Geeke Bruin-Muurling
Eindhoven School of Education
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
g.bruin@tue.nl

Koeno Gravemeijer
Eindhoven School of Education
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
k.gravemeijer@tue.nl

Michiel van Eijck
Eindhoven School of Education
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
m.w.v.eijck@tue.nl

Onderwijs

Aansluiting schoolboeken basisschool en havo/vwo

In de immer voortwoekerende discussie over het rekenonderwijs op de Nederlandse scholen mag de wetenschap een duit in het zakje doen. Dit artikel doet verslag van promotie-onderzoek van Geeke Bruin-Muurling onder begeleiding van Michiel van Eijck en Koeno Gravemeijer. Bruin-Muurling analyseerde schoolboeken van groep 8 (primair onderwijs) en klas 1 (havo/vwo) en keek daarbij naar de coherentie van het lesmateriaal voor het werken met breuken.

In Nederland is er op dit moment nog steeds veel onrust over het rekenniveau van leerlingen. Verschillende partijen, zoals universiteitsdocenten, pabobesturen, de media en ouders signaleren veranderingen die ze niet wenselijk vinden. Ook in Nieuw Archief voor Wiskunde verschijnen met regelmaat artikelen over de reken- en algebraïsche vaardigheden van Nederlandse leerlingen. In de discussie worden basale vaardigheden op het gebied van rekenen en wiskunde als het centrale probleem genoemd. Daarbij wordt een relatie gelegd met de veranderingen die de afgelopen jaren in de didactiek van de basisschool en in het curriculum van de onderbouw van het voortgezet onderwijs hebben plaatsgevonden. In dit verband wordt ook de aansluiting tussen de basisschool en het voortgezet onderwijs als een mogelijke oorzaak van problemen in de rekenvaardigheden genoemd. De veranderingen die in beide onderwijstypen hebben plaatsgevonden lijken door verschillende visies op wiskunde en wiskundeonderwijs te zijn beïnvloed. Dit roept de vraag op, of er inderdaad sprake is van een aansluitingsprobleem in de overgang van de basisschool naar het voortgezet onderwijs en waar dat probleem dan uit bestaat. Om te onderzoeken of de veranderingen gevolgen hebben gehad voor de coherentie van het curriculum hebben we een analyse van de rekenwiskundemethoden uitgevoerd, waar we in dit artikel verslag van doen. Het betreft vier methoden voor groep 8 van de basisschool en twee methoden voor klas 1 havo/vwo, waarbij we ons richten op het gebied van breuken. Op basis van een analyse van vormkernmerken en een meer inhoudelijke analyse komen we tot de conclusie dat de overgang van primair onderwijs naar voorgezet onderwijs (havo/vwo), in dit domein, niet coherent is. Dit illustreren we aan de hand van de thema's getalspecifieke procedures en formaliseren en expliciteren.

> Het **Freudenthal Instituut** (Faculteit Bètawetenschappen, Universiteit Utrecht) houdt zich bezig met onderzoek naar en ontwikkeling van reken-wiskundeonderwijs in de traditie van het realistisch rekenen (RME).
> De **SLO** (Stichting Leerplanontwikkeling) is het nationaal expertisecentrum leerplanontwikkerling.
> Het **TAL-project** werd in 1997 door het ministerie van onderwijs geïnitieerd. TAL staat voor Tussendoelen Annex Leerlijnen. Inmiddels zijn er voor vijf subdomeinen leerlijnen uitgewerkt, zie www.fi.uu.nl/talbovenbouw.
> In 1986 stelde toenmalig staatssecretaris Ginjaar-Maas vast dat er dringend een nieuw wiskundeprogramma voor de onderbouw van het voortgezet onderwijs ontwikkeld moest worden. De projectgroep **W12-16**, een mix van medewerkers van het Freudenthal Instituut en van het SLO, gaf invulling aan dit verzoek.

Veranderingen in het rekenonderwijs

In het primair, voortgezet en hoger onderwijs wordt verschillend naar het wiskundeonderwijs gekeken. De visies verschillen zowel voor de doelen van het primair en voortgezet onderwijs als voor de didactiek. De veranderingen in het basisonderwijs bij het vak rekenen-wiskunde komen voort uit de realistische onderwijstheorie (ook wel aangeduid als RME, realistic mathematics education). Hoewel het Freudenthal Instituut in het project W12-16 samen met de SLO de basis heeft gelegd voor de vernieuwing van het wiskundeonderwijs in de basisvorming, kunnen we toch constateren dat er in de vormgeving van het wiskundeonderwijs in het voortgezet onderwijs ook andere invloeden een rol spelen. Dit betreft met name het vervolgonderwijs en de lerarenopleidingen.

Onze hypothese is dat deze verschillen ongemerkt de coherentie van het curriculum kunnen verstoren, vooral bij onderwerpen waar het voortgezet onderwijs voortbouwt op het primair onderwijs. Dit zou dus het geval kunnen zijn bij een onderwerp als breuken. De basis van breuken wordt al vroeg in de basisschool gelegd met activiteiten als het verdelen en benoemen van verdeel resultaten. In groep 6 wordt geleidelijk de notatie van een breuk met de breukstreep ingevoerd, waarna het rekenen met breuken volgt. Aan

methode	opgave met illustratie	opgave zonder illustratie	tekst met illustratie	tekst zonder illustratie	aantal eenheden
groep 8					
AT	76%	24%	0%	0%	94
PP	81%	19%	0%	0%	74
RR	68%	32%	0%	0%	111
WG	72%	28%	0%	0%	165
klas 1					
GR	34%	51%	14%	2%	95
MW	30%	53%	9%	8%	74

Tabel 1 Percentage illustraties in Nederlandse schoolboeken

boek	Type illustratie: zonder didactische functie	met functie	rest
groep 8			
AT	14%	69%	17%
PP	53%	29%	18%
RR	8%	81%	11%
WG	34%	42%	24%
klas 1			
GR	25%	66%	9%
MW	10%	87%	3%

Tabel 2 Percentages per type illustratie in Nederlandse schoolboeken (per jaar)

het eind van groep 8 is deze leerlijn echter nog niet afgerond, er wordt niet van de leerlingen verwacht dat ze het optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen met breuken op een formeel niveau uitvoeren. Het niveau van het rekenen met onbenoemde of kale getallen wordt volgens de kerndoelen niet nagestreefd op de basisschool. Dit wordt overgelaten aan het voortgezet onderwijs, waar de leerlijn daarnaast doorgezet moet worden naar de algebraïsche vaardigheden. In de TAL brochure [11] wordt er overigens wel voor gepleit de leerlingen in het primair onderwijs kansen te bieden om een hoger niveau te bereiken.

De methoden in het primair onderwijs zijn gebaseerd op de realistische benadering. In de praktijk betekent dit dat de auteurs zich laten inspireren door prototypische leergangen, en leerlijnbeschrijvingen. Deze invloed zien we terug in de rol van contexten en modellen. Het idee daarbij is dat geschikte contexten aangrijpingspunten bieden voor informele, model-ondersteunde oplossingsmethoden, die in het vervolg van het onderwijs verder gemathematiseerd worden. In het voortgezet onderwijs zijn de RME-invloeden veel moeilijker vast te stellen, zo verschillen de methoden 'Getal en Ruimte' en 'Moderne Wiskunde' op belangrijke punten. Binnen de hervormingen in de onderbouw van het voortgezet onderwijs is het werk van het project W12-16 belangrijk geweest, maar vinden we ook invloeden van 'traditioneler' opvattingen over wiskundeonderwijs. Ook gaat in het voortgezet onderwijs, zelfs in de onderbouw, invloed uit van zowel het Centraal Examen (CE) als de wensen van het hoger onderwijs. Contexten hebben hier dan ook vaker de functie van toepassingen en modellen dienen eerder ter oplossing van het probleem of ter illustratie van een formele regel of bewijs.

Verschillen in de ideeën over de doelen van het wiskundeonderwijs, het inrichten daarvan, en in de visie op wat wiskunde is, komen terug in de didactische keuzes die worden gemaakt. We kunnen stellen dat argumenten rond 'uitstroom-relevantie' in het basisonderwijs over het algemeen zwaarder wegen dan in havo en vwo - waar meer aandacht is voor 'doorstroom-relevantie'. In havo en vwo is de voorbereiding op de doorstroom naar het vervolgonderwijs een belangrijke factor in beslissingen binnen het curriculum. Op de basisschool wordt rekening gehouden met de diversere groep leerlingen en is het uitstroomniveau met het oog op toepasbare kennis in het dagelijks leven belangrijk. In dit kader past ook dat er in het primair onderwijs voor een onderwerp als breuken meer aandacht voor begrip lijkt, terwijl in het voortgezet onderwijs een tendens is naar meer aandacht voor de vaardigheden.

In ons onderzoek gaan we na of er aanwijzingen zijn dat deze verschillen van invloed zijn op onderwerpen die in het basisonderwijs worden aangezet en die hun vervolg krijgen in het voortgezet onderwijs. We hebben ons daarbij gericht op breuken, en meer specifiek op het vermenigvuldigen van breuken. Om de overgang te onderzoeken hebben we reken-wiskundemethoden van eind basisschool (groep 8) en begin voortgezet onderwijs (leerjaar 1 van havo en vwo) geanalyseerd, omdat we deze als goede indicator zien voor hoe de feitelijke onderwijspraktijk eruit ziet.

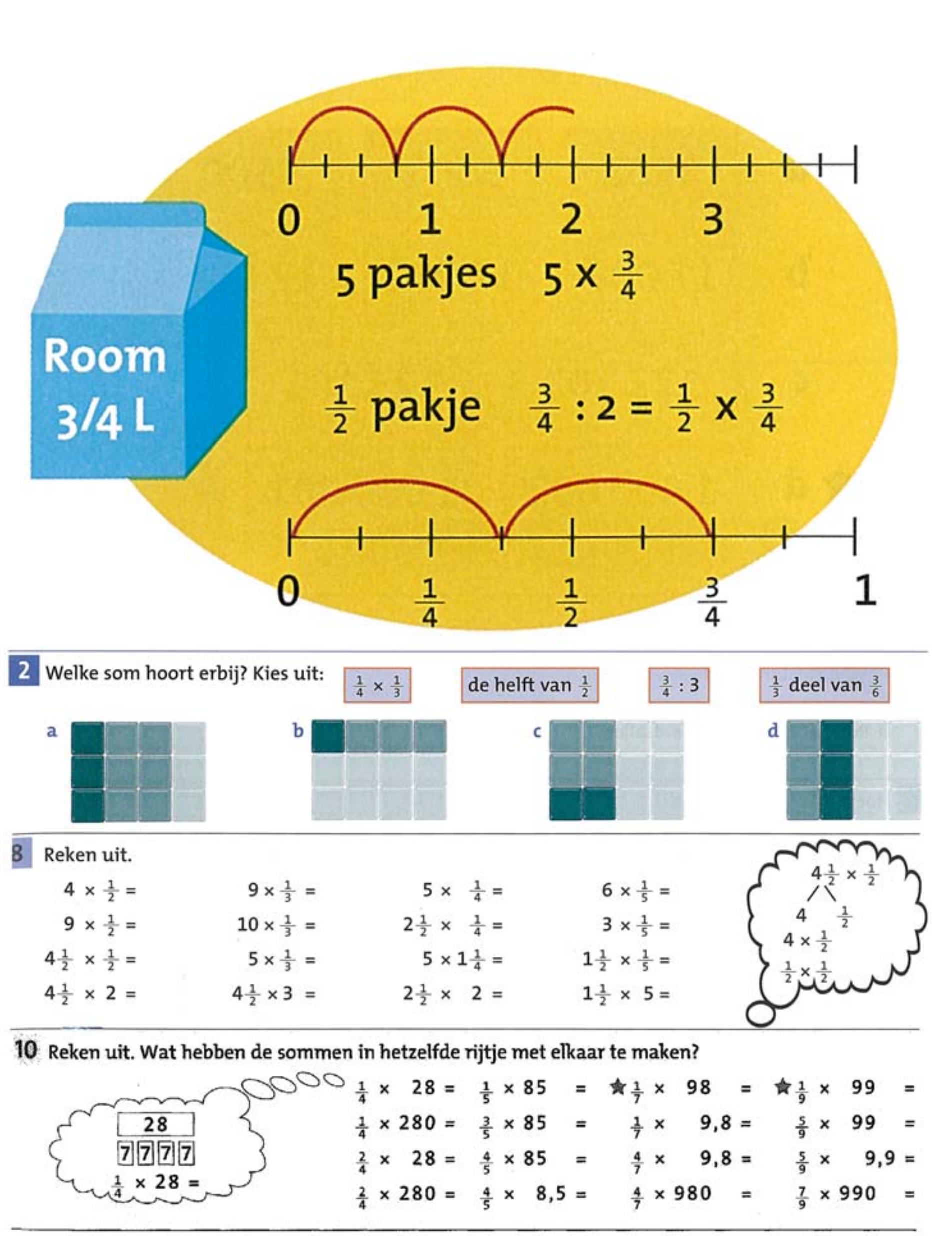
Het onderzoek

Schoolboeken hebben over het algemeen grote invloed op de uitvoering van het curriculum, zeker ook in Nederland. Voor veel docenten is een schoolboek maatgevend voor zowel de te behandelen onderwerpen als de didactiek daarvan [7]. In ons onderzoek maken we gebruik van de lesboeken voor groep 8 van vier grote methoden (Alles Telt (AT), Pluspunt (PP), Rekenrijk (RR) en De wereld in getallen (WG) [1–4]) en de lesboeken voor klas 1 havo/vwo van twee grote methoden (Getal en Ruimte (GR) en Moderne Wiskunde (MW) [5–6]). Daaruit hebben we alle opgaven en stukken theorie genomen die in het domein breuken passen. Het gaat daarbij dus zowel om 'aanvankelijk breukbegrip' als het rekenen met breuken. Omdat ons perspectief de aansluiting op havo en vwo betreft, hebben we procenten, verhoudingen en kommagetallen niet meegenomen — tenzij het rekenen met breuken daarin werd verwacht.

Globale analyse van vormkenmerken

In ons onderzoek hebben we ons eerst gericht op deze complete verzameling teksten en opgaven. Daarin vielen een aantal zaken op. Ten eerste zijn de boeken van primair en voortgezet onderwijs anders georganiseerd. In het voortgezet onderwijs wordt een indeling per onderwerp (per hoofdstuk) gehanteerd, met aan het eind van deze hoofdstukken een samenvatting. Ook wordt er tussen de opgaven aandacht besteed aan theorie of uitgewerkte voorbeelden. In het primair onderwijs daarentegen worden onderwerpen in een doorlopende leerlijn behandeld. Verschillende onderwerpen worden door elkaar behandeld. De schoolboeken zijn per dag, week en periode van weken georganiseerd. In de boeken voor de basisschool vinden we alleen opgaven terug en geen samenvattingen of theoretisch stukken tussen de opgaven. Een tweede punt dat opvalt is het gebruik van illustraties bij stukken tekst. In het basisonderwijs wordt hier veel meer gebruik van gemaakt (Tabel 1).

In de analyse hebben we verder gekeken naar de functie van de illustraties. Daarvoor hebben we de illustraties ingedeeld in een aantal categorieën. We kunnen daarbij onderscheid maken tussen illustraties die geen wiskundige of wiskundig didactische functie hebben en illustraties die dat wel hebben. In de eerste groep vinden we vooral illustraties die de context verduidelijken. Ook reke-



Figuur 1 Voorbeeld opgaven primair onderwijs (Alles Telt [2])

nen we hier de illustratie onder die een deel van de benodigde numerieke informatie bevat voor het oplossen van een opgave. Binnen de tweede groep horen de uitgewerkte voorbeelden en hints in bijvoorbeeld tekst ballonnetjes en ook de al eerder genoemde didactische modellen. We zien dat van het grotere aantal illustraties in basisschool boeken een relatief groter deel geen wiskundige of didactische functie heeft (Tabel 2).

Verschillen in Tabel 1 en Tabel 2 kunnen we voor een deel verklaren uit de verschillende visies die er op het reken - wiskundeonderwijs bestaan. Zoals eerder aangegeven is het idee in het primair onderwijs dat geschikte contexten aanknopingspunten bieden voor informele, model-ondersteunde oplossingsmethoden. Aan de docent wordt een centrale rol toegekend om de oplossingsmethoden met de leerlingen te bespreken en samen met de leerlingen theorie te ontwikkelen. In het voortgezet onderwijs is het gebruikelijker dat de theorie wordt opgenomen in de leerboeken. In Getal en Ruimte is er daarbij veel aandacht voor voorbeelden [10]. Moderne Wiskunde laat leerlingen daarentegen meer zelf ontdekken. Moderne Wiskunde maakt dan ook meer gebruik van modellen waar Getal en Ruimte vooral hints en uitgewerkte voorbeelden als illustratie heeft.

Inhoudelijke analyse

De globale analyse heeft laten zien dat er verschillen zijn in de vormkenmerken van de lesboeken in primair en voortgezet onderwijs, die we terug kunnen voeren naar verschillende visies op het leren van wiskunde. In een meer gedetailleerde inhoudelijke analyse proberen we daar nog meer vat op te krijgen. We hebben ons daarom op een kleiner deel van ons bestand gericht, namelijk op de onderdelen waar het vermenigvuldigen van breuken een rol speelt. Bij deze analyse hebben we gekeken naar de oplossingsstrategie waar leerlingen naartoe worden geleid, naar het soort opgave dat daarbij wordt gebruikt en naar welke modellen worden aangeboden. Typische voorbeelden hiervan zijn opgenomen in Figuur 1 en 2.

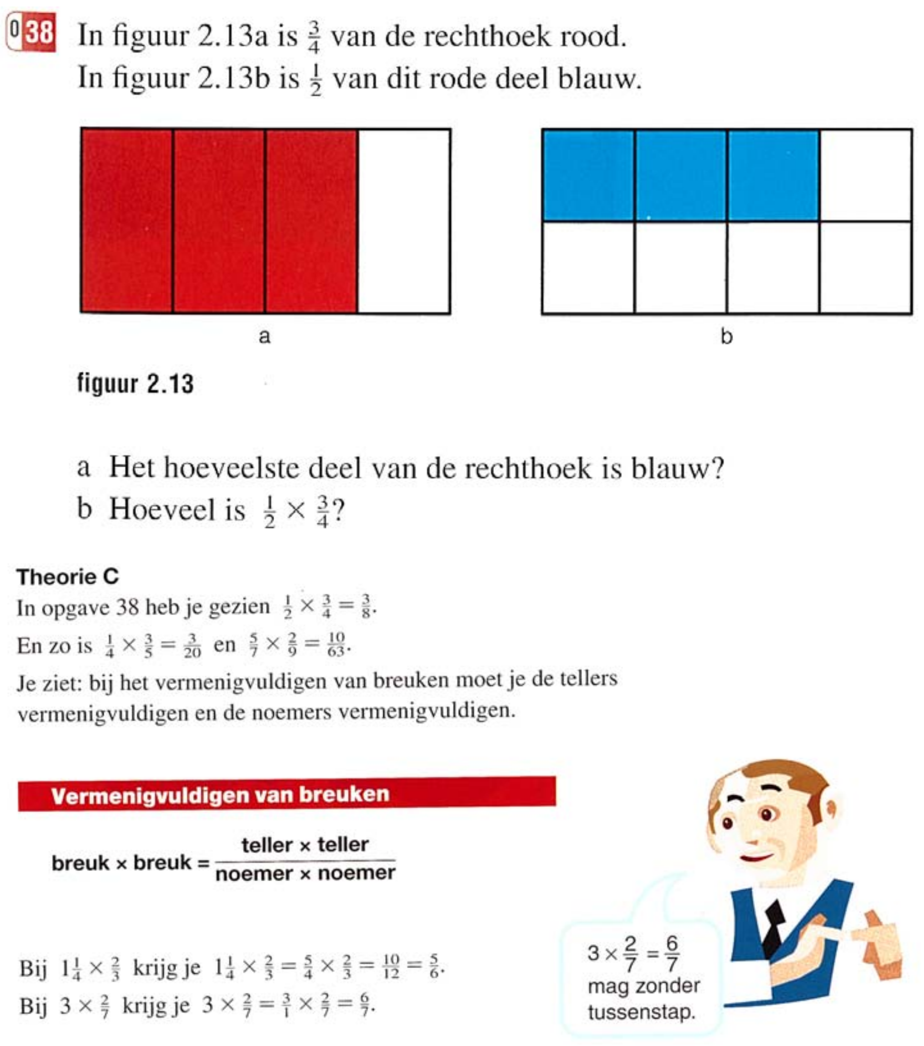
De resultaten van deze analyse kunnen we toespitsen op twee belangrijke onderwerpen: enerzijds getalspecifieke procedures en anderzijds formaliseren en expliciteren.

Getalspecifieke procedures

De voorbeelden in Figuur 1 illustreren een fenomeen dat we in alle boeken voor de basisschool aantreffen. Startend vanuit contexten en gebruik makend van de informele strategieën van leerlingen is er een opdeling ontstaan in verschillende soorten opgaven. Deze opdeling is weliswaar voor elke methode weer net anders, maar globaal gesproken kunnen we vier situaties onderscheiden:

1. Het vermenigvuldigen van een (klein) geheel getal met een breuk wordt benaderd vanuit 'vermenigvuldigen als herhaald optellen'. Het gaat hier dan in het algemeen om lengtematen.
2. Vanuit het 'eerlijk delen' is het vermenigvuldigen van een breuk met een groot geheel getal ontstaan. Daarin wordt leerlingen de strategie aangeleerd om eerst naar het 'eenheids-deel' te kijken, door het grote gehele getal, dat in het algemeen een hoeveelheid voorstelt, eerlijk te delen. Opvallend is verder dat opgaven van dit type, die in de onderzochte basisschoolmethoden voorkomen steeds een geheel getal als antwoord te hebben.
3. Het vermenigvuldigen van twee 'echte breuken' (breuk tussen 0 en 1) wordt gevisualiseerd met behulp van een rechthoek met de eenheid als oppervlakte (het rechthoek model).
4. Los hiervan wordt voor gemengde getallen (bijvoorbeeld $3\frac{2}{5}$) een splits-strategie aangeleerd (dus gebruik makend van de distributieve eigenschap, zonder deze formeel te noemen).

Deze getalspecifiekheid beïnvloedt om twee redenen de aansluiting met het vervolgonderwijs negatief. Ten eerste is er een aansluitingsprobleem als het gaat om de complexiteit van opgaven. In het primair onder-


038 In figuur 2.13a is $\frac{3}{4}$ van de rechthoek rood.
In figuur 2.13b is $\frac{1}{2}$ van dit rode deel blauw.

a b

figuur 2.13

a Het hoeveelste deel van de rechthoek is blauw?
b Hoeveel is $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$?

Theorie C
In opgave 38 heb je gezien $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$.
En zo is $\frac{1}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{20}$ en $\frac{5}{7} \times \frac{2}{9} = \frac{10}{63}$.
Je ziet: bij het vermenigvuldigen van breuken moet je de tellers vermenigvuldigen en de noemers vermenigvuldigen.

Vermenigvuldigen van breuken

$$\text{breuk} \times \text{breuk} = \frac{\text{teller} \times \text{teller}}{\text{noemer} \times \text{noemer}}$$

Bij $1\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$ krijg je $1\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.
Bij $3 \times \frac{2}{7}$ krijg je $3 \times \frac{2}{7} = \frac{3}{1} \times \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$.

Figuur 2 Voorbeeld tekst voortgezet onderwijs (Getal en Ruimte [5])

wijs maar ook in Moderne Wiskunde zien we slechts een beperkt aantal typen opgaven. Deze zijn gekoppeld aan de eerder genoemde aangeleerde procedures en de bijbehorende context of model die telkens voor een bepaald type opgave gelden. De opgaven worden per type aan de leerling aangeboden. Het kan zijn dat leerlingen daardoor vast blijven houden aan het bijbehorende model en niet op het formele niveau komen. Bovendien worden niet alle mogelijkheden van het vermenigvuldigen van breuken behandeld. Zo is het vermenigvuldigen van een echte breuk met een geheel getal waar geen geheel antwoord uit komt, geen onderdeel van de basisschoolmethoden. Er kunnen ook problemen ontstaan met de overgang naar algebra, waar er vanzelfsprekend geen onderscheid tussen de verschillende soorten breuken wordt gemaakt. Getal en Ruimte maakt dit onderscheid tussen typen getallen niet: het vermenigvuldigen van breuken wordt aangeboden aan de hand van één regel.

Ten tweede zal de overgang van een conglomeraat van getalspecifieke oplossingsstrategieën naar het vermenigvuldigen van breuken als onbenoemde getallen voor velen niet vanzelfsprekend zijn. De stap die moet worden genomen lijkt ons te groot. In het primair onderwijs wordt de term breuk vooral gebruikt voor breuken tussen 0 en 1. In het voortgezet onderwijs zal dit moeten worden uitgebreid naar alle rationale getallen. Het keer-teken heeft in het primair onderwijs nog de betekenis van een handeling die kan variëren afhankelijk van zijn context, bijvoorbeeld ‘herhaald optellen’ of ‘deel van’. In het primair onderwijs hebben de operanden dan ook een aparte betekenis, afhankelijk van of ze voor of na het ‘keerteken’ staan (vermenigvuldiger en vermenigvuldigtal). Op formeel niveau moet dit onderscheid zijn verdwenen.

Formaliseren en expliciteren

Een groot verschil tussen de boeken in het primair en voortgezet onderwijs is het formaliseren en expliciteren van het geleerde. Dit zien we onder andere terug in de structuur van de schoolboeken, waar in het voortgezet onderwijs samenvattingen en stukken theorie worden geïntroduceerd. Een regel als breuk $\times$ breuk $= \frac{\text{teller}\times\text{teller}}{\text{noemer}\times\text{noemer}}$ komt niet in de basisschool-boeken voor. Ook de stap hiernaartoe vanuit bijvoorbeeld het rechthoekmodel (zie Figuur 1) voor echte breuken naar het besef dat de tellers en de noemers met elkaar vermenigvuldigd worden, wordt niet in de primair onderwijs boeken gemaakt. Deze regel wordt niet expliciet gemaakt. Het valt te betwijfelen of veel leerlingen deze stap zelf maken.

De leerlingen rekenen in het basisonderwijs steeds met breuken als benoemde getallen. Dat wil zeggen, getallen die gebonden zijn aan een of andere maateenheid ($6\frac{1}{2}$ meter of $\frac{3}{4}$ chocoladereep). De breuken functioneren niet als onbenoemde getallen, het zijn nog geen opzichzelfstaande objecten geworden die je los van een context kunt manipuleren. Bij het aanbieden van de formule ‘breuk $\times$ breuk $= \frac{\text{teller}\times\text{teller}}{\text{noemer}\times\text{noemer}}$’ wordt daar wel van uitgegaan. Ook de stappen die Getal en Ruimte als vanzelfsprekend beschouwt bij het omwerken van een geheel getal of een gemengd getal naar een onechte breuk (Figuur 2), zullen voor de meeste leerlingen niet vanzelfsprekend zijn. Daarvoor moeten de breuken functioneren als onbenoemde rationale getallen. Bovendien vraagt het rekenen met breuken inzicht in eigenschappen en structuren. Voorbeelden daarvan zijn: inzien dat vermenigvuldigen met een breuk hetzelfde is als achtereenvolgens vermenigvuldigen met de teller en delen door de noemer, inzien dat $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1$, begrip van de inverse van een breuk en zijn eigenschappen. Uiteindelijk zullen niet alleen de breuken zelf, maar ook vermenigvuldigingen, zelfstandige wiskundige objecten moeten worden waar havo/vwo leerlingen mee kunnen redeneren. Een product van twee rationale getallen, zou door de leerling moeten (kunnen) worden opgevat als een object waarmee je redeneert, zonder dat je daarbij bewust hoeft te denken aan de handeling die je moet uitvoeren om dit product te verkrijgen. Dit zou betekenen dat ze de commutatieve eigenschap niet bewust hoeven toe te passen om zich te realiseren dat het bij ‘$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$’ en ‘$\frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$’ om hetzelfde product gaat. We hebben de indruk dat dit aspecten zijn waar (ook) in het voortgezet onderwijs te weinig aandacht aan wordt besteed.

Conclusies

In dit onderzoek hebben we een discontinuïteit gezien tussen de praktijk in basisschool methoden en die in het voortgezet onderwijs waar het gaat om het vermenigvuldigen van breuken. In het primair onderwijs zien we dat informele strategieën als startpunt worden genomen. De leerlijn wordt echter niet doorgevoerd tot het formele niveau en de verschillende perspectieven, zoals 'herhaald optellen' en 'deel van', worden niet met elkaar in verband gebracht. Dit wordt vervolgens niet opgepakt in het voortgezet onderwijs. Hier worden leerlingen voor het onderwerp breuken vrijwel direct geconfronteerd met de formele benadering van breuken als objecten/rationale getallen. In feite wordt hiermee geen recht gedaan aan de uitgangspunten van de realistische benadering. Een van de componenten van de realistische onderwijstheorie is het zogeheten 'emergent modelleren' [8]. Uitgangspunt van RME is dat de leerlingen informele strategieën — met hulp van de leraar — uitbouwen tot meer formele wiskunde via een proces van progressief mathematiseren. De gedachte achter het emergent modelleren is nu dat modellen, die eerst naar voren komen als modellen van contextgebonden activiteiten en zich geleidelijk aan kunnen ontwikkelen tot modellen voor meer formeel wiskundig redeneren, dit proces kunnen faciliteren. Hierbij zou het karakter van de modellen moeten veranderen van een model dat zijn betekenis (voor de leerling) ontleent aan de context van de opgave naar een model dat zijn betekenis ontleent aan de wiskundige relaties die in het spel zijn. Daartoe moet de leraar ervoor zorgen dat de leerling zijn of haar aandacht gaat richten op deze wiskundige relaties. Op die manier kunnen getallen zich bijvoorbeeld ontwikkelen van benoemde getallen tot getallen als wiskundige objecten die het karakter hebben van knooppunten in een netwerk van getalrelaties [9]. De beoogde verschuiving van de aandacht van betekenisgeving vanuit contexten naar een focus op wiskundige structuur ontbreekt in de onderzochte basisschoolmethoden. Voor de meeste leerlingen blijft beoogde objectvorming naar alle waarschijnlijkheid dan ook uit, terwijl er in het voortgezet onderwijs vanuit wordt gegaan dat de leerlingen op een dergelijk abstract niveau met breuken kunnen redeneren.

Bovendien worden er in de methoden in het primair onderwijs een aantal getalspecifieke oplossingsprocedures aangeleerd, die een barrière kunnen opleveren wanneer je in het voortgezet onderwijsd naar één algemene regel toe wilt. Voor alle duidelijkheid merken we op dat we geen bezwaar hebben tegen verschillende oplossingsstrategieën. Situatiespecifieke oplossingen die door betekenisvolle contextopgaven worden opgeroepen zijn heel waardevol als leerlingen al redenerend tot een oplossing komen. Dergelijke oplossingen kunnen een basis leggen voor verdere generalisering en formalisering. Onze analyse van het vermenigvuldigen van breuken in basisschoolmethoden laat echter zien dat ze worden aangeleerd als standaardprocedures voor gestandaardiseerde situaties. Dat wil zeggen dat de basisschoolmethoden niet zozeer ruimte laten voor verschillende strategieën, maar eerder getalspecifieke procedures aanleren. Dit lijkt ons niet alleen ongewenst voor de leerlingen die doorstromen naar havo/vwo, maar ook voor de overige leerlingen. Er zou meer aandacht moeten zijn voor verbanden tussen de verschillende strategieën — als opstap naar generaliseren en formaliseren — en meer aandacht voor het zelf bedenken hoe je een breukenprobleem in een toepassingssituatie kunt oplossen.

Naast een bewustwording van de geschetste problemen bij zowel basisschool docenten als docenten in het voortgezet onderwijs pleiten we ook voor een verandering op langere termijn. Onze aanbeveling aan ontwikkelaars van primair- en voortgezet onderwijsmethoden is dan ook om een gezamenlijke leerlijn voor breuken te ontwikkelen.

Daarnaast zouden we in het algemeen willen pleiten voor meer aandacht voor de coherentie in de doorlopende leerlijnen van primair naar voortgezet onderwijs. Niet alleen de doelen zouden beter op elkaar afgestemd moeten worden, maar ook de didactiek en de beoogde strategieën zouden beter op elkaar aan moeten sluiten.

Referenties

1 Nico van Beusekom, Lilian Schuffelers, Gerard Boersma, Anneke van Gool, Jan Groen, Hein van der Straaten, Anke de Weerd-Fourdraine, *Pluspunt – reken-wiskundemethode voor de basisschool*, Malmberg (2000)

2 Jaap Boerema, Wim Sweers, Brugt Krol, Sandra Hessing, Jeannette Nijs-van Noort, Els van den Bosch-Ploegh, Ad Plomp, Petra Snijders, *Alles Telt – Reken-wiskundemethode voor het basisonderwijs*, Thiememeulenhoff (2001)

3 Joop Bokhove, Keimpe Kuipers, Jan Postema, Fred Baas, Nico Eigenhuis, Roel Roelofs, Ans Veltman, *Rekenrijk – tweede editie*, Wolters-Noordhoff (1999)

4 S. Huitema, A. van der Klis, M. Timmermans AN L. Erich, P. Man, *De wereld in getallen*, Malmberg (2000)

5 Reichard, L.A., Rozemond, S., Dijkhuis, J.H., Admiraal, C.J., Vaarwerk, G.J. te, Verbeek, J.A., Jong, G. de, Brokamp, N.J.J.M., Houwing, H.J., Vroome, R. de, Kuis, J.D., Klooster, F. ten, Leeuwen, F.G. van, Waal, S.K.A. de, Braak, J. van, *Getal en Ruimte 1 havo/vwo 1*, EPN, Houten (2004)

6 Emile van der Eijk, Anne van der Horst, Albert Koning, Douwe Kok, Geertrui Schaberg, *Moderne Wiskunde – Editie 8 – 1a havo vwo*, Wolters-Noordhoff (2002)

7 K. Gravemeijer, M. Van den Heuvel-Panhuizen, G. Van Donselaar, N. Ruesink, L. Streefland, W. Vermeulen, E. Te Woerd, D. Van der Ploeg, *Methoden in het Reken-wiskundeonderwijs, een rijke context voor vergelijkend onderzoek*, Technipress, Culemborg (1994)

8 Koeno Gravemeijer, 'How Emergent Models May Foster the Constitution of Formal Mathematics', *Mathematical Thinking, Learning* **1**(2) (1999), pp. 155–177

9 P.M. van Hiele, *Begrip en inzicht*, Muusses, Purmerend (1973)

10 Nellie Verhoef, 'Hoe ontstaat een wiskundemethode?', *Nieuw Archief voor Wiskunde* **5/10**(2) (2009), pp. 132–133

11 Frans van Galen, Els Feijs, Nisa Figueiredo, Koeno Gravemeijer, Els van Herpen, Ronald Keijzer, *Breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen – tussendoelen annex leerlijnen*, Wolters Noordhoff (2005)