

**Birgit van Dalen**

Mathematisch Instituut  
Universiteit Leiden  
Postbus 9512  
2300 RA Leiden  
bevandalen@gmail.com

**Quintijn Puite**

Faculteit Wiskunde en Informatica  
Technische Universiteit Eindhoven  
Postbus 513  
5600 MB Eindhoven  
g.w.q.puite@tue.nl

**Maatschappij**

# De Wiskunde Olympiade in zeven vragen

De Wiskunde Olympiade: iedereen heeft er wel eens van gehoord. Omdat je zelf als scholier ooit meegedaan hebt aan één of meer rondes van deze wedstrijd, omdat je verhalen van studenten hebt gehoord die het olympiadetrainingsprogramma doorlopen hebben, of omdat je collega's hebt die betrokken zijn bij de organisatie van de Internationale Wiskunde Olympiade (International Mathematical Olympiad, IMO) in 2011 in Nederland. Voor iedereen die nu wel eens wil weten hoe de olympiade precies in elkaar zit, hier zeven vragen en antwoorden, over alles van de eerste ronde tot en met IMO 2011 in Nederland. Birgit van Dalen en Quintijn Puite vertellen graag over alle ins en outs.

## **Vraag 1: Hoe zit de Nederlandse Wiskunde Olympiade in elkaar en hoeveel scholieren doen er mee aan deze wedstrijd?**

De eerste ronde van de wiskundeolympiade vindt elk jaar in januari plaats op havo/vwo-scholen in het land. Aan deze ronde doen zo'n 4000 leerlingen uit klas 1 tot en met 5 mee. De opgaven (zie een voorbeeldopgave in Fi-

guur 1) vereisen geen kennis van bovenbouwstof, maar wel een flinke dosis creativiteit en doorzettingsvermogen. De leerlingen uit verschillende jaarlagen krijgen dezelfde opgaven voor hun kiezen, maar om door te gaan naar de volgende ronde worden aan een vijfdeklasser andere eisen gesteld dan aan bijvoorbeeld een onderbouwleerling. De eerste ronde telt 700 winnaars, die uitgenodigd worden voor de tweede ronde. Deze vindt plaats in maart op de universiteiten van Amsterdam (2×), Delft, Eindhoven, Groningen, Leiden, Nijmegen, Rotterdam, Twente en Utrecht. De 150 besten van de tweede ronde nemen vervolgens in september deel aan de finale op de Technische Universiteit Eindhoven.

Tot voor kort bestond de wedstrijd uit alleen een eerste ronde en een finale; de tweede ronde is hier in 2010 tussengevoegd. Deze extra ronde is in eerste instantie ingevoerd om een zuiverder selectie voor de finale te krijgen. Maar het mes snijdt aan twee kanten. Zo krijgen door deze nieuwe tweede ronde maar liefst 700 leerlingen de positieve boodschap dat ze bovengemiddeld goed in wiskunde zijn, tegenover 150 voorheen. Verder gaat nu van vrijwel alle circa 250 deelnemende scholen wel een leerling door, waar docenten al opgetogen op hebben gereageerd.

## **Vraag 2: Wat is precies de rol van die tien universiteiten hierbij?**

De winnaars van de eerste ronde worden verdeeld over de tien genoemde universiteiten. Elke universiteit ontvangt dus zo'n 70 gemotiveerde leerlingen, die de tweede ronde daar komen doen. De leerlingen die daarbij zo goed presteren dat ze uitgenodigd worden voor de finale, komen bovendien nog vier middagen terug naar hun universiteit. Ze worden dan uitgebreid getraind in hoe je een wiskundig bewijs opschrijft en in onderwerpen als inductie, getaltheorie en meetkunde. Want waar de eerste ronde nog bestond uit multiple-choice-vragen en vragen waar een getal als antwoord voldoende is, moeten bij de finale volledige uitwerkingen gegeven worden.

De deelnemers zijn over het algemeen zeer enthousiast over deze finaletraining en genieten met volle teugen van alle nieuwe werelden die voor hen open gaan. Ook de kennismaking met de universiteit en de staf bevalt hen goed; soms komen zelfs ouders en docenten mee om even sfeer te proeven. Niet minder enthousiast zijn de verhalen van de universitaire docenten die deze groep leerlingen vier middagen onder hun hoede krijgen: zij vinden het fantastisch om de leergierigheid en gedrevenheid van deze uitzonderlijke jonge talenten te mogen voeden.

## **Vraag 3: Wat gebeurt er met de allergrootste talenten, de winnaars van de Nederlandse olympiade?**

De Nederlandse Wiskunde Olympiade eindigt met de finale in september, maar in juli is er vervolgens een Internationale Wiskunde

### **Eerste ronde januari 2009, opgave B2**

Het gehele getal  $N$  bestaat uit 2009 negens achter elkaar geschreven. Een computer berekent  $N^3 = (99999 \dots 99999)^3$ . Hoeveel negens bevat het uitgeschreven getal  $N^3$  in totaal?

### **Teamselectietest juni 2007, opgave 3**

Je hebt 2007 kaarten. Op elke kaart is een positief geheel getal kleiner dan 2008 geschreven. Als je een aantal (minstens 1) van deze kaarten neemt, is de som van de getallen op de kaarten niet deelbaar door 2008. Bewijs dat op elke kaart hetzelfde getal staat.

**Figuur 1** Een opgave uit de eerste ronde en een opgave uit de teamselectietest



Foto rechtsboven: de wedstrijdzaal van IMO 2009 in Bremen. Foto linksonder: het Nederlandse team voor IMO 2010 met op de achterste rij v.l.n.r. Madelon de Kemp, Guus Berkelmans, Daniël Kroes, Merlijn Staps en David Kok, en op de voorste rij v.l.n.r. Jeroen Huijben en Harm Campmans. Overige foto's achtereenvolgens: lancering van IMO 2011 met onder andere Robbert Dijkgraaf, staatssecretaris Van Bijsterveldt en wethouder Gerson van Amsterdam; leerlingen bij de training; leerling bij de tweede ronde in Eindhoven; trainer Julian Lyczak voor het bord tijdens de trainingsweek in Valkenswaard; de *leaders* van alle landen stemmen over welke opgaven geselecteerd moeten worden.

| januari      | maart        | mei en juni    | september | nov.–juni    | juni             |
|--------------|--------------|----------------|-----------|--------------|------------------|
| eerste ronde | tweede ronde | finaletraining | finale    | IMO-training | teamselectietest |
| 4000         | 700          | 150            | 30        |              | 6                |
| ★            | ★            | ⇒              | ★         | ⇒            | ★                |

**Figuur 2** Selectieproces vanaf eerste ronde tot de selectie van het IMO-team

Olympiade, waar de zes beste scholieren van Nederland naartoe afgevaardigd worden. Deze zes worden geselecteerd uit een groep van dertig, die uit de uitslag van de finale komt rollen. Bij benadering zijn dit de beste tien zesdeklassers, de beste tien vijfdeklassers en de beste tien leerlingen uit klas 2, 3 en 4. Zij doorlopen van november tot juni het IMO-trainingsprogramma. In drie trainingsdagen, twee trainingsweekenden en een afsluitende trainingsweek komen diverse wiskundige onderwerpen aan bod. Van elementaire technieken als invariantie, modulorekenen en het ladenprincipe tot meer geavanceerde onderwerpen zoals de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz, recurrente betrekkingen, oneindige afdaling en de cirkel van Apollonius. Onder tussen werken de deelnemers wekelijks aan oefenopgaven en oude IMO-opgaven, onder leiding van een trainingsstaf bestaande uit negen oud-deelnemers van de IMO.

In juni wordt het Nederlandse team voor de IMO bepaald door middel van een teamselectietest (zie een voorbeeldopgave in Figuur 1). Deze zes toptalenten hebben dan een training- en selectieproces van anderhalf jaar doorlopen, gerekend vanaf de eerste ronde (Figuur 2). Niet zelden hebben de gekozen teamleden zelfs meerdere jaren met de olympiade en de IMO-training meegedaan.

#### **Vraag 4: Gaan deze leerlingen uiteindelijk ook wiskunde studeren?**

Tijdens de IMO-training ontdekken de leerlingen vaak hoe leuk en mooi wiskunde is; ze gaan dan ook bijna zonder uitzondering allemaal wiskunde studeren. Met hun olympiade-

ervaring zijn sommige onderdelen van het eerstejaarscurriculum voor deze studenten een feest der herkenning. Omdat geen uitdaging groot genoeg is voor deze fanatiekelingen, volgen ze regelmatig ook alvast tweedejaarscolleges of doen ze een andere studie eraan, uiteenlopend van natuurkunde tot bijvoorbeeld vergelijkende taalwetenschap.

#### **Vraag 5: De IMO komt naar Nederland. Hoe gaat dat evenement eruit zien?**

In de zomer van 2011 vindt inderdaad de Internationale Wiskunde Olympiade voor het eerst in Nederland plaats. Zo'n 600 deelnemers uit circa 100 landen zullen hier op twee wedstrijddagen in Amsterdam de strijd om de medailles met elkaar aan gaan. Ongeveer de helft van de deelnemers krijgt een medaille, waarbij er circa 150 bronzen, circa 100 zilveren en circa 50 gouden plakken te verdelen zijn. Wie geen medaille behaalt maar wel minstens één van de zes opgaven volledig oplost, komt in aanmerking voor een eervolle vermelding. Naast de wedstrijd zelf, staat het programma voor de deelnemers in het teken van internationale ontmoetingen, met een openingsceremonie, diverse excursies en activiteiten, en een sluitingsceremonie (zie Tabel 1). Inclusief aankomst- en vertrekdag duurt het evenement voor hen en hun 100 directe begeleiders (de zogenaamde *deputy leaders*) negen dagen. Voor de 100 delegatieleiders (*leaders*) begint het evenement drie dagen eerder. Op een geïsoleerde locatie in regio Eindhoven maken zij uit een shortlist van 30 opgaven een geschikte selectie van 6 opgaven. Verder dragen zij zorg voor de officiële vertaling van

de opgaven, zodat elke leerling de opgaven in zijn moedertaal kan maken. Na de wedstrijd kijken de leaders ook het werk na, bijgestaan door hun deputy leaders, terwijl ondertussen ook een Nederlands contingent AiO's, post-docs en UD's het leerlingwerk nauwgezet bestudeert. In een twee dagen durend proces overleggen de leaders en Nederlandse nakijkers vervolgens hoeveel punten elk van de 3600 uitwerkingen waard is.

Al sinds Nederland in 2007 door de internationale jury als gastland is uitverkoren, zijn er vele mensen actief om dit grote evenement op touw te zetten. De organisatie is in de loop van de tijd flink gegroeid en inmiddels werken er tientallen mensen van diverse universiteiten en instituten mee (zie kader).

#### **Vraag 6: Hoe doet Nederland het meestal bij de IMO?**

Nederland behoort niet bij de landen die meestal de top tien bezetten. Dat zijn landen als China, Rusland, de Verenigde Staten en

#### Organisatoren IMO 2011 in Nederland

##### Bestuur

Robbert Dijkgraaf (UvA, KNAW)  
Frits Beukers (UU)  
Jan van Mill (VU)  
Harry Roumen (TU/e)

##### Organisatiecomité

Wim Berkelmans (VU)  
Birgit van Dalen (UL)  
Martijn de Graaff (Platform Bèta Techniek)  
Tom Koornwinder (UvA)  
Jelle Loois (ORTEC)  
Quintijn Puite (TU/e, HU)

##### Hoofdorganisatoren

Anick van de Craats (NFI) – *gidsen*  
Hans van Duijn (TU/e) – *juryvoorzitter*  
Karst Koymans (UvA) – *ICT*  
Larissa Krawczyk (Winford) – *excursies*  
Aad Loois – *accommodatie deelnemers*  
Ronald van Luijk (UL) – *nakijkproces*  
Freek van Schagen (VU) – *wedstrijd*  
Rozemarijn Schalkx (TU/e) – *leaders*  
Bart de Smit (UL) – *opgavenselectie*

| Datum            | Leaders                         | Deputy leaders        | Deelnemers |
|------------------|---------------------------------|-----------------------|------------|
| wo. 13 juli 2011 | Aankomsttag                     | —                     |            |
| do. 14 juli 2011 | Selectie opgaven                | —                     |            |
| vr. 15 juli 2011 | Selectie opgaven                | —                     |            |
| za. 16 juli 2011 | Selectie opgaven                | Aankomsttag           |            |
| zo. 17 juli 2011 |                                 | Openingsceremonie     |            |
| ma. 18 juli 2011 |                                 | Eerste wedstrijddag   |            |
| di. 19 juli 2011 |                                 | Tweede wedstrijddag   |            |
| wo. 20 juli 2011 | Correctie en vaststellen scores |                       | Excursie   |
| do. 21 juli 2011 | Correctie en vaststellen scores |                       | Excursie   |
| vr. 22 juli 2011 |                                 | Gezamenlijke excursie |            |
| za. 23 juli 2011 |                                 | Sluitingsceremonie    |            |
| zo. 24 juli 2011 |                                 | Vertrektag            |            |

**Tabel 1** Programma van IMO 2011

**DAG 1**

1. Bepaal alle functies  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  zodat de gelijkheid

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor$$

geldt voor alle  $x, y \in \mathbf{R}$ . (Hier staat  $\lfloor z \rfloor$  voor het grootste gehele getal kleiner dan of gelijk aan  $z$ .)

2. Zij  $I$  het middelpunt van de ingeschreven cirkel van driehoek  $\triangle ABC$  en zij  $\Gamma$  zijn omgeschreven cirkel. De lijn  $AI$  snijdt  $\Gamma$  nogmaals in het punt  $D$ . Zij  $E$  een punt op de boog  $BDC$  en zij  $F$  een punt op de zijde  $BC$  zo dat

$$\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2} \angle BAC.$$

Zij  $G$  het midden van het lijnstuk  $IF$ . Bewijs dat de lijnen  $DG$  en  $EI$  elkaar snijden op  $\Gamma$ .

3. Zij  $\mathbf{N}$  de verzameling van alle positieve gehele getallen. Bepaal alle functies  $g: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  zo dat

$$(g(m) + n)(m + g(n))$$

een kwadraat van een geheel getal is voor alle  $m, n \in \mathbf{N}$ .

**DAG 2**

4. Zij  $P$  een punt in het inwendige van de driehoek  $\triangle ABC$ . De lijnen  $AP$ ,  $BP$  en  $CP$  snijden de omgeschreven cirkel  $\Gamma$  van  $\triangle ABC$  nogmaals in respectievelijk de punten  $K$ ,  $L$  en  $M$ . De raaklijn aan  $\Gamma$  in  $C$  snijdt de lijn  $AB$  in  $S$ . Stel dat  $|SC| = |SP|$ . Bewijs dat  $|MK| = |ML|$ .

5. In elk van de zes dozen  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$  zit oorspronkelijk één munt. Er zijn twee types handelingen toegestaan:

Type 1. Kies een niet-lege doos  $B_j$  met  $1 \leq j \leq 5$ . Verwijder één munt uit  $B_j$  en voeg twee munten toe aan  $B_{j+1}$ .

Type 2. Kies een niet-lege doos  $B_k$  met  $1 \leq k \leq 4$ . Verwijder één munt uit  $B_k$  en verwissel de inhoud van de (mogelijk lege) dozen  $B_{k+1}$  en  $B_{k+2}$ .

Bepaal of er een eindige rij van zulke handelingen bestaat, zo dat daarna de dozen  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$  leeg zijn en de doos  $B_6$  precies  $2010^{2010}$  munten bevat. (Merk op dat  $a^{b^c} = a^{(b^c)}$ .)

6. Zij  $a_1, a_2, a_3, \dots$  een rij van positieve reële getallen. Verder is  $s \geq 1$  een bepaald geheel getal zo dat

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leq k \leq n-1\}$$

voor alle  $n > s$ . Bewijs dat er positieve gehele getallen  $\ell$  en  $N$  bestaan met  $\ell \leq s$  en zo dat  $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$  voor alle  $n \geq N$ .

**Figuur 3** De opgaven van IMO 2010

Japan. Nederland is wel aan de weg aan het timmeren. Dankzij het uitgebreide trainings- en selectieprogramma hebben we de laatste drie jaar een plek bij de bovenste helft kunnen veiligstellen, waar dat de acht jaar daarvoor niet gelukt was. We streven voor de thuiswedstrijd in 2011 zelfs naar een plek in de top 30.

Een land kan ook op een andere manier nog eer behalen bij een IMO: door een opgave in te zenden die geselecteerd wordt. In totaal worden elk jaar zo'n 150 opgaven ingezonden door de diverse landen, waarvan slechts zes het uiteindelijk schoppen tot de wedstrijd. Nederland heeft dit in het verleden regelmatig voor elkaar gekregen met opgaven van de hand van o.a. N.G. de Bruijn, Jan Donkers en

Thijs Notenboom. Bij IMO 2007 was opgave 6 ook een Nederlandse, gecreëerd door Gerhard Woeginger (TU/e). En opgave 5 van 2010 is ontsproten aan het brein van Hans Zantema (TU/e, RU). In een vervolgartikel in het volgende nummer (NAW 5/12 nr. 1 maart 2011) zal hij ingaan op deze opgave en hoe deze uit zijn onderzoek aan termherschrijfsystemen naar voren kwam.

**Vraag 7: Hoe is IMO 2010 verder verlopen?**

De Internationale Wiskunde Olympiade vond in 2010 in Kazachstan plaats en was een zeer bijzondere ervaring voor de teamleden en begeleiders. Kazachstan is een gigantisch land; dat bleek wel toen de honderden leerlingen in een colonne van bussen vervoerd werden

naar een vakantiepark 'nabij' de hoofdstad Astana en hiervoor bijna zeven uur onderweg waren. Ze arriveerden pas rond elf uur 's avonds op hun verblijfplaats, waar het team unaniem van plan was geweest om om half tien naar bed te gaan met het oog op de wedstrijd van de volgende dag. Dit was verre van een ideale voorbereiding, maar desondanks heeft het Nederlandse team goed gepresteerd op de eerste wedstrijddag: allemaal hebben ze opgave 1 perfect opgelost. Vermeldenswaardig is dat veel andere landen en zelfs de uiteindelijke winnaar China op deze opgave steken hebben laten vallen.

Na een middagje ontspanning op het park (dat voorzien was van een basketbalveld, een volleybalveld, een voetbalveld en een meer met waterfietsen) moesten de leerlingen de volgende dag weer aan de bak. Tot grote vreugde van de hele Nederlandse delegatie wisten de deelnemers hun prestatie van de eerste wedstrijddag te herhalen en weer allemaal de eerste opgave perfect op te lossen. Hoewel het waar is dat de eerste opgave van een wedstrijddag steeds het makkelijkste is, zegt dit vooral iets over de moeilijkheid van de overige opgaven. Hier heeft het Nederlandse team dan ook niet meer dan een paar puntjes bij elkaar gesprokkeld. Dit was echter wel voldoende voor vijf van hen om een medaille te halen; de zesde kreeg een eervolle vermelding.

Met de wedstrijd achter de rug kon het team nog dagenlang gaan genieten van excursies, naar zowel mooie stukjes natuur als architectonische hoogstandjes in de hoofdstad van Kazachstan. Ze konden het echter ook niet laten om in de verloren uurtjes het internet op te gaan en leuke wiskundeopgaven op te zoeken. En als er geen internet in de buurt was, verzonden ze zelf wel opgaven, die vervolgens per sms naar de begeleiding werden gestuurd om op te lossen. Kortom, de leerlingen hadden zelf de training alweer in gang gezet voordat de IMO goed en wel afgelopen was. Dat geeft goede hoop voor IMO 2011, wanneer een deel van hen opnieuw kan deelnemen, deze keer in eigen land. 

**Voor meer informatie**

[www.wiskundeolympiade.nl](http://www.wiskundeolympiade.nl)  
[www.imo2011.nl](http://www.imo2011.nl)  
[www.imo-official.org](http://www.imo-official.org)