Frans Oort
Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
Postbus 80.010
3508 TA Utrecht
f.oort@uu.nl

Maatschappij

Abelprijs 2010 voor John Tate

De Amerikaanse wiskundige John Tate ontving op 25 mei 2010 de Abelprijs uit handen van koning Harald V van Noorwegen. De Abelprijs bestaat sinds 2003 en wordt jaarlijks toegekend aan een zeer verdienstelijk wiskundige. Het Abelprijscomité roemt Tate vanwege de grote invloed die zijn werk heeft op de getaltheorie. In dit artikel beschrijft Frans Oort de persoon John Tate en zijn verdiensten voor de wiskunde.

De hoogste onderscheiding in de wiskunde is de Fields-medaille, bedoeld voor wiskundigen die een bijzondere prestatie geleverd hebben, en die de leeftijd van 40 jaar nog niet bereikt hebben. Toen Andrew Wiles het goede bewijs van Fermats laatste stelling gevonden had, was hij (net) ouder dan 40 jaar. We vroegen ons af of hij de Fields-medaille zou krijgen. Speciaal voor die gelegenheid werd de International Mathematical Union 'Silver Plaque' gemaakt om dat werk van Wiles te eren. Ik vond dat een charmante manoeuvre: de intentie van de Fields-medaille intact laten, en toch een mogelijkheid hebben om een uitzonderlijke prestatie te memoreren.

Om toch ook een equivalent van de Nobelprijs te hebben wordt vanaf 2003 de Abelprijs uitgereikt.[1] De Abelprijs 2010 werd uitgereikt aan John Tate "for his vast and lasting impact on the theory of numbers". Op 8 oktober 2010 werd dit gevierd op een bijeenkomst in Leiden. Dit artikel is een samenvatting van twee voordrachten die ik daar gaf.

In de eerste drie paragrafen zal ik iets zeggen over de persoon en het werk van Tate.

Het is ondoenlijk om ook een representatief beeld van zijn verdiensten te schetsen. Maar laat ik proberen om duidelijk te maken dat Tate niet alleen stellingen bewees, maar vooral ook een invloed heeft op de moderne wiskunde doordat hij nieuw gereedschap construeerde. Om dat te illustreren zal ik in de volgende drie paragrafen een klassiek meetkundig-analytische techniek bespreken. Echter, zoals de ervaring ons leert, is deze niet toepasbaar in de algebraïsche getaltheorie.

In de laatste drie paragrafen laat ik zien hoe Tate op het idee kwam om het klassieke begrip van 'perioden-rooster' te vervangen door wat we nu het 'Tate-moduul' noemen.

Moderne getaltheorie maakt gebruik van dit begrip.[2] We hoeven maar te denken aan het bewijs van Faltings (1983) van drie grote vermoedens in de aritmetische meetkunde, of te denken aan het bewijs dat Wiles gaf van Fermats laatste stelling (1995), doordrenkt met Galois-representaties op een Tate-moduul. Nu zult u zeggen dat zulke Galois-representaties al eerder bestudeerd werden. Maar het is het werk van Tate, zie bij voorbeeld [24] en [25], dat ons eens te meer overtuigt dat dit de juiste weg is.

Zo ga ik voorbij aan al die begrippen waar de naam van Tate aan gehecht is, zoals bij voorbeeld: Tate-cohomologie, Tate-dualiteit, Barsotti-Tate groepen, Tate-krommen, het Tate-motief (het Tate-moduul), de Tate-'twist', Hodge-Tate theorie, het algoritme van Tate, de Néron-Tate hoogte, Lubin-Tate groepen, Mumford-Tate groepen, de Tate-isogeniestelling, Honda-Tate theorie, Serre-Tate theorie, Tate-Shafarevich groepen, Poitou-Tate afbeeldingen, de Tate-Oort classificatie, het Sato-Tate vermoeden, het Tate-vermoeden voor cykels. Elk van deze begrippen: een wereld van ideeën.

*Voetnoten met verdere toelichting zijn opgenomen aan het eind van dit artikel. Voor onderdelen met een * is wat meer voorkennis nodig.*

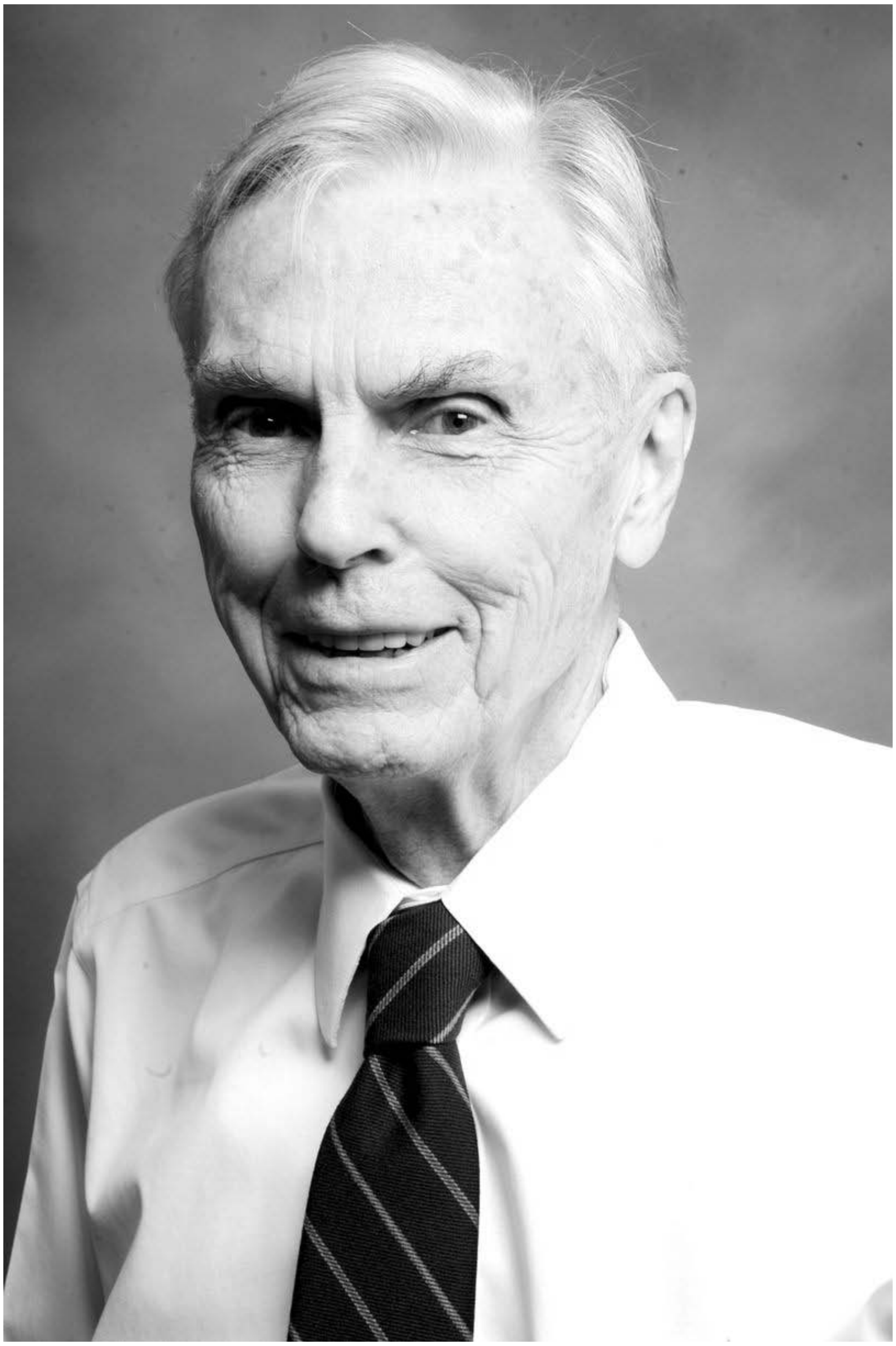
Bescheiden en niet gemakkelijk publicerend

John Tate werd geboren op 13 maart 1925 in Minneapolis, Minnesota.[3] In 1950 promoveerde hij in Princeton bij Emil Artin. Zijn proefschrift 'Fourier analysis in number fields, and Hecke's zeta-functions', wel circulerend onder specialisten, werd pas in 1967 in de proceedings 'Algebraic Number Theory' (Cassels en Fröhlich) gepubliceerd. Tate was van 1954–1990 verbonden aan Harvard University, en van 1990–2009 aan de University of Texas. Hij ontving in 1956 de Cole Prize van de American Mathematical Society, in 1995 de Leroy P. Steele Prize van de American Mathematical Society en in 2002/03 de Wolf Prize in Mathematics.

John Tate is een bescheiden, innemende persoon, bereid zijn wiskundig gedachtenleven te delen met anderen; dat blijkt ook al uit het feit dat hij met 29 verschillende coauteurs publiceerde. Originele ideeën kwamen niet steeds in een vorm die voor Tate zelf een publicatie rechtvaardigde. Vooral in het begin publiceerde hij weinig. Voor zijn eerste aanstelling in Harvard zie ik maar vijf publicaties. In [26] geeft Tate zelf de verklaring: "I didn't write easily and didn't get around publishing; I was always interested in thinking about the next problem."

Een mooie tegenstelling heb ik altijd gevonden in de manier van schrijven van Tate enerzijds en Jean-Pierre Serre anderzijds. Tate kon een college geven, halverwege voor het bord heen en weer lopend terwijl hij zei: "Wat wil ik eigenlijk bewijzen?" Maar dan was aan het eind van het uur de intuïtie onderbouwd, en het resultaat was er; zo kregen we een kijkje hoe zijn gedachten een weg zochten. Wat een verschil met Serre, die ons de indruk geeft dat wat hij bedenkt direct in publiceerbare, heldere vorm klaar te hebben. Dat blijkt wel uit het verhaal dat vertelt hoe 's avonds op een conferentie Serre en twee anderen aan de bar wat na zaten te praten en te fantaseren, "oh, als dat toch eens waar zou kunnen zijn ... ". De andere twee gingen slapen, en vonden de volgende ochtend hun gezamenlijke artikel uitgetypt, onder hun deur doorgeschoven; het kon zo naar de drukker. Heel anders dan Tate die aarzelde, schaafde, herzag, een resultaat niet wilde publiceren omdat het wellicht nog beter kon. Maar wat er dan tenslotte uitkwam, gaf mogelijkheden waar anderen niet verder waren gekomen. Je kon zien hoe Serre en Tate elkaar stimuleerden, samen dingen ontwikkelden. Hun artikel [23] staat bij Tate als meest geciteerde artikel op zijn publicatielijst.

Een anecdote. Uit de folklore vermeld ik het volgende voorval (onlangs heb ik de juistheid hiervan nog gecontroleerd). Toen Tate een aantal jaren aan Harvard University verbonden was, kreeg hij het aanbod om als Full Professor naar Princeton te komen, waar zijn promotor E. Artin tot 1958 werkte. Oscar Zariski was jarenlang de inspirator van de algebraïsche meetkunde aan Harvard. Ik kende hem als een stimulerende persoon, die de juiste smaak had voor goede wiskunde (hij haalde Grothendieck voor bezoeken naar Harvard), en die een persoonlijke en wiskundige invloed had, vooral op jonge mensen daar. Zariski wilde graag Tate in Harvard houden, ging naar de dekaan, en zei dat Tate nu Full Professor aan Harvard University moest worden. Daar kreeg hij weinig gehoor, want de lijst van publicaties van Tate was ontoereikend. "Maar hij heeft veel ongepubliceerd werk." Dat moest Zariski dan maar eens laten zien. Het verhaal gaat dat Zariski alle assistenten bijeen riep. Ze moesten doorwerken tot ze



John Tate

een groot aantal artikelen gevonden hadden in de bibliotheek, waar naar ongepubliceerde resultaten van Tate verwezen werd (Google bestond toen nog niet). De vasthoudendheid van Zariski werd beloond: die week nog lag er een lijst van artikelen met een dergelijke verwijzing, en Tate werd tot Full Professor aan Harvard benoemd, waar hij bleef tot 1990.

Centrale begrippen

De bijdrage van Tate aan de wiskunde is niet alleen gelegen in artikelen en resultaten, maar vooral ook in begrippen die hij ontwikkelde. Waarschijnlijk zou het bespreken van zijn proefschrift, een vernieuwing in de harmonische analyse en de getaltheorie, op zijn plaats zijn. Maar dat vergt heel wat voorkennis. In het tweede gedeelte van dit artikel zal ik proberen na te gaan hoe een klassiek begrip, centraal in meetkunde en analyse, uiteindelijk niet geeft wat je nodig hebt in de moderne aritmetische meetkunde. We zien daar hoe Tate het klassieke begrip 'periodenrooster' Λ vervangt door het 'Tate-moduul'

$T_\ell(A)$, inziet hoe je de complexe structuur op $\Lambda \otimes \mathbb{R}$ kunt vervangen door de Galois-structuur op eindige quotiënten van Λ. Zo krijgen we dan een hulpmiddel, waar inmiddels veel resultaten mee bewezen zijn, en waarvan de draagwijdte nog verder lijkt te gaan.

Tijdens een college van David Mumford aan Harvard maakt Tate een opmerking. Het gehoor staat perplex, zelfs Mumford heeft even nodig om de draagwijdte te overzien, maar dan zegt hij “this is my best student”. Dat inzicht maakte ook indruk op ons.

Zijn humor

Kenmerkend was de gemakkelijke manier van omgang, en de humor die daarbij kwam. Als Mumford en ik aan het werk waren, dan keek Tate even om de deur (hij bleef op de hoogte van wat anderen deden), zag op het bord wat we probeerden, schudde zijn hoofd, en mompelde “jullie komen niet veel verder.”

Bowdoin College 1967, Summer School in Algebraic Geometry. David Mumford geeft een serie voordrachten over abelse variëteiten (zijn boek was toen nog niet verschenen). Een afgeladen zaal, een sfeer vol met verwachtingen. Mumford schrijft op het bord wat hij als voorkennis veronderstelde. We worden er stil van; het is voor velen duidelijk dat alleen al de voorkennis ons ver boven de pet gaat. In die stilte plotseling een bankje dat hard omhoog klapt, iemand die met ferme pas de trappen van het amphitheater afloopt. Met de deurknop al in de hand zegt Tate: “David ik ga maar, want dit weet ik allemaal niet.” Een ontladend lachen in het gehoor, Mumford kijkt even verbaasd rond, maar zegt dat hij dat allemaal eerst zal uitleggen. Tate zegt dat hij dan maar blijft. Het werd een mooie serie voordrachten.

Na deze wat persoonlijke herinneringen geef ik een toelichting op één aspect van het werk van Tate.

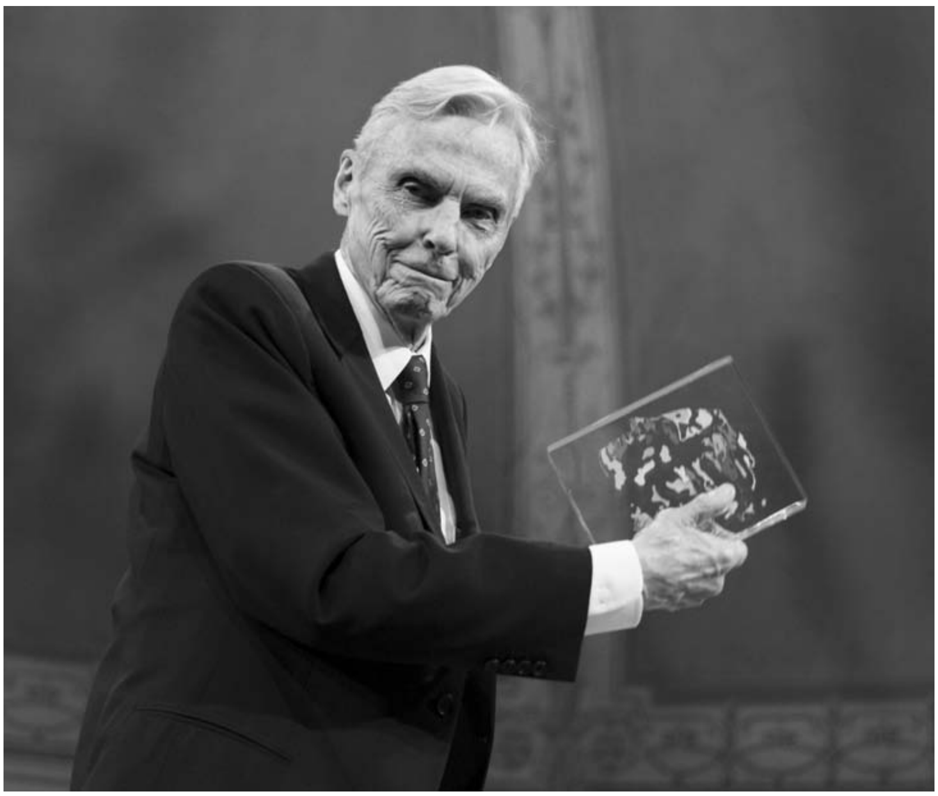
Abelse variëteiten

Definitie. Zij K een lichaam. Een abelse variëteit A over K is een projectieve groepsvariëteit over K.[4]

Bijvoorbeeld, elke elliptische kromme is een abelse variëteit. Omgekeerd kan elke abelse variëteit van dimensie één gezien worden als een niet-singuliere, vlakke kubische kromme met een K-rationaal punt: een elliptische kromme.

Het perioden-rooster

Een abelse variëteit A van dimensie g over $\mathbb{C}$ heeft een raakruimte $L \cong \mathbb{C}^g$ (in het punt $0 \in A$), de Lie-algebra van $A(\mathbb{C})$. Aan A voegen we toe $\Lambda \subset L$,



John Tate neemt de Abelprijs in ontvangst

$$A \longmapsto \left(\mathbb{Z}^{2g} \cong \Lambda \subset L \hookrightarrow A(\mathbb{C}) \cong L/\Lambda\right).$$

Hier volgt een constructie. De afbeelding

$$\exp : L \longrightarrow A(\mathbb{C})$$

is de exponentiaal-afbeelding uit de theorie van de commutatieve Lie-groepen. Omdat A een projectieve variëteit is, is $A(\mathbb{C})$ compact als topologische ruimte. Daaruit volgt dat $\Lambda := \mathrm{Ker}(\exp) \subset L$ een *rooster* is: een discrete ondergroep die de reële vectorruimte $\mathbb{R}^{2g} \cong \mathbb{C}^g$ voortbrengt.

Voor $\Lambda \subset L$ zijn er verschillende interpretaties. We kunnen L zien als de universele overdekking van de topologische groep $A(\mathbb{C})$. In die interpretatie is $\Lambda \cong \pi_1(A(\mathbb{C}), 0)$, de topologische fundamentaalgroep (en, allicht: de fundamentaalgroep van een topologische groep is commutatief).[5]

We kunnen ook Λ zien als een periodenrooster. Beschouw een Riemann oppervlak S, met $\Lambda = H_1(S, \mathbb{Z})$ de groep van klassen van gesloten cykels op S, en Ω de ruimte van alle holomorfe differentiaalvormen op S. Niels Henrik Abel bestudeerde integralen van differentiaalvormen op S. Hoe toepasselijk om de naam van Abel te memoreren bij het bespreken van de Abelprijs, vernoemd naar deze grote Noorse wiskundige. Zulke integralen zijn meerduidig als wel begin- en eindpunt maar niet het integratiepad is aangeven. Een $\gamma \in H_1(S, \mathbb{Z})$ geeft

$$\gamma : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \omega \longmapsto \int_\gamma \omega.$$

Met $L := \Omega^{\text{duaal}}$ geeft de ruimte L/Λ een waardebereik voor “abelse integralen”; zie [20], Chapter 11:

$$\int_P^Q \omega \in L/\Lambda, \quad P, Q \in S.$$

Hier komt de naam ‘abelse variëteit’ vandaan. Overigens zijn er veel abelse variëteiten die niet van een Riemann oppervlak komen.

Endomorfismen

We laten zien hoe nuttig deze manier van beschouwen is.

Stelling. *Voor en abelse variëteit A over $\mathbb{C}$, met $A(\mathbb{C}) = L/\Lambda$ geldt:*

$$\mathrm{End}(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Lambda \subset L).$$

De linkerkant lijkt lastig te berekenen. De rechterkant is eenvoudige lineaire algebra:

neem alle $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(L) \cong \mathrm{GL}(g,\mathbb{C})$ met $\varphi(\Lambda) \subset \Lambda$.[6]

Bewijs. Uit $A(\mathbb{C}) = L/\Lambda$ volgt

$$\mathrm{End}_{\mathrm{an}}(A(\mathbb{C})) = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Lambda \subset L).$$

Hier geeft 'an' aan dat we met analytische variëteiten werken. Omdat $A(\mathbb{C})$ compact is geeft een (diep) resultaat van Chow en Serre:

$$\mathrm{End}_{\mathrm{alg}}(A) = \mathrm{End}_{\mathrm{an}}(A(\mathbb{C})),$$

zie [21].[7,8,9] $\square$

Belangrijke opmerking. De afbeelding $\exp : L \longrightarrow A(\mathbb{C})$, respectievelijk $w : \mathbb{C} \longrightarrow E(\mathbb{C})$ zoals in [5], is een analytische afbeelding die verre van algebraïsch is (allicht niet: de kern is discreet, maar niet eindig). In het algemeen is het moeilijk om bij een analytische functie iets te zeggen over aritmetische eigenschappen van de waarden ervan. Daar is in de 19de en 20ste eeuw veel onderzoek naar gedaan. Maar de essentiële boodschap is: deze afbeeldingen geven niet informatie die we zoeken in de algebraïsche getaltheorie. Deze analytische theorie blijkt daar niet bruikbaar. Hoe zouden we bijvoorbeeld aritmetische eigenschappen van een elliptische kromme over $\mathbb{Q}$ kunnen geven als we voldoende informatie hebben over het perioden-rooster? Op dit grensvlak begint het doorslaggevende idee van Tate dat we gaan bespreken.

Torsiepunten

Zij K een lichaam; zij k een algebraïsch gesloten lichaam dat K bevat. Zij $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, niet deelbaar door de karakteristiek van K. Zij A een abelse variëteit over K van dimensie g. Dan geldt:

$$(n\text{-torsie}) \quad A(k)[n] \cong (\mathbb{Z}/n)^{2g};$$

hier staat $X[n]$ voor de kern van vermenigvuldigen met n op een abelse groep X.

Opgave. Neem aan $\mathbb{Q} \subset K$, gebruik $A(\mathbb{C}) = L/\Lambda$, als boven, en bewijs de uitspraak (n-torsie) hierboven.[10]

Deze groep heeft nog een belangrijke extra structuur. Schrijf

$$G_K = \mathrm{Aut}(\overline{K}/K),$$

de groep van lichaams-automorfismen die de identiteit zijn op elementen van K. Dit heet de absolute *Galois-groep* van K. In de situatie als hierboven is er een natuurlijke werking van G_K op $A(k)[n]$:

$$\rho = \rho_{A,K,n} : G_K \longrightarrow \mathrm{Aut}(A(k)[n]) \cong \mathrm{GL}(2g, \mathbb{Z}/n).$$

Dit kunnen we bij voorbeeld als volgt inzien. Een projectieve inbedding $A \subset \mathbb{P}^N_K$ geeft $A(k) \subset \mathbb{P}^N(k)$ en $A(k)[n] \subset \mathbb{P}^N(\overline{K})$. De werking van G_K krijgen we door deze groep op de coördinaten van de punten van A te laten werken.[11,12]

We weten dat voor $A(\mathbb{C}) = L/\Lambda$ er een isomorfisme

$$\Lambda/n\cdot\Lambda \cong A(\mathbb{C})[n]$$

is. Tate leert ons:

- *vergeet* de complexe structuur op $\Lambda \otimes \mathbb{R}$, en
- *vervang* dit door de werking van G_K op $A(\mathbb{C})[n]$ voor alle n.

Het Tate-moduul

Zij $K \subset k$ als boven, en A een abelse variëteit over K. We kiezen een priemgetal ℓ dat niet gelijk is aan de karakteristiek van K. Het Tate-ℓ-moduul $T_\ell(A)$ is de projectieve limiet van alle $G_i = A[\ell^i]$. Voor lezers die zich niet willen verdiepen in inductieve en projectieve limieten: het doet er niet zoveel toe wat we kiezen. Het enige wat telt, is dat we $\{A[\ell^i] \mid i > 0\}$ beschouwen: we nemen alle torsie bij elkaar voor alle machten van ℓ.[13]

Als $K \subset \mathbb{C}$, dan is er een isomorfisme

$$T_\ell(A)(k) \cong \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell.$$

Hier is het belangrijke idee:
(Klassiek): Voor A over $\mathbb{C}$ beschouwen we $\Lambda \cong \mathbb{Z}^{2g}$ en een complexe structuur gegeven door $\Lambda \otimes \mathbb{R} \cong \mathbb{C}^g$.
(Tate): Voor A over een willekeurig lichaam K beschouwen we $T_\ell(A)$ als een continu G_K-moduul.

We zullen zien dat klassieke resultaten, zoals in de paragraaf over endomorfismen met de techniek zoals in (Klassiek), ook verkregen kunnen worden met de opzet zoals in (Tate).

Nogmaals endomorfismen

In de vorige paragraaf over endomorfismen zagen we hoe we in de situatie (Klassiek) endomorfismen van abelse variëteiten over $\mathbb{C}$ berekenen. Maar, hoe doen we dit over een willekeurig lichaam?

Vermoeden (Tate, 1966). *Zij K een lichaam van eindig type over zijn priemlichaam. Dan is*

$$\mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{Z}_\ell \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(T_\ell(A))$$

een isomorfisme.[14,15]

Vergelijk deze algebraïsche uitspraak met het analytische analogon in de eerdere stelling.

Opgave.[16] De conditie 'van eindig type' kan niet worden gemist. Geef een voorbeeld van een situatie, waar K niet van eindig type is, en waar de conclusie van de stelling niet geldt.

Opgave.[17] Neem resultaten uit [19] aan en bewijs dat voor een elliptische krommen over een eindig lichaam geldt:

$$\mathrm{Hom}(D,E) \otimes \mathbb{Z}_\ell \cong \mathrm{Hom}(T_\ell(D), T_\ell(E)).$$

Dit werd bewezen door Mumford (ongepubliceerd) en het was voor Tate het startpunt van deze theorie, zie [24], page 134.[18]

Stelling (Tate, 1966; Faltings 1983). *Het bovenstaande vermoeden is juist.*

Een diepe stelling met veel toepassingen. Tate bewees dit voor abelse variëteiten over een eindig lichaam. Zarhin en Mori bewezen dit voor een functielichaam in karakteristiek p. Serre bewees dit voor sommige elliptische krommen over een getallenlichaam. Faltings bewees dit voor abelse variëteiten over een getallenlichaam in 1983, en later over functielichamen in karakteristiek nul. Kennen we andere stellingen waar details van het bewijs geleverd werden door drie verschillende Fieldsmedaillisten?

Dit vermoeden werd door Tate gegeneraliseerd, zie [25]: *Elementen in een étale cohomologiegroep invariant onder de werking van de Galois-groep komen van algebraïsche cykels.* Dit algemenere vermoeden is nog onbewezen. Maar we denken wel op de goede weg te zijn. Er zijn intrigerende verbanden met het Hodge-vermoeden. Tate zelf zegt daarover: "They have an air of compatibility." Deligne laat zien dat voor abelse variëteiten het Tate-vermoeden het Hodge-vermoeden impliceert (speciale gevallen bewezen door Pohlman en Milne). We hebben het gevoel dat we nu pas goed kunnen beginnen aan dit fascinerende stuk wiskunde. We zijn Tate dankbaar voor stellingen, inzichten en gereedschappen die hij ons aanreikt.

Dankwoord

Ik dank Hendrik Lenstra voor het kritisch doorlezen van een eerdere versie van dit artikel en voor zijn constructieve commentaar.

Noten en Referenties

1 Zie http://nl.wikipedia.org/wiki/Abelprijs

2 Het Abelprijscomité schrijft: "Many of the major lines of research in algebraic number theory and arithmetic geometry are only possible because of the incisive contributions and illuminating insights of John Tate."

3 Minneapolis geeft op de site van de stad een lijst van beroemde mensen die daar geboren zijn. Tate staat daar ook bij, tussen een popzanger en een worstelaar.

4 Dat wil zeggen dat er een immersie $A \subset \mathbb{P}^N_K$ is, zodanig dat dit een gesloten deelvariëteit geeft, dat $A \otimes \overline{K}$ irreducibel is, en dat A een groepsstructuur heeft gegeven door morfismen over K. Bewezen kan worden dat dit alles impliceert dat A de structuur van een commutatieve groepsvariëteit heeft. Maar daar komt de naam niet vandaan: voor een verdere uitleg zie de bespreking van abelse integralen in de paragraaf over het perioden-rooster.

5 Weierstrass construeerde deze theorie, voor het geval van $g = 1$, voor elliptische krommen, reeds lang geleden, en wel op een expliciete manier. De Weierstrass-$\wp$-functie is dubbelperiodiek over een rooster $\Lambda_\tau = \Lambda = \mathbb{Z}\cdot 1 \oplus \mathbb{Z}\cdot\tau$. De afbeelding

$$(\wp : \wp' : 1) = w : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$$

heeft als beeld de (Zariski-afsluiting van de) nulpuntenverzameling van $Y^2 = 4X^3 - g_2(\Lambda)X - g_3(\Lambda)$; dit is de differentiaal-vergelijking van de Weierstrass-$\wp$-functie, voor $X = \wp$, en $Y = \wp'$. Zo krijgen we een elliptische kromme. Bewezen kan worden dat elke elliptische kromme in deze vorm gebracht kan worden door een coördinaten-transformatie en, voor een geschikt gekozen τ, deze analytische parametrizatie toelaat.

6 Een voorbeeld: Zij E een elliptische kromme over $\mathbb{C}$; schrijf $\Lambda_E \cong \mathbb{Z}\cdot 1 \oplus \mathbb{Z}\cdot\tau$, met $\tau \in \mathbb{C}$, en $\tau \notin \mathbb{R}$. Dan geldt:
- als $\mathbb{Q}(\tau)$ niet een kwadratische uitbreiding van $\mathbb{Q}$ is, dan is $\mathrm{End}(E) = \mathbb{Z}$;
- als $[\mathbb{Q}(\tau) : \mathbb{Q}] = 2$, dan is $\mathrm{End}(E) \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}(\tau)$. In dit geval is $\mathrm{End}(E)$ een orde in $\mathbb{Q}(\tau)$.

7 Naar dit resultaat van Chow en Serre wordt meestal geciteerd als GAGA (géométrie algébrique et géométrie analytique), zie [21]. We gebruiken: een analytische deelvariëteit, gesloten in $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, is algebraïzeerbaar. Hier zien we hoe essentieel de compactheid is.

8 Compactheid in het laatste argument van het bewijs is essentiëel. Beschouw $\mathbb{G}_a = \mathbb{A}^1$, de additieve lineaire groep, en $\mathbb{G}_m = \mathbb{A}^1 - \{0\}$, de multiplicatieve lineaire groep. We zien dat de exponentiaal afbeelding

$$e : \mathbb{G}_a(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\} = \mathbb{G}_m(\mathbb{C}),\ x \longmapsto e^x$$

een homomorfisme is. Schrijf $G = \mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_m$. Het analytische isomorfisme

$$\begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : G(\mathbb{C}) \longrightarrow G(\mathbb{C})$$

is niet algebraïzeerbaar.

9 In [22], op pagina 108 geeft Serre een voorbeeld van twee algebraïsche groepen $H_1 = \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$ en H_2, een extensie van een elliptische kromme met $\mathbb{G}_a$, die niet isomorf zijn, maar waar $H_1(\mathbb{C}) \cong_{\mathrm{an}} H_2(\mathbb{C})$.

10 We geven een aanwijzing. Gebruik de exacte rij

$$0 \to \Lambda \to L \to A(\mathbb{C}) \to 0.$$

Op elk van de termen passen we $\times n$ toe. Het slangenlemma geeft dan een identificatie

$$\mathrm{Ker}(\times n : A(\mathbb{C}) \to A(\mathbb{C})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Coker}(\times n : \Lambda \to \Lambda).$$

11 Een detail: De groep G_K is een topologische groep: een subbasis voor de open verzamelingen wordt gegeven door inverse beelden van elementen in $\mathrm{Aut}(K'/K)$ onder $G_K \twoheadrightarrow \mathrm{Aut}(K'/K)$ voor alle normale, eindige uitbreidingen $K \subset K'$. De werking van G_K op de (discrete) eindige groep $A(k)[n]$ is continue. We zullen dit aspect verder onbesproken laten.

12 * Het groepenschema $A[n]$ enerzijds en het G_K-moduul $A(k)[n]$ anderzijds zijn equivalente begrippen.

13 De vereniging over alle inclusies

$$G_i \hookrightarrow G_{i+j} \subset A$$

zou voor de hand liggen. Dat wordt genoteerd als $A[\ell^\infty]$, de Barsotti-Tate groep. Maar het blijkt technisch gemakkelijker te werken om die 'binnenste-buiten' te keren, de limiet te nemen over alle natuurlijke afbeeldingen $\times\ell^i : G_{i+j} \twoheadrightarrow G_j$:

$$T_\ell(A) = \{\{a_i\}_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \mid a_i \in G_i := A(k)[\ell^i],\quad a_i = \ell\cdot a_{i+1}\}$$

.

We zien dat $T_\ell(A)(k)$ als groep isomorf is met $\mathbb{Z}_\ell^{2g}$. Hier is $\mathbb{Z}_\ell$ de groep (de ring) van ℓ-adische getallen. Uitleg: een element in de groep (of de ring) $\mathbb{Z}_\ell$ is een rij van coherent gekozen elementen in

$$\cdots \to \mathbb{Z}/\ell^{i+1}\cdot\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\ell^i\cdot\mathbb{Z} \to \cdots \to \mathbb{Z}/\ell^2\cdot\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\ell\cdot\mathbb{Z}.$$

Een element van $a \in T_\ell(A)(k)$ is een rij

$$\cdots \mapsto a_{i+1} \mapsto a_i \longmapsto \cdots \mapsto a_2 \mapsto a_1,$$

$$a_{i+1} \mapsto \ell\cdot a_{i+1} = a_i \in G_i.$$

14 'Van eindig type': er zijn eindig veel elementen van K zodanig dat K het kleinste lichaam is dat het priemlichaam $\mathbb{P}$ en diens elementen bevat. Een dergelijk lichaam is een eindige algebraïsche uitbreiding van een lichaam van eindige transcendentie graad over $\mathbb{P}$. Voor een dergelijk lichaam is G_K groot; bijvoorbeeld bevat een dergelijk lichaam maar eindig veel eenheidswortels. Elementen van $\mathrm{End}(T_\ell(A))$ zijn lineaire transformaties, elementen van $\mathrm{End}(T_\ell(A))(k) \subset GL(2g, \mathbb{Z}_\ell)$, die commuteren met de werking van G_K op $T_\ell(A)(\overline{K})$. Merk op dat elke algebraïsche variëteit gedefinieerd kan worden over een lichaam van eindig type.

15 In plaats van de formulering in het vermoeden kan ook gekozen worden voor de volgende equivalente vorm: *voor abelse variëtieten over een lichaam van eindig type over zijn priemlichaam geldt dat*

$$\mathrm{Hom}(A, B) \otimes \mathbb{Z}_\ell \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(T_\ell(A), T_\ell(B))$$

een isomorfisme is.

16 Als $K = \mathbb{C}$ dan is de rang van $\mathrm{End}(A)$ over $\mathbb{Z}$ ten hoogste $2g^2$ en de rang van $\mathrm{End}(T_\ell(A))$ over $\mathbb{Z}_\ell$ is $4g^2$. Hier is een ander voorbeeld. Neem $k = \overline{\mathbb{F}_p}$. Laat E een elliptische kromme zijn over k zodat $\mathrm{End}(E)$ rang twee over $\mathbb{Z}$ heeft; een dergelijke kromme heet 'gewoon'; bijna elke elliptische kromme over k is gewoon. In dit geval is $G_k = \{e\}$, en $\mathrm{End}(T_\ell(E))$ heeft rang vier over $\mathbb{Z}_\ell$.

17 * We geven een aanwijzing. Als de meetkundige Frobenius homomorfismen π_D en π_E niet geconjugeerd zijn, dan is $\mathrm{Hom}(T_\ell(D), T_\ell(E)) = 0$ en de uitspraak volgt in dit geval. Neem aan dat $\pi_D = \pi = \pi_E$; Deuring laat zien dat (D, π) en (E, π) gelift kunnen worden naar karakteristiek nul; daaruit volgt (complexe theorie) dat deze liften over $\mathbb{C}$ isogeen zijn; we concluderen dat D en E isogeen zijn over $\overline{\mathbb{F}_p}$ met een isogenie die Frobenius-invariant is; dan volgt dat D en E isogeen zijn; ook in dit geval volgt de uitspraak. Overigens, de bewijsmethode in [24] is niet een generalisatie hiervan.

18 Een voorbeeld: Zij $q = p^{2m}$, en $K = \mathbb{F}_q$ het bijbehorende eindige lichaam. Zij E een elliptische kromme over K met meetkundige Frobenius $\pi_E := (F_E)^{2m} = p^m$; een dergelijke kromme bestaat, een voorbeeld van een *supersinguliere kromme*. Merk op dat de Galois-groep G_K topologisch voortgebracht wordt door F^{2m}; dit is het homomorfisme $x \mapsto x^q$. We zien dat elementen van G_K op $\mathrm{End}(T_\ell(A)) \subset \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_\ell)$ in diagonaal vorm opereren, de commutant van die werking is de hele groep $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_\ell)$, en we concluderen dat de rang van $\mathrm{End}(E)$ over $\mathbb{Z}$ in dit geval vier is (wat Deuring al in 1941 bewees).

19 M. Deuring, *Die Typen der Multiplikatorenringe elliptischer Funktionenkörper.* Abh. Math. Sem. Hamburg **14** (1941), pp. 197–272.

20 H. Lange en C. Birkenhake, *Complex abelian varieties.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 302. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

21 J.-P. Serre, *Géométrie algébrique et géométrie analytique.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble 6 (1955–1956), pp. 1–42.

22 J.-P. Serre, *Groupes algébriques et corps de classes.* Publications de l'institut de mathématique de l'université de Nancago, VII. Hermann, Paris 1959.

23 J.-P. Serre en J. Tate, *Good reduction of abelian varieties.* Ann. Math. **88** (1968), pp. 492–517.

24 J. Tate, *Endomorphisms of abelian varieties over finite fields.* Invent. Math. **2** (1966), pp. 134–144.

25 J. Tate, *Algebraic cycles and poles of zeta functions.* 1965 Arithmetical Algebraic Geometry (Proc. Conf. Purdue Univ., 1963) pp. 93–110.

26 *Interview with John Tate* (Martin Raussen & Christian Skau). Newsletter EMS, **77**, September 2010, pp. 41–48.