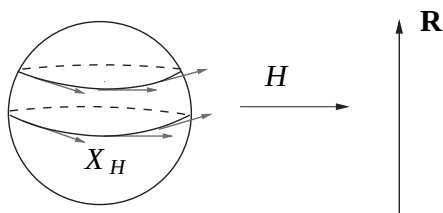
zes van α en F onder andere de volgende fysische fenomenen beschrijven: watergolven in ondiep water, pulsgoed in optische vezels, geologische plooing van steenlagen. Tijdsafhankelijke oplossingen van deze vergelijking voldoen aan

$$u'''' - \alpha u'' + F(u) = 0.$$

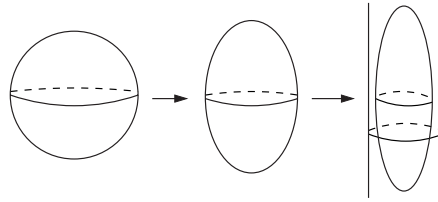
Deze vergelijking kan vervolgens als Hamiltonvergelijking worden geformuleerd en leidt tot een systeem met onbegrensde energieniveaus. Het vermoeden van Weinstein voor onbegrensde energieniveaus is tot nu toe vrijwel ononderzocht gebleven. Samen met collega's van de Vrije Universiteit probeer ik meer licht te werpen op dit aspect van het probleem, met behulp van een meetkundig-topologische aanpak. Met ons onderzoek hopen we ook de interesse voor deze variant van het vermoeden van Weinstein binnen de wiskundige gemeenschap te vergroten.

Symplectische meetkunde

Laten we een variëteit beschouwen: denk aan een bol of een hyperoppervlak. Om te beginnen zijn we geïnteresseerd in de *topologie* van de variëteit ('rubbermeetkunde'). Op een gegeven moment zullen we ook wat aanvullende structuur willen invoeren: een Riemannstructuur (of metriek) g , bijvoorbeeld, schrijft voor elk punt een manier voor om twee raakvectoren met elkaar te vermenigvuldigen en een getal hieruit te krijgen (een *in-product*). Deze bewerking is symmetrisch en geeft ons de begrippen afstand, lengte en hoeken. Als we een systeem van Hamilton-differentiaalvergelijkingen beschouwen, zoals hierboven, kunnen we met de energiefunctie H een vectorveld associëren, dat richting en snelheid van de oplossingen van het systeem in elk punt aangeeft. In dimensie 2 is een volumeform hiervoor voldoende, in hogere dimensies hebben we een 2-vorm nodig, waarvan het n -voudige uitproduct een volumeform oplevert: de 2-vorm wordt dan een *symplectische vorm* genoemd en de integraal van de desbetreffende volumeform heet



Figuur 1 De tweedimensionale bolschijf met het snelheidsveld X_H geassocieerd met de 'hoogte'-functie door de standaard volumeform. De energieniveaus zijn de meridianen op de bol



Figuur 2 Een $2n$ -dimensionale bol kan op volumebehoudende wijze in een cilinder met kleinere straal worden samengeperst, maar niet op symplectische wijze

symplectisch volume. Een dergelijke *symplectische structuur* (of vorm) ω definieert een antisymmetrisch product van vectoren: dit wordt noodzakelijkerwijs nul op alle 1-dimensionale deelruimtes, zodat we in plaats van 1-dimensionale juist 2-dimensionale afmetingen hebben. Als er aan geschikte voorwaarden is voldaan (zoals convexiteit), heeft het energieoppervlak ook een speciale structuur, die een *contactstructuur* heet. Zie Figuur 1.

Terwijl elk compact en oriënteerbaar oppervlak een volumeform toelaat, is in hogere dimensie niet elke variëteit symplectisch. De dimensie van de variëteit moet even zijn, maar deze voorwaarde is lang niet voldoende: sferen van een dimensie groter dan twee zijn niet symplectisch. Een symplectische vorm is in het algemeen een veel rijker object dan een volumeform. Gromov maakte dit punt duidelijk met zijn Non-Squeezing Theorem (ook bekend als de *Stelling van de Symplectische Kameel*) [2]; zie ook Figuur 2. Basisvoorbeelden van symplectische variëteiten zijn:

- De euclidische ruimte $\mathbb{R}^{2n}$, met coördinaten $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ en de standaard symplectische vorm

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i.$$

Dit voorbeeld is ook *universeel*: na een geschikte keuze van lokale coördinaten geeft het een model voor de omgeving van een willekeurige punt in een symplectische variëteit van dimensie $2n$.

- De coraakbundel van een Riemann variëteit heeft een symplectische structuur: deze ruimte kunnen we ons voorstellen als de *faseruimte* van een Hamiltoniaans dynamisch systeem; de Riemannse variëteit speelt dan de rol van de *configuratiaruimte*.

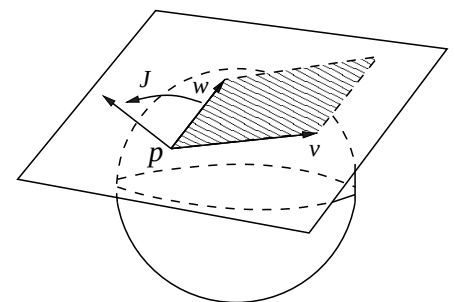
Symplectische meetkunde kunnen wij ook beschouwen als een meer flexibele versie van complexe meetkunde. (Volgens Taubes is het woord *symplectisch* voor het eerst door Weyl gebruikt, die in *complex* de Griekse door de

Latijnse stam verving. Gedurende een reis naar Azië heeft mijn collega Klaus Niederkrüger ontdekt dat het Chinese karakter voor symplectisch ook 'scherp, pittig' betekent, zodat symplectische meetkunde, ten minste in China, 'pittige meetkunde' is!) Om een aantal begrippen verder te verklaren, kunnen we naar oppervlakken kijken, die altijd én een metriek én een symplectische structuur toelaten: gegeven twee raakvectoren v en w meet de metriek g de lengte van de vectoren en de tussenliggende hoek. De symplectische vorm ω meet de oppervlakte van het parallellogram opgespannen door de twee vectoren. We kunnen een andere operatie op vectoren invoeren en met J aangeven, die raakvectoren met $\pi/2$ tegen de klok in laat draaien en hiermee het begrip van complexe vermenigvuldiging voor vectoren definieert (zie Figuur 3). Omdat deze rotatie alle hoeken, lengtes en oppervlakken invariant laat, wordt J *compatibel* genoemd met de metriek en de symplectische vorm. Het verband tussen g , ω en J is

$$\omega(v, Jw) = g(v, w).$$

In hogere dimensies vinden we op de raakbundel van elke symplectische variëteit nog steeds een complexe structuur (deze heet een *bijna-complexe* structuur op de variëteit), die complexe vermenigvuldiging voor raakvectoren definieert. In het bijzonder kunnen wij zo een structuur vinden die *compatibel* is met de symplectische structuur, in de zin dat wij de twee structuren kunnen combineren, zoals hierboven, om een Riemann-metriek te krijgen.

Een complexe structuur op de variëteit zelf, dat wil zeggen een systeem van lokale complexe coördinaten met holomorfe transitieafbeeldingen, induceert op canonieke wijze een bijna-complexe structuur: een symplectische variëteit die een compatibele bijna-complexe structuur van deze vorm toestaat



Figuur 3 De raakruimte in het punt p bestaat uit snelheidsvectoren van krommen die op het oppervlak liggen en door p gaan. Dankzij g , ω en J kunnen we zinvol spreken van lengtes, hoeken, oppervlakten en complexe vermenigvuldiging

wordt een *Kähler-variëteit* genoemd. Lang niet elke bijna-complexe structuur ontstaat op deze manier: Kähler-variëteiten vormen dus een strikte deelverzameling van alle symplectische variëteiten en zijn belangrijke objecten in de algebraïsche meetkunde (alle gladde projectieve variëteiten, bijvoorbeeld, zijn Kähler-variëteiten).

Een echte revolutie in de symplectische meetkunde werd voortgebracht door het besef dat krommen in een symplectische variëteit, waarvan de differentiaal complex lineair is ten opzichte van een compatibele bijna-complexe structuur (*pseudoholomorfe* of *J-holomorfe krommen*), bijna zo goed zijn als echte holomorfe krommen in een algebraïsche variëteit. De basis voor deze revolutie werd gelegd door Gromov in zijn beroemde artikel uit 1985 [2], en Floer zette de revolutie door: hij gebruikte *J-holomorfe krommen* technieken in zijn veelgeprezen bewijs van het *vermoeden van Arnold* [1].

Periodieke banen

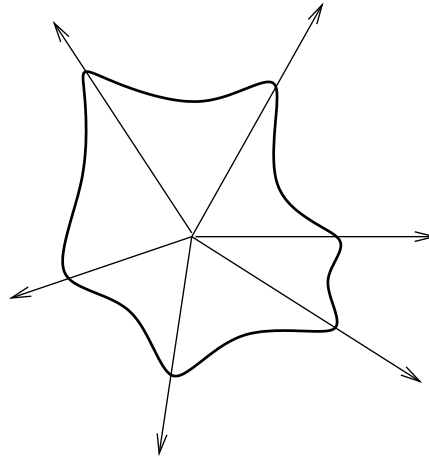
Gegeven een symplectische variëteit (M, ω) kunnen we door middel van de symplectische vorm een isomorfisme definiëren tussen vectorvelden en 1-vormen. Onder dit isomorfisme corresponderen exacte 1-vormen met Hamiltoniaanse vectorvelden: voor een gladde functie $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ wordt het Hamiltoniaanse vectorveld X_H bepaald door de identiteit $\omega(X_H, -) = -dH$. Men is geïnteresseerd in het bestaan van oplossingen van het systeem van geassocieerde differentiaalvergelijkingen

$$\dot{x}(t) = X_H(x(t)),$$

waarbij $x : I \rightarrow M$ een pad in M is. In de klassieke mechanica wordt de standaard symplectische euclidische ruimte $\mathbb{R}^{2n}$ beschouwd, waardoor $x(t)$ als $(p(t), q(t))$ kan worden geschreven en het Hamiltoniaan vectorveld de bekende vorm

$$X_H(p, q) = \left(-\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p} \right)$$

heeft. De allerbelangrijkste opmerking hierbij is dat het bestaan van oplossingen van deze vergelijkingen op een regulier energieniveau volledig bepaald wordt door het onderliggende oppervlak en de symplectische structuur, en onafhankelijk is van de functie H . Met andere woorden: als H en G twee verschillende energiefuncties zijn die S als regulier niveau hebben, dan komen X_H en X_G op een repa-



Figuur 4 Een stervormig hyperoppervlak is in elke punt transversaal op een radiale stroming

rametrisatie na overeen en hebben daarom dezelfde integraalkrommen (=banen). (In de taal van de differentiaalmeetkunde zijn deze twee vectorvelden secties van de zogenoemde *karakteristieke lijnbundel*, die gedefinieerd wordt als kern van de beperking van de symplectische vorm tot S .)

De vraag die enkele van de meest interessante recente ontwikkelingen in de Hamiltoniaanse dynamica in gang heeft gezet, is die van het bestaan van *periodieke* oplossingen van $\dot{x}(t) = X_H(x(t))$ op een bepaald energieniveau S . Onafhankelijkheid van de specifieke keuze van Hamiltoniaan H betekent dat het zinvol is om de vraag als volgt te stellen: gegeven (M, ω) en S , heeft S periodieke banen?

Naar existentie van periodieke banen is veel onderzoek verricht, door bijvoorbeeld Poincaré, Lyapunov, Moser, Weinstein en vele andere. Deze resultaten zijn echter lokaal van karakter, terwijl ons doel is om globale periodieke banen te vinden: daarom noemen wij hier alleen het pionierswerk van Lyapunov over de continuering van normal modes [4].

De eerste belangrijke globale existentiële resultaten werden bewezen door Rabinowitz en Weinstein voor het geval van stervormige, respectievelijk convexe hyperoppervlakken in de standaard symplectische euclidische ruimte $\mathbb{R}^{2n}$. De stelling van Rabinowitz ([5]) luidde: elk stervormig hyperoppervlak in de standaard symplectische euclidische ruimte $\mathbb{R}^{2n}$ heeft een periodieke baan.

Omdat stervormig een heel beperkende voorwaarde is, probeerde men natuurlijk de essentiële meetkundige eigenschappen van deze klasse van hyperoppervlakken op te sporen. De volgende opmerking wijst al in de juiste richting: als $S \subset (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ stervormig is, dan is S in alle punten transversaal op de

stroming van het vectorveld

$$Y = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(p_i \frac{\partial}{\partial p_i} + q_i \frac{\partial}{\partial q_i} \right).$$

Zie ook Figuur 4. Transversaliteit betekent dat in elk punt x van het oppervlak de vector $Y(x)$ niet in de raakruimte aan het oppervlak in dat punt ligt. Bovendien wordt ω_0 door de stroming van Y bewaard op een exponentiële term na (in andere woorden, het symplectische volume is stijgend langs de stroming).

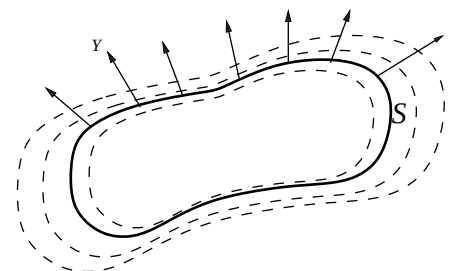
Het vermoeden van Weinstein

Een dergelijke opmerking heeft Weinstein waarschijnlijk geïnspireerd om het concept *contacttype* hyperoppervlak in te voeren. Dit is een generalisatie van convex en stervormig tegelijk, die invariant is onder transformaties die de symplectische structuur behouden (*symplectische transformaties*). Een compact hyperoppervlak S in een symplectische variëteit (M, ω) wordt contacttype genoemd als er een vectorveld Y bestaat, gedefinieerd in een omgeving van S en in alle punten van S transversaal op S , met de eigenschap dat $\mathcal{L}_Y \omega = \omega$. Hierin is $\mathcal{L}_Y$ de Lie-afgeleide in de richting van Y en voor de stroming ϕ_t van Y volgt er dat $\phi_t^* \omega = e^t \omega$. Een vectorveld met deze eigenschap heet een *Liouville-vectorveld*. Zie Figuur 5.

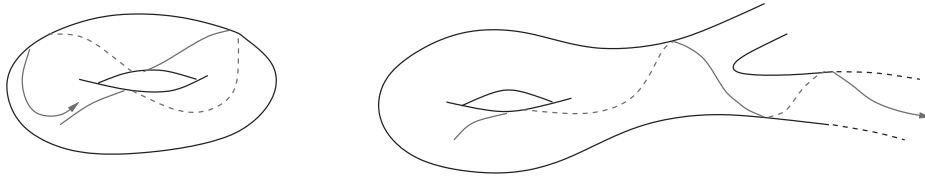
Op basis van dit inzicht kon Weinstein in [9] ook zijn beroemde vermoeden formuleren:

Vermoeden van Weinstein (1978). *Elk contacttype hyperoppervlak heeft een periodieke baan.*

Kenmerkend voor contacttype oppervlakken — en een goede indicatie dat contacttype een geschikte voorwaarde is om het bestaan van periodieke banen aan te tonen — is het feit dat er altijd een 1-parameter-familie van zulke hyperoppervlakken bestaat die dezelf-



Figuur 5 De stroming van het Liouville-vectorveld geeft een *foliatie*, dat wil zeggen een opdeling van een omgeving van S in 'bladeren' die gladde hyperoppervlakken zijn, alle diffeomorf met S : de dynamica is dezelfde op elk hyperoppervlak (bijna-bestaan $\Rightarrow$ bestaan)



Figuur 6 Op begrensde energieoppervlakken is bijna elke baan recurrent, terwijl op onbegrensde niveaus de recurrentie stelling van Poincaré niet meer van toepassing is en banen 'naar oneindig' kunnen wegllopen

de dynamica delen. Dus als S een contacttype hyperoppervlak is en we kunnen aantonen dat er een periodieke baan bestaat die voldoende dicht bij S ligt, dan volgt automatisch dat S zelf een periodieke baan heeft. Merk op dat, dankzij de onafhankelijkheid van dit probleem van de keuze van Hamiltonfunctie, wat we hier verstaan onder 'dynamica' de ontwikkeling in tijd is van het systeem geassocieerd met een willekeurige functie H die S als reguliere niveauverzameling heeft.

In 1986 bewees Viterbo het vermoeden van Weinstein voor compacte hyperoppervlakken in $\mathbb{R}^{2n}$ [8]. In zijn bewijs gebruikt hij de vrijheid om een geschikte Hamiltonfunctie te kiezen en identificeert hij periodieke oplossingen van het desbetreffende systeem van vergelijkingen met kritieke punten van een functionaal (de 'actie') gedefinieerd op de vrije lusruimte van de variëteit. Ondanks dat *niet-compacte* hyperoppervlakken heel natuurlijk ontstaan als energieoppervlakken (problemen met een hogere orde Lagrangiaan, singulaire potentialen, geodeten in een ruimte met Lorentzmetriek...), is het resultaat van Viterbo niet meer geldig als we de aanname van compactheid laten vallen. Het is hoogstwaarschijnlijk intuïtief duidelijk dat het bestaan van periodieke banen op niet-compacte hyperoppervlakken een moeilijker probleem is dan op compacte energieniveaus. *Poincaré's recurrentie stelling* geeft deze intuïtie een nauwkeurige wiskundige uitdrukking, door te beweren dat bijna elke baan op een compact energieoppervlak uiteindelijk willekeurig dicht bij zijn beginpunt terugkomt. Zie Figuur 6.

In [7] lukte het ons om een aantal geometrische en topologische voorwaarden te formuleren die leiden tot een bewijs van het vermoeden van Weinstein voor het geval van niet-compacte *mechanische hyperoppervlakken* in $\mathbb{R}^{2n}$, dat wil zeggen hyperoppervlakken die als energieniveau ontstaan van Hamiltonianen die bestaan uit kinetische en potentiële energie. Deze voorwaarden impliceren in het bijzonder dat de oppervlakken van contacttype moeten zijn. Ons resultaat geldt bijvoorbeeld in het geval van asymptotisch kwadratische potentiële energie.

Contactvariëteiten en Reeb-dynamica

Als eerstvolgende stap in de richting van verdergaande generalisatie van de resultaten voor periodieke banen, begon men aandacht te schenken aan de eigenschappen van hyperoppervlakken van contacttype die onafhankelijk kunnen worden beschouwd van een bepaalde inbedding in een symplectische variëteit. Als S een hyperoppervlak is van contacttype en Y een Liouville-vectorveld voor S , dan heet de kern van de 1-vorm λ gedefinieerd door $\lambda(-) = \omega(Y, -)$ een *contactstructuur* op S . De kern van $d\lambda$ is 1-dimensionaal en daarom kan op een eenduidige manier een vectorveld X_λ worden gedefinieerd (het *Reeb-vectorveld*) als voortbrenger van deze kern, genormaliseerd zodat $\lambda(X_\lambda) = 1$. De periodieke banen van het Hamiltoniaanse vectorveld op S komen overeen met de periodieke banen van het Reeb-vectorveld en het vermoeden van Weinstein voor hyperoppervlakken van contacttype kan daarom worden geherformuleerd als een vermoeden over het bestaan van periodieke banen van de Reeb-stroming op een *contactvariëteit*.

Intrinsieke versie van het vermoeden van Weinstein. *Voor elke gesloten variëteit van oneven dimensie N met contactvorm λ heeft het Reeb-vectorveld een periodieke baan.*

In deze (meer algemene) vorm is het vermoeden tot nu toe alleen voor gesloten,

3-dimensionale variëteiten bewezen, een indrukwekkend resultaat van Taubes [6].

Stelling (Taubes, 2007). *Het vermoeden van Weinstein geldt voor alle gesloten 3-dimensionale variëteiten.*

Eerdere belangrijke resultaten zijn te danken aan Hofer, die in [3] het vermoeden voor de 3-dimensionale sfeer bewees (en in feite voor elke *overtwisted* contact 3-variëteit).

Stelling (Hofer, 1993). *Het vermoeden van Weinstein geldt voor de 3-sfeer S^3 .*

Het bewijs van Hofer is gebaseerd op zogenaamde *J-holomorfe krommen* (of pseudo holomorfe krommen).

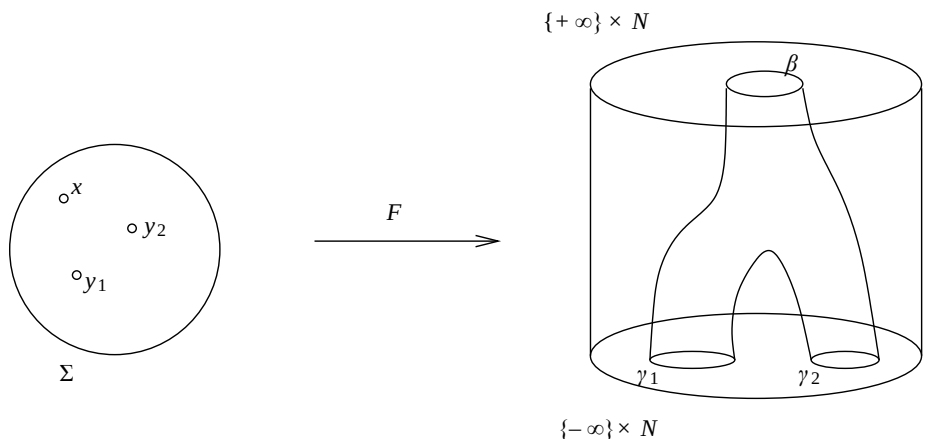
J-holomorfe krommen

Als J een bijna-complexe structuur is op een variëteit M , dan geeft dit ons het begrip van complexe vermenigvuldiging voor raakvectoren: $J^2v = -v$ voor elke raakvector v aan M . Lokaal ziet zo'n structuur eruit als de standaard bijna-complexe structuur $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ op $\mathbb{R}^{2n}$ (als wij $\mathbb{R}^{2n}$ met $\mathbb{C}^n$ identificeren, is dit gewoon het product met de imaginaire eenheid i).

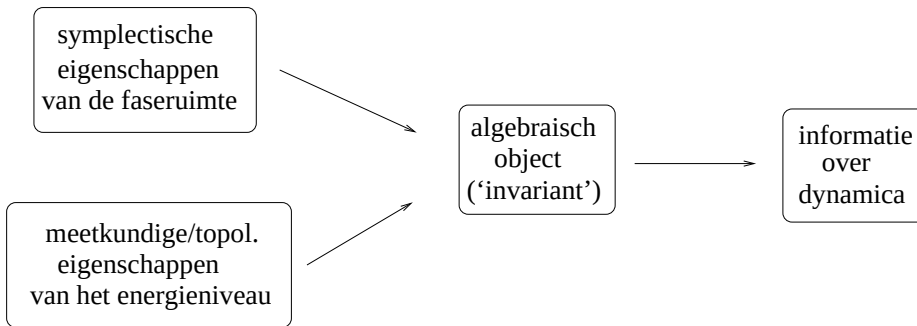
Als Σ een Riemann-oppervlak met holomorfe structuur j is, dan heet een afbeelding $u : \Sigma \rightarrow M$ een *J-holomorfe kromme* als zijn differentiaal complex lineair is: $du \circ j = J \circ du$. Op het niveau van raakruimtes betekent dit dat voor elke $x \in \Sigma$ het diagram hieronder commutatief is:

$$\begin{array}{ccc} T_x \Sigma & \xrightarrow{j_x} & T_x \Sigma \\ \downarrow du(x) & & \downarrow du(x) \\ T_{u(x)} M & \xrightarrow{J_{u(x)}} & T_{u(x)} M \end{array}$$

Als we du ontleden in zijn complex-lineaire



Figuur 7 Een *J*-holomorfe sfeer met 3 'punctures' in de symplectisatie van de contact-variëteit N



Figuur 8 Schematische weergave van de werking van homologietheorieën

en anti-lineaire delen, dan zien we dat u J -holomorf is dan en slechts dan als het anti-lineaire deel nul is:

$$\bar{\partial}_J u = \frac{1}{2}(du + J \cdot du \cdot j) = 0.$$

Door holomorfe lokale coördinaten $z = s + it$ voor Σ te kiezen, kunnen wij dit uitdrukken als

$$\partial_s u + J(u)\partial_t u = 0$$

en op deze manier, voor $\mathbb{C}^n$ met bijna-complexe structuur gegeven door vermenigvuldiging met i , vinden we de standaard Cauchy–Riemann vergelijkingen terug, voor afbeeldingen $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$. Dit verklaart waarom de vergelijkingen van J -holomorfe krommen vaak ook *verstoorde Cauchy–Riemann vergelijkingen* worden genoemd.

Gegeven een contactvariëteit (N, λ) is de *symplectisatie* van N de variëteit $M = \mathbb{R} \times N$ met symplectische vorm $\omega = d(e^t \lambda)$, waarbij t de $\mathbb{R}$ -coördinaat is. Het bovengenoemde resultaat van Hofer, het bewijs van het vermoeden van Weinstein voor de 3-sfeer, is op het volgende idee gebaseerd: voor een geschikte compatibele bijna-complexe structuur J kij-

ken wij naar J -holomorfe krommen in $\mathbb{R} \times N$; dat wil zeggen, wij beschouwen J -holomorfe afbeeldingen

$$F : (\Sigma, j) \longrightarrow (\mathbb{R} \times N, J)$$

waarbij Σ nu een gesloten Riemann-oppervlak is, met een eindig aantal gaten ('punctures'). Figuur 7 geeft een indruk van hoe een dergelijke afbeelding eruit zou kunnen zien.

Onder bepaalde geschikte aannames, bijvoorbeeld *eindige energie*, convergeert het beeld van F rond elk gat asymptotisch (voor $t \rightarrow +\infty$ of $-\infty$) naar een cilinder over een periodieke Reeb-baan van N . Op deze manier kunnen we uit een existentieresultaat voor oplossingen van de Cauchy–Riemann vergelijkingen met storingsterm (een systeem dus van partiële differentiaalvergelijkingen) een existentieresultaat afleiden voor periodieke oplossingen van een gewone differentiaalvergelijking. Op het eerste gezicht lijkt dit misschien niet de meest natuurlijke manier om het probleem te benaderen (een partiële in plaats van een gewone differentiaalvergelijking onderzoeken maakt het leven meestal niet makkelijker!). Toch heeft het zich bewezen als een heel efficiënte methode, die in

staat is bepaalde moeilijkheden te overwinnen die andere methodes onbruikbaar maken.

Terwijl in het werk van Hofer oplossingen voor de verstoorde Cauchy–Riemann vergelijkingen worden geconstrueerd met directe, ad-hocmethodes, is op de achtergrond de laatste jaren een homologietheorie verschenen. Met oneindig-dimensionale Morse-theorie als model kunnen we aan elke contactvariëteit een algebraïsch object associëren (een ring of een algebra) dat de periodieke Reeb-banen als voortbrengers heeft, modulo een aantal relaties die kunnen worden bepaald door te kijken naar J -holomorfe krommen die deze banen in de symplectisatie van N verbinden (in feite kunnen wij deze krommen 'tellen'). Als dit algebraïsche object niet identiek aan nul is, dan moet S een periodieke baan hebben. Heel schematisch kunnen we deze homologietheorieën beschouwen als uitkomst van een grote 'gereedschapskist' (met veel harde analyse en meetkunde als inhoud), dat de geometrische en topologische informatie over een bepaald energieniveau S en zijn contactstructuur verandert in een algebraïsch object, dat ons vervolgens iets kan vertellen over de dynamica op S . Zie Figuur 8.

Deze methode heeft zich in de afgelopen jaren enorm ontwikkeld en begint nu ook heel goed te werken in het geval van compacte contactvariëteiten. Het blijft echter een uitdaging om de methode te laten werken voor niet-compacte energieoppervlakken: dit onderwerp heeft tot nu toe weinig tot geen aandacht gekregen. Desondanks is het ontzettend interessant, zowel vanuit het oogpunt van de wiskunde als vanuit het oogpunt van de dynamica en de toepassingen in de dynamica. ←

Referenties

- 1 A. Floer, *Symplectic fixed points and holomorphic spheres*, Comm. Math. Phys. **120** (1989), no. 4, 575–611. MRMR987770 (90e:58047)
- 2 M. Gromov, *Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. **82** (1985), 307–347.
- 3 H. Hofer, *Pseudoholomorphic curves in symplectizations with applications to the Weinstein conjecture in dimension three*, Invent. Math. **114** (1993), no. 3, 515–563. MRMR1244912 (94j:58064)
- 4 A.M. Lyapunov, *Problème général de la stabilité du mouvement*, Ann. Sc. Fac. Toulouse **2** (1907), 203–474.
- 5 P.H. Rabinowitz, *Periodic solutions of Hamiltonian systems*, Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978), no. 2, 157–184. MR0467823 (57 #7674)
- 6 C.H. Taubes, *The seiberg-witten equations and the weinstein conjecture*, Geom. Topol. **11** (2007), 2117–2202.
- 7 J.B. van den Berg, F. Pasquotto, en R.C. Vanderhorst, *Closed characteristics on non-compact hypersurfaces in $\mathbb{R}^{2n}$* , Math. Ann. **343** (2009), no. 2, 247–284. MRMR2461255
- 8 C. Viterbo, *A proof of Weinstein's conjecture in $\mathbb{R}^{2n}$* , Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **4** (1987), no. 4, 337–356.
- 9 A. Weinstein, *On the hypotheses of Rabinowitz' periodic orbit theorems*, J. Differential Equations **33** (1979), no. 3, 353–358. MRMR543704 (81a:58030b)