

In deze rubriek worden lezers door de redactie uitgenodigd te reageren op recent in dit blad verschenen artikelen.

Redacteur: Ferdinand Verhulst
 derdewet@nieuwarchief.nl

Het onderstaande is een reactie (geen weerwoord) op de boekbespreking van 'Analysis I, II' van T. Tao door Erik Koelink uit het NAW-septembernummer van 2008.

'Analysis' van T. Tao is een slecht geschreven boek

Je aarzelt om zo te spreken over het werk van een befaamd wiskundige, maar ik vind het boek 'Analysis' van T. Tao slecht geschreven. Laat ik vooropstellen dat ik hier Tao's bedoelingen en zijn opvattingen over analyse-onderwijs aan eerstejaars studenten buiten beschouwing laat; het gaat me om de manier waarop hij die uitwerkt. Waarom vind ik die slecht? Niet zozeer om de feitelijke onjuistheden — die zijn in het algemeen onschadelijk (al stel ik me voor dat het voor de lezer knap irritant zal zijn om achteraf te ontdekken dat Tao met de 'range' van een afbeelding iets anders bedoelt dan de rest van de wereld). Erger vind ik: de voortdurende verwarring van een wiskundig object met de naam ervan ("The sets $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ and $\{3, 4, 2, 1, 5\}$ are the same set, but have different first elements", twee regels na "we cannot use the notion of the 'first' or 'last' element in a set", op p. 35); de gepretendeerde opbouw uit axioma's zonder één woord over wat dat voor dingen zijn of waar ze toe dienen; de verbazingwekkend nonchalante taal ("Let X be a set. Then the set $\{Y : Y \text{ is a subset of } X\}$ is a set" (Lemma 3.4.9)); inconsistenties (zoals op p. 34, in verband met de axiomatiek van de verzamelingenleer, "we shall take the agnostic position as to whether all objects are sets or not", enkele regels verderop gevolgd door "... since 4 is not a set"); en geheimzinnige opmerkingen (zoals "... it now looks like we can keep all of the natural numbers distinct from each other" op p. 19, "... the concept of equality of functions can depend on the choice of domain" Expl. 3.3.8, en "This definition is well-defined" op diverse plaatsen). Dit zijn niet zo maar een paar mislukte passages die ik uit de tekst pluk: het hele boek is in deze stijl geschreven. Daarenboven is het doordrenkt met slonzige taal als "the limit converges", "monotone functions do not obey the intermediate value principle" (dat wil zeggen: er bestaan monotone functies die niet doorlopend zijn), "Definition X obeys Property Y ", en "assume $P(n)$ has been proved" (in plaats van: "assume $P(n)$ is true").

Voor ik verder ga, een standpuntverklaring. Het gaat om een analyseboek, bedoeld voor studenten die vertrouwd zijn met calculus maar niet met exacte analyse. Om de tekst (niet de onderliggende filosofie) te beoordelen moet je je verplaatsen in de gedachtenwereld van zo'n student. Die is een spel aan het leren waar hij de regels niet van kent; Tao zal hem die uitleggen. Drukt Tao zich slecht uit, dan is: "Och, iedereen begrijpt wel wat er bedoeld wordt" geen verdediging.

- Hier zijn een paar voorbeelden van waar de student tegenaanloopt.
- Een 'infinite series' is een zeker soort 'expression' (Definition 7.2.1), en "expressions are a sequence of mathematical symbols which produces some mathematical object" (staat echt op p. 307). Wat voor wiskundig object wordt voortgebracht door de reeks $\sum(-1)^n$ van Opgave 7.2.1?
 - Wat is $f(b) - f(a)$ als f een functie is met domein (a, b) , zoals $x \mapsto x^{-1} + (1 - x)^{-1}$ of $x \mapsto \sin x^{-1}$ op $(0, 1)$? (Zie Def. 11.8.1 op p. 291.)
 - Wat is de integraal van een niet-integreerbare functie? (11.2.6)
 - Als $f : \mathbf{R} \rightarrow [0, \infty)$ de functie $x \mapsto x^2$ is, dan is de compositie $f \circ f$ niet gedefinieerd. (Def. 3.3.10.) Zou dat echt de bedoeling zijn?
 - Wat moet ik met iets als "clearly, x is positive (why?)". (Zie bijv. p.147, p.204.)
 - Denkt Tao dat ik onnozel ben? (Bijvoorbeeld 11.2.2, over constante functies. Hoewel ... "if E is empty, every real number c is a constant

value for f on E (why?)” Misschien b en ik onnozel?)

De student zou zo door kunnen gaan; ik heb enkele van zijn problemen gekozen die geen omstandige uitleg vereisten. (Ik weet het: In werkelijkheid zal hij problemen als deze misschien niet eens opmerken. Hij weet namelijk niet beter. Hoe zou hij ook?) Laat ik mezelf nog even het woord geven voor een paar losse opmerkingen die buiten zijn bereik liggen.

- Dat O behoort tot ‘the Roman number system’ (Remark 2.1.12) is nieuw voor me. Ik meende overigens dat ‘Hindu-Arabic numerals’ en ‘Roman numerals’ namen waren voor dezelfde dingen, maar volgens Tao heb je ‘Hindu-Arabic numbers’ en ‘Roman numbers’, en zijn die verschillend (hoewel equivalent omdat beide stelsels voldoen aan de axioma’s van Peano).
- Dat elke oneindige verzameling gelijkmachtig is met een of andere echte deelverzameling (Exercise 8.1.1) kun je niet bewijzen zonder enige vorm van het keuze-axioma, en wie Exercise 8.5.15 (Tussen elk tweetal verzamelingen bestaat een injectieve afbeelding) aanpakt met de daar gegeven aanwijzing loopt onmiddellijk vast.
- De Riemann-Stieltjes-integraal, zoals gedefinieerd in 11.8, lijkt op het eerste gezicht aantrekkelijk, maar is geen integraal en kan ook niet uitgebreid worden tot een Lebesgue-Stieltjes-integraal waarvoor de convergentiestelling van Lebesgue geldt.
- ‘Principle of transfinite induction’ is geenszins een andere naam voor het Lemma van Zorn (p. 206) en heeft daar zelfs niets mee te maken. Wat w el met het Lemma van Zorn te maken heeft is de Welordeningsstelling (‘Well ordering principle’, Exerc. 8.5.19); die twee zijn wel niet hetzelfde maar althans in zekere zin equivalent. Transfinitie inductie (‘Strong induction’, 8.5.10) is iets totaal anders, en volkomen elementair.

Hiermee zijn we terug bij de feitelijke onjuistheden waar ik mee begon; die zijn duidelijk aanwijsbaar en kunnen weinig kwaad. Mijn bezwaren betreffen de ondoordachtetheid waarmee het hele boek geschreven is. (Behalve de bewijzen, die zijn correct, zij het soms slecht overdacht.) Niet alleen is het daardoor moeilijk te lezen; het suggereert ook dat dit de manier is waarop wiskundigen schrijven. Is dat de boodschap die we onze studenten willen meegeven? *A. van Rooij, Nijmegen*

Referentie

T. Tao, *Analysis I (Second edition)*, Hindustan Book Agency, 2009.

Het onderstaande is een reactie op het artikel ‘Aansluiting schoolboeken basisschool en havo/vwo’ van Geeke Bruin-Muurling, Koeno Gravemeijer en Michiel van Eijck uit het NAW-maartnummer.

Rekenen met breuken

In het artikel wordt uitgelegd dat rekenen met breuken (dus zonder context) niet behoort tot de stof die beheerst moet worden op de basisschool. Deze stof wordt gerekend tot de stof voor het voortgezet onderwijs. Dit heeft vergaande consequenties:

1. Het project ‘breuken’ duurt vijf   zes jaar, een onafzienbare tijd voor kinderen van die leeftijd. Voor de leerlingen is een dergelijk uitgestrekt tijdspad een bewijs van het buitengewone complexe karakter van de stof.
2. Uitstel van de behandeling van rekenen met breuken tot het voortgezet onderwijs betekent dat het twijfelachtig is of de leerlingen die niet naar vwo/havo-scholen gaan deze stof ooit nog wel onderwezen krijgen. Gezien de diepe identiteitscrisis in het vmbo, kan men hier niet optimistisch over zijn. Het gaat hier om meer dan 50% van

de leerlingen die niet zullen leren rekenen met breuken. Ik begrijp niet waarom een zo omvangrijke groep uitgesloten wordt van deze kennis. Het argument dat het niet nodig is voor de toekomstige beroepspraktijk gaat in ieder geval niet op:

3. Ongeveer 30% van de instroom van de pabo’s die de opleiding voor leraren op de basisscholen verzorgen, stroomt binnen via het mbo. Deze groep leerlingen heeft na het vmbo nog enkele jaren mbo doorlopen, en dus hoogst waarschijnlijk het onderwerp breuken niet voltooid. Nu wordt de laatste tijd een rekentoets afgenomen na het eerste jaar van de pabo waarbij getest wordt op het niveau van rekenen in groep 8 van de basisschool. Dus ook hier wordt het niveau van rekenen met breuken niet gehaald. En daarmee is de cirkel gesloten: ook de leerkrachten zullen in het algemeen niet in staat zijn te rekenen met breuken.

Er pleit veel voor om deze stof weer op de basisschool te onderwijzen. Alleen al hierdoor wordt het niveau van de basisschoolleraren aanzienlijk verhoogd. Het is een hard gelag voor leerlingen die via het mbo op de pabo komen om afgewezen te worden op grond van kennis die hun ouders of grootouders gewoon op de lagere school hadden verworven.

Peter de Jong, WSO, Amsterdam

Hieronder volgen twee reacties op het artikel ‘Newton voor Jan en alleman’ van Klaas Landsman uit het NAW-septembernummer

Waarheidsvinding

In zijn waardevolle bespreking van recent werk over Newton schrijft Klaas Landsman: “In dit opzicht was er een groot verschil tussen Newton en zijn voorgangers en wegbereiders Robert Hooke en Christiaan Huygens. De laatste twee zagen de wetenschap als een stelsel hypothesen, hoogstens te beschouwen als benaderingen tot de waarheid, voor zover daar al sprake van kon zijn. Zij dachten in dit opzicht moderner dan Newton, die in ieder geval in *Principia* een compromisloze vorm van waarheidsvinding nastreefde: dit is het ‘ware weten’ dat Cohen zelfs als titel van zijn boek heeft gekozen.”

Deze claim is wat misleidend. Allereerst, het is waar dat na de tweede editie (1713) van de *Principia*, Newton ‘hypothesen’ in de natuurfilosofie afwees. (Overigens, in de eerste editie stonden er negen officiële ‘hypothesen’ aan het begin van boek III! Voor een bespreking van de wijzigingen zie [2].) Ten tweede, Newton wilde inderdaad de waarheid ontdekken. Maar zijn houding ten opzichte van waarheidsvinding is complexer dan Landsman aangeeft. Newton formuleerde zijn definitieve houding in de vierde van de zogenaamde ‘rules for the study of natural philosophy’ (toegevoegd aan de derde editie (1726) van de *Principia*): “In experimental philosophy, propositions gathered from phenomena by induction should be considered either exactly or very nearly true notwithstanding any contrary hypotheses, until yet other phenomena make such propositions either more exact or liable to exceptions.” Newton voegt er dan aan toe: “This rule should be followed so that the arguments based on induction may not be nullified by hypotheses.” [1, p. 89]

Newton heeft het over ‘very nearly true’. De zogenaamde ‘Newtonian style’ (zie, met name, [3]) is complex, maar ze gaat ervan uit dat de waarheid op opeenvolgende wijze benaderd kan worden (e.g., ‘make ... more exact’); het is onduidelijk of Newton dacht dat de uiteindelijke waarheid ooit bereikt kan worden. Bovendien, Newton oarmde wat we tegenwoordig fallibilisme noemen. Behalve de vierde methodologische regel, die hierboven geciteerd is, levert zijn ‘author’s preface’ (in alle drie de edities) heel goed bewijs hiervoor: “I hope that the

principles set down here will shed some light on either this mode of philosophizing or some truer one.” Dat wil zeggen, de afwijzing van de hypothesen (en, in de context is het duidelijk dat Newton de eisen van de ‘mechanische filosofie’ van Hooke en Huygens, waarin alle uitleg in termen van vorm, grootte, beweging en botsing van lichamen begrijpelijk moet zijn, aan het verwerpen is) wordt geformuleerd op methodologische gronden. Newton stelt dat men zich niet moet laten afleiden door discussies over fysische verklaringen als die niet zijn ingegeven door systematische, empirische afwijkingen (dat wil zeggen, ‘fenomenen’) van een theorie. Dus, het verwerpen van hypothesen moet niet gelijkgesteld worden met een houding van (laten we zeggen) absolute waarheidsvinding.

Tenslotte, Newtons toewijding aan waarheidsvinding beschrijft vooral een psychologische houding binnen het domein van onderzoek. Hij claimt in de derde van zijn vier methodologische regels: “Those qualities of bodies... that belong to all bodies on which experiments can be made should be taken as the universal qualities of all bodies whatsoever.” [1, blz 87] Newton, die altijd zeer zorgvuldig formuleert, schrijft “should be taken as” niet “are”. Newtons ‘moderniteit’ is juist precies dat hij een methode waarin een (wiskundige) theorie-gemedieerde meting de boventoon voert, die als het ware op zijn eigen benen kan staan, heeft gecreëerd, terwijl het beantwoorden van andere (ongetwijfeld interessante) vragen en tegenwerpingen over verklaringen van fysieke mechanismen mogen worden uitgesteld totdat er zwaarwegende empirische redenen zijn om ze na te streven (zie ook [4]).

Eric Schliesser, Universiteit Gent, België

Referenties

1. Andrew Janiak (ed.), 2004. *Newton: Philosophical Writings*, Cambridge: Cambridge University Press.
2. Eric Schliesser, 2011, ‘Newton and Newtonianism’, *Routledge Companion to Eighteenth-Century Philosophy*, Aaron Garrett (ed.), London and New York: Routledge, nog te verschijnen.
3. George E. Smith, 2002. ‘The Methodology of the Principia’, *The Cambridge companion to Isaac Newton*, I.B. Cohen and G.E. Smith (eds.), Cambridge: Cambridge University Press, pp. 138–173.
4. George E. Smith, 2011, ‘How Newton’s Principia Changed Physics’, *Interpreting Newton*, Andrew Janiak and Eric Schliesser (eds.), Cambridge: Cambridge University Press, nog te verschijnen.

Misselijke opmerking over Huygens

Het artikel ‘Newton voor Jan en alleman’ is een mooie bespreking van Klaas Landsman. Toch heb ik over twee passages nog wat opmerkingen. Bij de bespreking van het stripverhaal *Newton in Nederland* zegt Landsman “maar je vraagt je af voor wie het bedoeld is”. Beetje overbodige vraag. Voor beta-georiënteerden die ook van stripverhalen houden natuurlijk, dat zijn er heel wat. Het tweede punt is van meer belang. In de bespreking van *Isaac Newton en het ware weten* van Floris Cohen haalt hij op bladzijde 180 Cohen aan over Huygens: “In het algemeen zette hij, op momenten dat hij mogelijke radicale vernieuwingen op het spoor was, niet door: de air van een rijkeluiszootje dat tevreden was met af en toe wat virtuoos machtsvertoon blijft om Huygens hangen.” Wie wel eens in de meer dan twintig verzamelde delen van Huygens werken heeft gekeken en een idee heeft van zijn ideeënwereld met onder andere de wiskundige beschrijving van de slingerklok, de golftheorie van het licht, de ringen van Saturnus, leest deze zin met verbijstering. Wat een goedkope amateurspsychologie van die Cohen en wat vreemd dat Landsman zo’n misselijke opmerking kritiekloos overneemt. Een genie als Newton heeft het echt niet nodig dat een van zijn meest begaafde tijdgenoten op zo’n manier gedevalueerd wordt.

Pieter Lommerse, Hillegom

