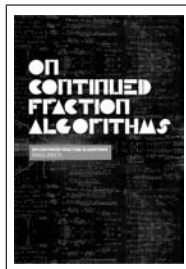


# In de verdediging

| In defence



## On continued fraction algorithms

*Ionica Smeets*

Wie de wiskundemeisjes volgt, weet vast dat Ionica Smeets als aio in Leiden ‘werkte aan kettingbreuken, benaderingen en algoritmen’. Vlak voor de verdediging van haar proefschrift *On continued fraction algorithms* op 16 juni j.l. was het het juiste moment om haar te vragen eens wat gedetailleerder over haar werk te vertellen.

### Kettingbreuken en benaderingen

Zoals bekend, kun je ieder irrationaal getal  $x$  op precies één manier schrijven als een oneindig lange kettingbreuk. Als je deze oneindig lange kettingbreuk afkapt, krijg je een benaderingsbreuk, die als een gewone breuk te schrijven is. Je kunt je dan afvragen hoe goed deze breuk  $\frac{p}{q}$  het getal  $x$  benadert. Een veel gebruikte maat voor de kwaliteit van een benadering is  $q^2|x - \frac{p}{q}|$ . Een benadering is goed als de kwaliteit zo klein mogelijk is: dan heb je zowel een kleine noemer als een korte afstand tot  $x$ . Het standaard kettingbreukalgoritme vindt alleen maar benaderingen met kwaliteit kleiner dan 1 en al in 1798 bewees Legendre dat iedere breuk  $\frac{p}{q}$  die  $x$  benadert met een kwaliteit kleiner dan  $\frac{1}{2}$  gevonden wordt door het kettingbreukalgoritme. Borel bewees in 1905 dat bovendien één in elke drie opeenvolgende benaderingen heel goed is.

In het eerste deel van haar proefschrift bestudeert Smeets zulke reguliere kettingbreuken, maar gebruikt ze een andere kwaliteitsmaat voor wat een goede benadering is. Geïnspireerd door de stelling van Borel beantwoordt ze voor deze maat de vraag wat je kunt zeggen over de kwaliteit van de  $n$ -de benadering als gegeven is dat de  $n - 1$ -ste en  $n + 1$ -ste benaderingen heel goed zijn. En andersom: hoe goed moet een benadering zijn die tussen twee slechte benaderingen inzit? Daarnaast berekent ze ook de kans dat zulke situaties voorkomen.

### Natuurlijke uitbreidingen en lapjesdekentjes

Vervolgens bestudeert Smeets zogenaamde  $\alpha$ -Rosen-kettingbreuken. Allereerst generaliseert ze hiervoor de stellingen van Borel (die het minimum van de kwaliteit in een reeks opeenvolgende benaderingen geeft) en Hurwitz (die de kleinste kwaliteit geeft die oneindig vaak voorkomt). Maar het mooiste resultaat in haar proefschrift vindt ze het werk aan de natuurlijke uitbreiding voor  $\alpha$ -Rosen-kettingbreuken, en dan vooral de nieuwe, meetkundige techniek die ze daarvoor gebruikt: ‘quilten’. Smeets bepaalt de natuurlijke uitbreiding voor een groter interval van  $\alpha$  dan normaal gebruikelijk is, en ze kijkt hoe ver de parameter  $\alpha$  kan worden opgerekt voordat de natuurlijke uitbreiding in stukken uit elkaar valt.

Smeets noemt het ‘quilten’, waarmee ze de natuurlijke uitbreiding construeert, een nogal plastische techniek. De naam quilten is gekozen vanwege de overeenkomst met de techniek om lapjesdekentjes te maken. Zij begint met de al bekende natuurlijke uitbreiding voor het geval  $\alpha = \frac{1}{2}$  en plakt daar rechthoeken aan en haalt

*Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht.*

Redacteur: Geertje Hek  
la Voie-du-Coin 7  
1218 Grand-Saconnex  
Zwitserland  
G.M.Hek@uva.nl

er rechthoeken af. Vervolgens kijkt ze naar de baan van die rechthoeken. De methode is heel krachtig; weggehaalde en toegevoegde rechthoeken blijken na een eindig aantal stappen prachtig samen te vallen, waardoor sterke uitspraken over de entropie van het onderliggend dynamisch systeem kunnen worden gedaan. Die entropie verandert bijvoorbeeld zodra de natuurlijke uitbreiding in twee stukken uiteenvalt.

Het laatste hoofdstuk gaat over meerdimensionale kettingbreuken, over hoe je simultane Diophantische benaderingen vindt. Smeets geeft hiervoor een algoritme, dat in feite een geïtereerde versie van het LLL algoritme is. Het algoritme zoekt efficiënt benaderingen met een gegarandeerde kwaliteit die alleen afhangt van de dimensie.

### Leuke periodes van intensief samenwerken

Het leven als aio beviel Smeets heel erg goed, hoewel ze onderzoek doen op zich best zwaar en eenzaam vond. Een groot deel van het werk doe je in je eentje, en dat bleek ze niet zo leuk te vinden. Het is dan ook niet zo verrassend dat ze een periode van intensief samenwerken in haar laatste jaar noemt als de mooiste tijd. Thomas Schmidt uit Oregon, met wie ze al geregeld had gewerkt, was een paar weken te gast in Delft. Met hem en copromotor Cor Kraaikamp werkte ze hard aan het hoofdstuk over quilten. Ze heeft ook goede herinneringen aan een vergelijkbare tijd van samenwerking aan het laatste hoofdstuk met Wieb Bosma uit Nijmegen. Het waren perioden vol opwinding: 's avonds werkte ze thuis nog snel dingen uit, om de volgende ochtend met kloppend hart weer aan te komen rennen op het instituut om de anderen te laten zien wat ze gedaan had en om te horen wat zij op hun beurt voor ideeën hadden. Samen voor het bord staan, elkaar dingen uitleggen en discussiëren over hoe het moet — dit samenspel vond ze het allerleukste aan haar onderzoek.

Een absoluut dieptepunt was er ook. In wat de eindversie van haar proefschrift had moeten zijn, zag haar promotor Rob Tijdeman een fout. Smeets zag haar wereld instorten. Ze was erg somber en dacht dat het nooit meer goed zou komen. Uiteindelijk bleken er slechts wat lemma's veranderd en andere dingen aangepast te moeten worden en bleven alle resultaten overeind. Hoewel de fout dus met extra werk hersteld kon worden en niet zo ingrijpend was, was het idee dat al het werk voor niks was geweest heel slopend. Gelukkig waren haar promotoren er in die tijd voor haar, en werd ze door hen heel erg uit de put gehaald. Door deze ramp in de krant met half Nederland te delen, kreeg ze bovendien van allerlei kanten steunbetuigingen en ontving ze brieven van 'best wel bekende wiskundigen' die vertelden zelf ook dat soort momenten te hebben gekend. Dat alles was zeer opbeurend.

### Nergens anders vind je zo'n vrije baan

In Leiden kreeg ze de kans om zich naast haar onderzoek te ontwikkelen op het gebied van de journalistiek en het uitleggen van wetenschap aan een breed publiek. Ze had vanwege haar nevenactiviteiten geen onderwijstaak, waardoor de combinatie aio-wiskundemeisje (en meer) te doen was. En juist omdat ze er allerlei dingen naast kon doen en daarvoor ook alle vrijheid kreeg, vond ze het leven als aio erg leuk. "Nergens anders vind je zo'n vrije baan, waar je al die dingen kunt combineren en je bijvoorbeeld gewoon even bij je werk weg kunt om een populaire lezing te geven."

Inmiddels werkt Smeets voor de helft van de week met Bas Haring bij Publiek Begrip van Wetenschap aan de Universiteit Leiden. Ze doen samen onderzoek naar hoe je exacte wetenschap goed aan mensen uit kunt leggen. De rest van de week is ze freelance wetenschapsjournalist en schrijft ze artikelen, geeft ze voordrachten en presenteert ze wetenschapsdagen. Beide dingen doet ze met veel plezier.

### De laatste stelling

'Jazeker' waren er stellingen bij haar proefschrift. Ze is het blijst met de laatste: 'zo belangrijk is relativiseren nu ook weer niet'. Ze heeft er een beetje voor moeten knokken omdat hij niet zo wetenschappelijk was, maar hij is erin gebleven. En daar is ze, evenals met het totale resultaat, heel tevreden mee!



### Space-time discontinuous Galerkin finite element method for two-fluid flows

Henk Sollie

Op 16 april j.l. promoveerde Henk Sollie aan de Universiteit Twente op het proefschrift *Space-time discontinuous Galerkin finite element method for two-fluid flows* dat hij schreef onder begeleiding van Jaap van der Vegt en Onno Bokhove. Deze dag markeerde niet alleen het eind van zijn promotietraject, maar was voor Sollie ook de mooiste die hij als aio beleefde. Een gevoel van tevredenheid maakte zich van hem meester, het gevoel dat hij een goed stuk werk had afgeleverd. De promotieceremonie en het feest erna in de aanwezigheid van familie en bekenden waren echt de kroon op zijn werk.

### Twee-vloeistofstromingen

Meer-vloeistof- of meer-fasestromingen worden gekenmerkt door de aanwezigheid van meerdere vloeistoffen en/of gassen die gescheiden worden door grenslagen. Dit type stromingen komt veel voor in de natuur en is ook belangrijk in industriële processen. Voorbeelden uit de natuur zijn oppervlaktegolven, olievlekken op water, of iets 'simpels' als regen. Toepassingen in de chemische industrie, waarop Sollie in zijn proefschrift de door hem ontwikkelde methoden heeft getest, zijn bellenkolommen en gefluïdiseerd-bed-reactoren.

Bellenkolommen zijn vaten met vloeistof, waar een gas doorheen wordt geleid, en worden toegepast om een gas op te lossen in een vloeistof. In de waterzuivering, waarbij water in contact wordt gebracht met bacteriën, worden de bacteriën zo van zuurstof voorzien. En bij staalproductie laat men zuurstof en argon door vloeibaar ijzer borrelen.

Een gefluïdiseerd-bed-reactor wordt gebruikt voor meer-fase chemische reacties. In zo'n reactor wordt een gas of een vloeistof door een granulaire vaste stof geleid, die gewoonlijk als katalysator optreedt. Bij voldoende hoge snelheden gaan de kleine vaste-stofdeeltjes dwarrelen en zich gedragen als een vloeistof — de vaste stof vormt dan een gefluïdiseerd bed.

### Vloeistofdynamica en grenslagen

De grenslagen maken dat twee-vloeistofstromingen lastig te simuleren zijn. Die zijn namelijk meestal niet statisch, maar bewegen met de vloeistoffen mee. Ook kan de topologie ervan veranderen door breking of samenvoeging van grenslagen, en zijn grootheden zoals de dichtheid, de tangentiële snelheid en de druk vaak discontinu over

de grenslaag. Tot slot kunnen deze discontinuïteiten ook nog eens erg sterk zijn, zoals in het geval van vloeistof-gasstromingen.

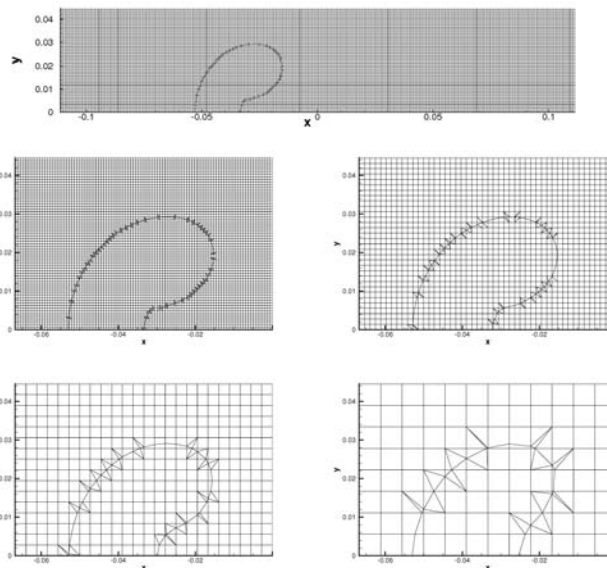
In zijn proefschrift beschrijft Sollie een nieuwe methode voor twee-vloeistofstromingen. De basis is een ruimte-tijd discontinue Galerkin (RTDG) eindige-elementendiscretisatie van de partiële differentiaalvergelijking die de hydrodynamica beschrijft. Deze methode biedt een hoge nauwkeurigheid, kan goed omgaan met discontinuïteiten en heeft een erg lokaal rekenrooster. Sollie combineert haar met de *level set* methode en *cut-cell front tracking* om de grenslagen tussen de vloeistoffen te beschrijven en te kunnen volgen in de tijd. Als je een grenslaag beschrijft met een parametrisatie, loop je vooral bij veranderingen van de topologie tegen allerlei numerieke problemen aan. Bij de *level set* methode heb je deze niet. De methode komt neer op het beschrijven van een gesloten kromme of oppervlak (de grenslaag) als niveauverzameling van een hulpfunctie die tijdsafhankelijk is.

Bij front tracking methoden wordt het rekenrooster aangepast aan de oplossing met de bedoeling het front (de grenslaag) te volgen. Sollie koos voor een front tracking methode vanwege de scherpe grenslaagvoorstelling en de hoge nauwkeurigheid van dit type methoden. In het geval van cut-cell verfijning wordt uitgegaan van een statisch achtergrondrooster, dat alleen verfijnd wordt dichtbij het front. Vanwege haar lokale natuur is een dergelijke verfijning goed te combineren met de eveneens lokale RTDG methode.

Sollie heeft alle mogelijke doorsnijdingen van de 0-niveauverzameling met vierkante en kubusvormige elementen geïdentificeerd en voor elk type doorsnijding een expliciete elementverfijning bepaald. Om de connectiviteit van het verfijnde rooster te kunnen garanderen zijn de *d*-dimensionale *face*-verfijningen gelijk aan de  $(d - 1)$ -dimensionale elementverfijningen.

**Combinatie van methoden maakt het interessant**

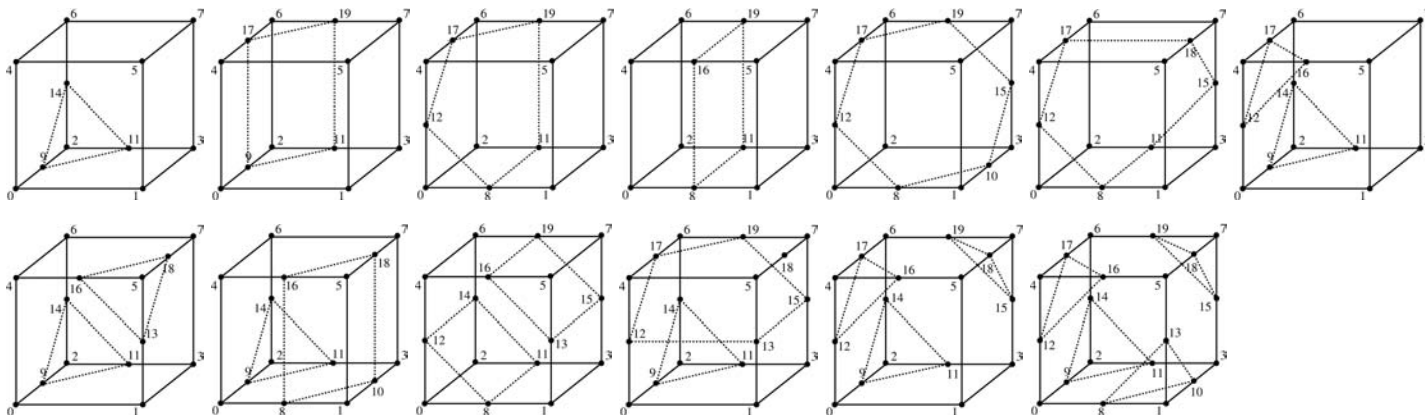
De toepassing van discrete Galerkin, of meer algemeen, hogere orde methoden, op meer-vloeistofproblemen is relatief onontgonnen terrein. De combinatie met de level set methode en met cut-cell front tracking is echt nieuw. Deze combinatie is volgens Sollie erg interessant. Allereerst omdat front tracking methoden vaak problemen hebben met samenvoeging en opbreking van bellen, terwijl level set methoden dit automatisch doen. Verder zijn front tracking methoden vaak



Lokale verfijning van het rekenrooster bij de grenslaag in het heliumcilinder-schokgolf interactieprobleem.

lastig uit te breiden naar hogere dimensies. De combinatie van de level set methode met generieke cut-cell verfijning maakt een dergelijke uitbreiding doenlijk, zelfs in 4D ruimte-tijd.

Verwacht wordt dat de nieuwe methode nauwkeurig kleinschalige problemen kan oplossen waar de grenslaagvorm en complexe grenslaagfysica belangrijk zijn. Voor grootschalige problemen, zoals bijvoorbeeld hele bellenkolommen, is ze echter te duur vanwege de nauwkeurige grenslaagbeschrijving. Sollie heeft de methode onder andere getest op een heliumcilinder-schokgolf interactieprobleem, een probleem met meerdere interessante aspecten. De heliumkolom wordt vervormd onder invloed van de schokgolf en bovendien is er een hogere golfsnelheid in de heliumkolom dan in zijn omgeving, waardoor de kolom zich als een soort lens gedraagt. Dit probleem diende in eerste instantie als validatietest voor zijn methode in 3D ruimte-tijd, maar Sollie vindt het uiteindelijk het mooiste resultaat in zijn proefschrift omdat het de methode erg goed illustreert.



Driedimensionale elementverfijningen.