

Karim Zahidi

Dept. Wijsbegeerte
Universiteit Antwerpen
Stadscampus, S.D.314
Grote Kauwenberg 18
2000 Antwerpen, België
karim.zahidi@ua.ac.be

Cultuur

Wiskunde en muziek: een eeuwig misverstand

Robert Ainsley, auteur van *Bluff your way in Mathematics* (Ravette Books 1988), zegt dat hij na zijn wiskundestudie is gaan schrijven voor een muziekblad, “proving that ability in music and maths are often absent in equal proportions...” Je hoort wel vaker over een verband tussen muziek en wiskunde. Maar is dit verband er echt? Karim Zahidi, filosoof, wiskundige en bariton in het Brusselse Brecht-Eislerkoor, gaat op verkenning.

“Van alle kunstvormen leunt muziek het dichtst aan tegen de wiskunde” is een gemeenplaats die door de eeuwen heen door verschillende auteurs is verkondigd. In dit stuk wil ik kort enkele van deze argumenten bespreken.

De eerste verbanden tussen wiskunde en muziek gaan terug op de Griekse wijsgeer en wiskundige Pythagoras. Het gehele filosofische leerstelsel van de Pythagoreïsche school is sterk geïnspireerd door wiskunde en meer bepaald door de rekenkunde van natuurlijke getallen. Het is dan ook niet te verwonderen dat Pythagoras een wiskundige theorie van muziek (een belangrijk onderdeel van het Griekse cultuurleven) ontwierp. Zijn theorie was gebaseerd op de eenvoudige observatie dat toonhoogtes in ‘welluidende’ intervallen zich verhouden als natuurlijke getallen. Preciezer geformuleerd ontdekte hij dat de lengtes van twee trillende snaren, die een ‘welluidend’ interval opleveren, zich verhouden als natuurlijke getallen. Voor een octaaf interval is de verhouding $1/2$ (als een snaar van lengte L een bepaalde toonhoogte voortbrengt dan brengt de snaar met een lengte $1/2 L$ een toon voort die één octaaf hoger ligt), voor een kwint is de verhouding $2/3$ en voor een kwart

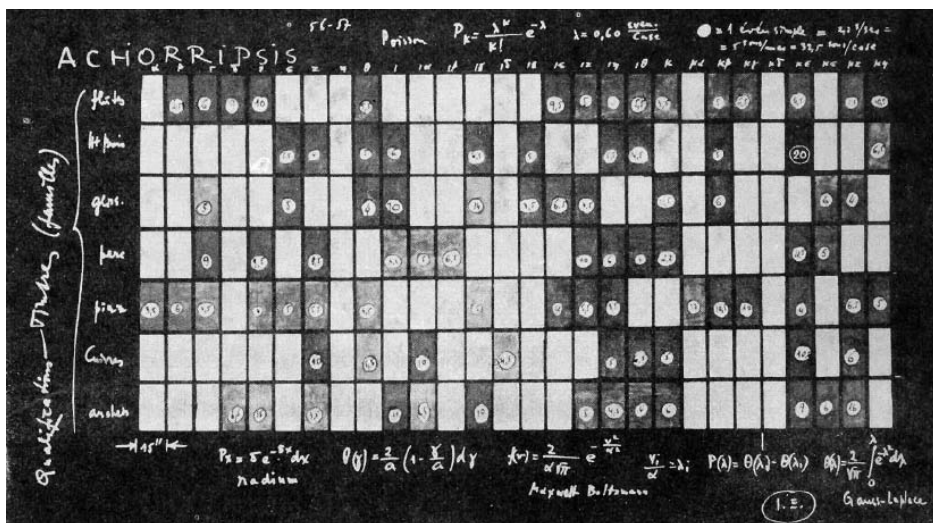
$3/4$. Deze ontdekking was en is nog steeds de basis voor de harmonieleer. Het feit dat de ‘welluidende’ intervallen een zekere wiskundige symmetrie vertonen, maakte enorm veel indruk op Pythagoras en was één van de oorzaken die leidde tot de overtuiging dat de wereld was opgebouwd aan de hand van natuurlijke getallen [1] en dat het esthetische in de wereld precies haar oorsprong vond in het feit dat deze de patronen van de natuurlijke getallen volgt. Alhoewel deze ontdekking schijnbaar voldoende grond geeft aan de bewering dat muziek intiem verbonden is met wiskunde, is het zinvol om er even bij stil te staan. Veeleer lijkt deze ontdekking grond te geven aan de relatie tussen natuurkunde en wiskunde. De ontdekking van Pythagoras zegt namelijk alleen iets over de fysische processen die het geluid voortbrengen vanuit het standpunt dat muziek niets meer is dan de fysische processen die er aan ten grondslag liggen dan geldt de stelling. Maar deze veronderstelling is naar mijn gevoel sterk reductionistisch (het is zoals een schilderij bestuderen door enkel naar de eigenschappen van de gebruikte materialen te kijken). Een ander zwak punt is de karakterisatie van ‘welluidende’ toonintervallen. De Grieken kenden enkel

octaaf, kwint, kwart. De tert (één van de dominante toonintervallen in de Westerse klassieke muziek) was hen bijvoorbeeld onbekend, maar kan nochtans als de verhouding van twee natuurlijke getallen worden uitgedrukt. Volgens de overtuiging van Pythagoras zou deze toonafstand ook als ‘welluidend’ moeten beschouwd worden, hetgeen niet het geval was.

Wanneer twee disciplines nauw met elkaar verbonden zijn, betekent dit onder meer dat er een zekere wisselwerking bestaat tussen de evolutie in beide disciplines. Als standaardvoorbeeld kunnen we verwijzen naar de relatie tussen wiskunde en natuurkun-

Révész in 1946

Een interessante referentie over de relatie tussen wiskundig en muzikaal talent is te vinden op pagina 489 van David Bensons *Music: a Mathematical Offering* [4], eerder besproken in het NAW door Derk Pik (juni 2009). Benson verwijst naar een boek van de psycholoog Géza Révész uit 1946 [5]: “This book contains an interesting discussion (pages 160–167) of the question of whether mathematicians are more musically gifted than exponents of other branches and professions. The author gives evidence for a negative answer to this question, in sharp contrast with widely held views on the subject.”



Schema voor de compositie *Achorripsis* van de Griekse componist Iannis Xenakis (1922–2001). Verticaal staan de verschillende instrumentgroepen, horizontaal verloopt de tijd in blokken van 15 seconden. Het aantal muzikale 'events' in iedere cel bepaalde Xenakis aan de hand van kansverdelingen. Zie [7] voor meer uitleg.

de (Newton vond de differentiaalrekening uit om de klassieke mechanica te beschrijven, de theorie van Hilbertruimten was een geschikt formalisme om de quantummechanica te beschrijven, problemen uit de conforme veldentheorie leidden tot interessante vraagstukken in de algebraïsche meetkunde, etcetera — zie [2] voor een uitgebreide beschrijving van de wisselwerking tussen wiskunde en natuurkunde). Deze wisselwerking is vruchtbaar gebleken voor beide disciplines. Echter, de wisselwerking tussen muziek en wiskunde is vrijwel verwaarloosbaar. Het is wel zo dat sommige auteurs in bepaalde muziekstukken een zekere wiskundige structuur herkennen, of de structuur van bepaalde muziekwerken beschrijven aan de hand van wiskundige structuren (zie bijvoorbeeld [6] voor een vergelijking tussen de structuur in de muziek van Bach en bepaalde structuren die opduiken in de wiskundige logica). Het punt is dat dergelijke beschrijvingen a posteriori zijn en dergelijke analyses waarschijnlijk niet gemaakt zijn door de componisten als ze het werk componeerden. (Twee muziektheoretici maakten ooit een analyse van een compositie van de Oostenrijkse componist Schönberg. Er was echter één noot die niet in hun analyse van het muziekstuk paste. Overtuigd dat het om een drukfout ging in de partituur, gingen

ze naar Schönberg toe en vroegen of die noot geen andere noot moest zijn. De componist antwoordde hoofdschuddend dat het muzikaal toch duidelijk was dat de enige noot die op die plaats paste, de noot was die er stond.) Het enige wat dergelijke analyses bewijzen is dat bij elke menselijke creatie er een zekere drang naar ordening en symmetrie aanwezig is, en wiskunde is een ideale taal om symmetriën te beschrijven.

Een van de redenen dat muziek nog steeds beschouwd wordt als zijnde nauw verbonden met de wiskunde, is dat de syntax van de muziek een wiskundige indruk maakt. Met syntax bedoelen we de regels die vastleggen hoe muziek genoteerd wordt. Mensen die ooit muziek gestudeerd hebben, herinneren zich meestal dat er ergens rekenen met breuken aan te pas kwam en ze kregen zo de indruk dat er wel degelijk wiskunde in muziek zit en dat mensen die goed zijn in wiskunde ook goed zijn in muziek. Dit blijft een vreemde gevolgtrekking, zeker als we de vergelijking maken met literatuur. Het syntaxniveau is hier het niveau van de spellen en de grammatica. De grammatica van een taal is meestal sterk logisch gestructureerd, het is dus evident dat mensen met een 'logische geest' minder problemen hebben met de grammatica van een taal. Maar dit betekent niet dat zij meer gevoel hebben voor

taal, betere poëzie schrijven enzovoort. Een bewering die trouwens nooit gehoord wordt, is dat een wiskundige (veronderstellend dat die een 'logische geest' heeft) beter zou zijn in literatuur. Nochtans is dit dezelfde redenering die gevolgd wordt als wanneer die bewering gemaakt wordt in verband met wiskunde en muziek. De twee niveaus, het syntaxniveau enerzijds en het artistieke niveau anderzijds, die bij taal duidelijk gescheiden blijven, worden blijkbaar bij muziek veel minder apart gehouden. Eén van de redenen daarvoor is waarschijnlijk dat iedereen veel meer vertrouwd is met taal dan met muziek. Iedereen is een dagelijks gebruiker van taal en kan daardoor beide niveaus duidelijk onderscheiden (vermoedelijk wordt dit onderscheid onbewust gemaakt). De kennis van muziek is bij de meeste mensen veel beperkter en dit maakt dat beide niveaus in een zekere nevel gehuld zijn en dus de verwarring tussen beide niveaus ontstaat (men zou zich de vraag kunnen stellen of in een maatschappij waar muziek als dagelijks communicatiemiddel gebruikt zou worden eenzelfde verwarring zou optreden in verband met taal). Dat het syntaxniveau een duidelijke invloed heeft op het artistieke niveau is duidelijk (zoals Weyl in [3] zegt: "Alle Musiker sind sich darin einig, dass dem Gefühlselement der Musik ein starkes formales Element unterbaut ist."), maar het lijkt dat een goede kennis van het syntaxniveau enkel een nodige voorwaarde is.

In het bovenstaande heb ik getracht een aantal argumenten te geven om de verleidelijke, maar naar mijn mening verkeerde conclusie over het verband tussen wiskunde en muziek, te ontcrachten of toch sterk te relativiseren. Ik heb getracht aan te tonen dat het verband veel minder voor de hand liggend is dan het op het eerste gezicht lijkt. Ik hoop dan ook dat, zelfs al is de lezer niet akkoord met mijn argumenten, hij er toch voldoende door geraakt is om over het hele probleem na te denken.

Naschrift

Deze tekst is het eerste deel van een groter artikel, dat eerder is verschenen in *Wiskunde en Onderwijs*, 23 (1997), pp. 170–183.

Noten

- Het feit dat zelfs de meest eenvoudige constructie (een rechthoekige driehoek met lengte van de rechthoekszijden 1) leidt tot 'onmeetbare' getallen (de lengte van de schuine zijde is $\sqrt{2}$) en dus irrationaal) was dan ook een grote schok voor de fundamentalen van de filosofie van Pythagoras.
- Y. Manin, *Mathematics and Physics*, Birkhäuser, Boston.
- H. Weyl, *Symmetrie*, Birkhäuser, Basel.
- D. Benson, *Music: a Mathematical Offering*, Cambridge University Press, 2006.
- G. Révész, *Einführung in die Musikpsychologie*, A. Francke, Amsterdam 1946. Translated by G.I.C. de Courcy as *Introduction to the psychology of music*, University of Oklahoma Press, 1954, and reprinted by Dover, 2001.
- D.E. Hofstadter, *Gödel, Escher en Bach: een eeuwige gouden band*, uitgeverij Contact, Amsterdam.
- E. Childs, 'Achorripsis: A sonification of probability distributions', Proceedings of the 2002 International Conference on Auditory Display, 2002.