Marco Swaen
Korteweg de Vries Instituut voor Wiskunde
Universiteit van Amsterdam
Postbus 94248, 1090 GE Amsterdam
mdgswaen@xs4all.nl

Vakantiecursus

Zwevende getallen

Het geruchtmakende intuïtionisme van Brouwer heeft maar beperkt navolging gekregen. Marco Swaen laat de lezer kennismaken met Brouwers benadering van reële getallen en functies, die verrassend dicht bij onze dagelijkse interpretatie blijkt te liggen. Dit artikel is eerder verschenen in de vakantiecursus van het CWI, editie 2008.

In 1907, nu iets meer dan een eeuw geleden verscheen het proefschrift *over de grondslagen der wiskunde* waarin de dan nog onbekende L.E.J. Brouwer een nieuwe visie op de wiskunde ontvouwt, sindsdien aangeduid als het 'intuïtionisme'. Brouwer liet het niet bij filosofische beschouwing maar werkte in latere jaren zijn ideeën uit tot een nieuwe stijl van wiskunde beoefenen. De intuïtionistische wiskunde kreeg niet veel navolging, en is tegenwoordig vooral een curiositeit voor specialisten. Dat is jammer, want met name Brouwers behandeling van reële getallen en functies sluit eigenlijk beter aan bij de manier waarop we in concreto met getallen en functies omgaan.

In dit artikel wil ik de lezer op een informele manier kennis laten maken met de intuïtionistische kijk op reële getallen en functies. Omwille van de toegankelijkheid geef ik een losse interpretatie van de uitgangspunten die ver af ligt van de presentatie zoals Brouwer die in zijn artikelen gaf.

Historie

Als jong wiskundige nam Brouwer stormenderhand zijn plaats in op het wereldtoneel met de succesvolle toepassing van algebraïsche technieken in de topologie. De naar hem genoemde dimensiestelling en dekpuntstelling herinneren aan dat sprankelende begin. Maar Brouwer ambieerde meer dan het leveren van memorabele bijdragen aan het corpus van de klassieke wiskunde. Hij was gegrepen door het toentertijd levendige debat over de vraag wat wiskunde nu eigenlijk is. In zijn proefschrift [2] liet hij zien de diverse stromingen in dat debat goed te kennen en uitte fundamentele kritiek op elk van die scholen. Brouwer stelt dat taal en logica slechts hulpmiddelen zijn in de beoefening van de wiskunde. Daarom zal het, in weerwil van wat logicisten als Frege en Russell hoopten, nooit mogelijk zijn de wiskunde te herleiden tot logica. Noch is de wiskunde terug te brengen tot een formeel spel zoals David Hilbert beoogde. En tenslotte moet ook Cantor het ontgelden met zijn verzamelingenleer, die volgens Brouwer niet veel meer is dan een betekenisloos woordspel. Brouwer laat het niet bij kritiek op de dominante stromingen van zijn tijd, hij komt ook met een eigen karakterisering van het wezen der wiskunde. Wiskunde is een vrije schepping van onze geest, waarbij we wiskundige objecten — getallen, functies, systemen — bedenken en bestuderen. Brouwer spreekt van mentale constructies die ontspruiten aan onze intuïtie — a priori kennis in de zin van Kant. Vandaar dat zijn opvattingen bekend zijn komen te staan onder de naam 'intuïtionisme'.

Toen tijdens de Eerste Wereldoorlog de internationale uitwisseling stilviel vatte Brouwer de taak op zijn filosofische standpunt concreet te maken door de wiskunde van de grond af op te bouwen volgens de inzichten die hij in zijn proefschrift ontwikkeld had. In 1918 verscheen zijn eerste artikel [4] in een reeks waarin hij deze intuïtionistische reconstructie aanving met een verzamelingentheorie en de theorie van het reële getal. Zijn belangrijkste leerling Arend Heyting (1898–1980) concipieerde in de twintiger jaren een intuïtionistische logica die de positie ten opzichte van de klassieke wiskunde verhelderde. Ook andere gebieden der wiskunde werden intuïtionistisch verkend, waarbij soms mooie resultaten werden geboekt. Hoe complexer de materie, hoe ingewikkelder het begrippenapparaat echter werd als gevolg van het verschijnsel dat één klassieke notie aanleiding gaf tot een waaier aan intuïtionistische, zodat niet-ingewijden al gauw het spoor bijster waren.

In de nadruk op constructieve methoden heeft Brouwers intuïtionisme inmiddels gezelschap gekregen van een schare aan andere alternatieve wiskunden onder exotische namen als de Russische recursief constructivisten, de constructieve analyse van Bishop, predicativistische wiskunde, finitisme en ultrafinitisme. Het aantal wiskundigen dat heden ten dage uit overtuiging de bewijzen Brouweriaans levert is overigens bijzonder klein. Wel blijft er interesse voor de intuïtionistische wiskunde als wiskundig systeem in verhouding tot de klassieke wiskunde. Ook binnen de traditionele wiskunde is er altijd een voorkeur voor constructieve bewijzen omdat die algoritmen opleveren waarmee wiskunde uitvoerbaar en toepasbaar wordt.

Uitgangspunten en kenmerken

De axiomatische methode is sinds Euclides het model geweest voor de opbouw van een solide wiskundige theorie. Daarbij worden bewijzen streng gevoerd op basis van een uitputtende lijst van uitgangspunten — de axioma's — en volgens afleidingsregels: de logica. Een belangrijk kenmerk van Brouwers intuïtionistische wiskunde is de tweeledige afwijzing van de axiomatische methode. Ten eerste zal men vergeefs in Brouwers artikelen zoeken naar een lijst met axioma's waarop de intuïtionistische wiskunde gefundeerd kan worden. Brouwer formuleert alleen aldoende wiskundige principes als hij het nodig vindt zijn bewijsvoering te verduidelijken. Ten tweede hanteert Brouwer in de bewijzen niet de vertrouwde logica, omdat volgens hem redeneringen moeten wortelen in wiskundige inhoud en niet mogen berusten op de klakkeloze toepassing van logische wetten. Met name verzet Brouwer zich tegen het principe van de uitgesloten derde, de wet die zegt dat er voor elke goed geformuleerde uitspraak A maar twee mogelijkheden zijn: A is waar, of A is niet waar, in formule: $A \vee \neg A$. De wet van de uitgesloten derde vormt de grondslag voor het bewijs uit het ongerijmde, een methode waarbij men om A te bewijzen, eerst aanneemt dat A niet waar is, en uit die aanname een tegenspraak afleidt. Gaat het bijvoorbeeld om een uitspraak van de vorm: "er is een x met eigenschap E", dan levert een bewijs uit het ongerijmde de conclusie dat het *niet* mogelijk is dat er *geen* x is met eigenschap E. Maar daarmee geeft het bewijs doorgaans geen manier aan om die x daadwerkelijk te vinden, en wordt daarom niet als constructief beschouwd.

Het wiskundig universum

De afwijzing van bewijs uit het ongerijmde wordt soms wel eens voorgesteld als de essentie van Brouwers intuïtionisme. Zij is echter geen fundamentele leerstelling, maar eerder een consequentie van de overtuiging dat wiskunde gaat over dingen die we *maken*, en niet over dingen die los van ons bestaan. Anders dan sterren of geldstromen zijn getallen en systemen er alleen maar voorzover we ze willen zien. Het zijn bedenksels, die we zelf oproepen, en die we alleen aan anderen tonen door aan te geven hoe we ze in onze gedachten tot stand hebben gebracht. De wiskundige objecten zijn dus mentale constructies. Hebben we geen constructie voor x, dan is x er niet. Het wiskundige universum waarin we al denkend vertoeven is noodzakelijk onaf, alleen dat wat we er gemaakt hebben, dan wel waarvan we inzien dat we het in een afzienbaar aantal stappen zouden kunnen maken, bestaat er. Wiskunde is 'uitvinden' en niet 'ontdekken'. De objecten moeten we uitvinden voor we ze kunnen bestuderen. Vervolgens kunnen we al studerend eigenschappen ontdekken, maar welbeschouwd is dat ontdekken het vinden van sluitende redeneringen, van bewijzen, dus ook 'uitvinden' in de vorm van het leveren van een gedachteconstructie.

De tijdsintuïtie

Ook fantasieën en dromen zijn mentale constructies; het bijzondere aan de constructies waarmee we ons als wiskundige bezig houden is dat we ze maken vanuit een bepaald inzicht, onze tijdsintuïtie in Brouwers terminologie. Het is inzicht waarmee we zijn toegerust om de wereld waarin we moeten overleven te begrijpen en naar onze hand te zetten. Men kan ook denken aan een instinct, of in de terminologie van Kant: a priori kennis, kennis die we bezitten zonder deze eerst afgeleid te hebben uit ervaringen. In zijn proefschrift heeft Brouwer het over de tijdsintuïtie en noemt daarbij het gegeven dat we gedachten en gewaarwordingen niet gelijktijdig maar achtereen hebben, en beschikken over het vermogen de ene ervaring te onthouden en te vergelijken met een volgende. In ons denken figureert een tijdslijn, waarlangs we gewaarwordingen rangschikken, waarmee we oorzaak en gevolg onderscheiden en waarmee we onze handelingen kunnen beramen en overdenken.

De telrij $1, 2, 3, 4, \ldots$ komt direct voort uit ons vermogen ons in gedachten een eenheid voor te stellen, daar in gedachte een eenheid aan toe te voegen, en dit proces eindeloos te herhalen. Zien we die telgetallen als stappen op de tijdslijn, dan kunnen we ook terugtellen en komen op $0, -1, -2, \ldots$. Maar ook is de tijdslijn vloeiend, waarbij tussen momenten steeds weer nieuwe momenten onderscheiden kunnen worden, zodat we een beeld krijgen van wat we noemen: het continuüm. In onze gedachten zijn we vrij; al zullen we in de werkelijkheid nooit erg ver tellen, we beseffen dat het tellen niet eindigt omdat we in principe altijd weer één stap verder kunnen. Zo loopt het continuüm eindeloos voort en is het aantal telgetallen oneindig. Evenzeer is het oneindige aanwezig in de mogelijkheid in het continuüm tussen elk tweetal momenten weer een nieuw moment te onderscheiden.

De natuurlijke getallen

Met onze telgetallen kunnen we rekenen, en zo ontdekken we allerlei eigenschappen: een getal kan priem zijn, of samengesteld, even, of de som van twee priemgetallen. Heb ik een getal gemaakt dan kan ik de eigenschappen ervan onderzoeken. Maar als het aantal getallen oneindig is, hoe zou ik dan ooit kunnen vaststellen of álle getallen een bepaalde eigenschap hebben? Omdat ik weet hoe ik de getallen maak, namelijk elk getal is een directe opvolger van een eerder gemaakt getal en uiteindelijk een opvolger van 1, kan ik toch het geheel der natuurlijke getallen overzien. In het geval dat ik weet dat de eigenschap voor 1 geldt, en altijd wordt doorgegeven van een getal naar zijn directe opvolger, kan ik concluderen dat de eigenschap vanaf 1 aan elke opvolger wordt doorgegeven en geen enkel getal zal overslaan. Dit is het bekende principe van "bewijs door volledige inductie", en is voor de intuïtionist nog acceptabeler dan voor een klassiek wiskundige, die denkt dat de natuurlijke getallen ergens buiten ons bestaan, en zich eigenlijk zorgen zou moeten maken of er behalve die opvolgers van 1 misschien nog andere natuurlijke getallen zijn.

Even of niet even

Zoals gezegd verzette Brouwer zich tegen het klakkeloos toepassen van logica, met name tegen het principe van de uitgesloten derde. Dat wil niet zeggen dat in zijn wiskunde $A \vee \neg A$ nooit geldt. Ter verduidelijking zullen we twee voorbeelden bekijken, één van een uitspraak waarop het principe wel, en één waarop het niet van toepassing is. De volgende stelling is niet moeilijk te bewijzen:

elk natuurlijk getal is even of oneven.

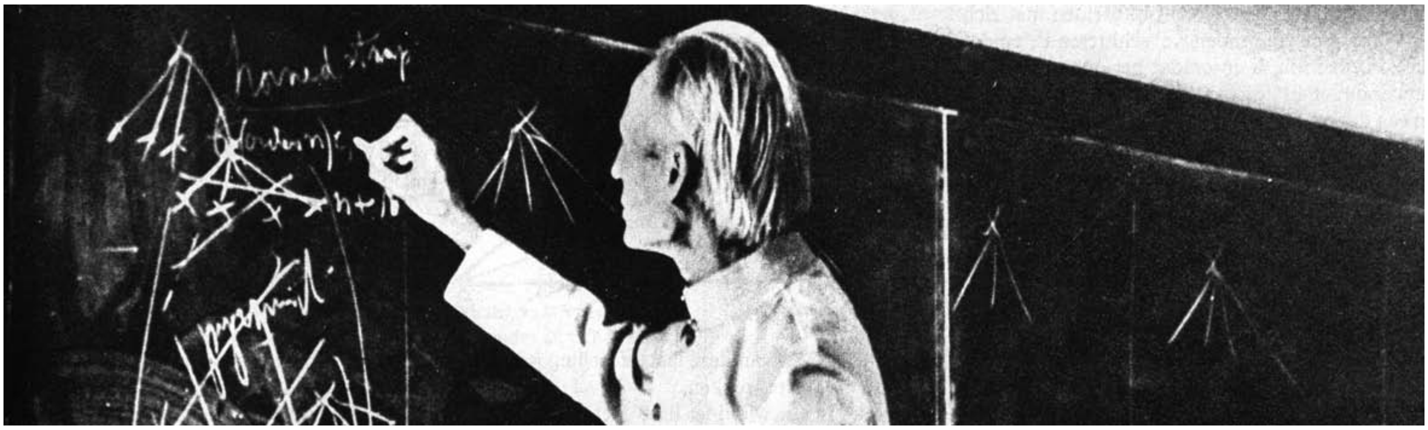
Met *even* bedoelen we dat het getal van de vorm $2n$ is, met oneven dat het van de vorm $2n - 1$ is, waarbij n een willekeurig natuurlijk getal voorstelt. Om te beginnen is het getal 1 oneven, want $1 = 2 \cdot 1 - 1$. Als een getal n even is, dan is zijn opvolger van de vorm $2m + 1 = 2(m + 1) - 1$ dus oneven. Is een getal oneven, dan is het zelf van de vorm $2m - 1$, dan is zijn opvolger $2m - 1 + 1 = 2m$, dus even. Verder is het niet heel moeilijk te beredeneren dat een getal niet even en oneven tegelijk kan zijn, dus we hebben ook: voor elk natuurlijk getal n geldt

n is even $\vee \neg$(n is even).

Goldbach of niet-Goldbach

De methode van volledige inductie biedt vaak geen soelaas. Dat is (tot op heden) bijvoorbeeld het geval bij het (sterke) vermoeden van Goldbach, dat teruggaat op een correspondentie tussen Goldbach en Euler van 1742 en behelst dat elk even getal groter dan 2 de som van twee priemgetallen zou zijn. Probeer maar:

$$4 = 2 + 2$$
$$6 = 3 + 3$$



Brouwer over keuzerijen

$$8 = 3 + 5$$
$$10 = 3 + 7 = 5 + 5$$
$$\ldots\ldots$$

Met $G(n)$ geven we aan dat het getal $2n$ voldoet aan de eigenschap in het vermoeden, oftewel $G(n)$ geeft de implicatie weer 'als $n > 1$ dan zijn er priemgetallen p en q zodat $2n = p + q$'. Daarmee is het vermoeden van Goldbach dus te schrijven als: $\forall n\, G(n)$. Van een gegeven getal n is deze eigenschap te controleren binnen afzienbaar aantal stappen. Wil je bijvoorbeeld weten of $G(100)$, maak dan een lijst van de priemgetallen tussen 1 en 200, kijk dan of 1 en 199 misschien priem zijn, zo niet dan misschien 2 en 198 enz. ben je tegen de tijd dat je 100 bereikt nog geen paar priemgetallen tegengekomen dat samen 200 is, dan weet je dat $G(200)$ niet geldt. Ben je wel zo'n paar tegengekomen dan geldt $G(200)$ wel. Dit is inmiddels al voor vele getallen gedaan, ongetwijfeld met handigere methodes, en terwijl de grens 10^{17} al gepasseerd is, is er nog steeds geen getal gevonden dat niet voldoet. Maar langs deze weg zal nooit zekerheid ontstaan dat er in de verre toekomst niet toch een getal zal opduiken dat het vermoeden van Goldbach ontkracht. Vooralsnog is het vermoeden van Goldbach dus een open probleem, en daarmee een voorbeeld van een wiskundige bewering waarvan noch de bevestiging noch de ontkenning op dit moment bewezen is. Dat zulke uitspraken bestaan is inherent aan de wiskundige arbeid, waarin er altijd weer nieuwe vragen zullen zijn. In het vervolg zullen we regelmatig teruggrijpen op het vermoeden van Goldbach als voorbeeld van een open vraag. Mocht Goldbach's vermoeden bij het lezen van dit artikel al beslist zijn, dan zijn er ongetwijfeld nog genoeg andere vermoedens die als voorbeeld kunnen dienen.

Logica en constructie

In overzichtelijke situaties, zoals we die in de werkelijkheid tegenkomen, zijn eenduidige uitspraken wel of niet waar. Dat inzicht maakt onderdeel uit van de logica die we in dergelijke situaties hanteren. Het wiskundig universum is echter niet overzichtelijk, het is onaf, en het is oneindig, en laat zich daarom niet zomaar begrijpen met de logica die we ontleend hebben aan de werkelijkheid. Voor Brouwer gaat logica niet vooraf aan de wiskunde, maar moet er uit worden afgeleid. Het constructieve karakter van zijn wiskunde heeft directe gevolgen voor de te hanteren logica. De logische voegwoorden krijgen bij hem een constructieve inhoud. Voor de twee uitspraken uit het voorafgaande is die constructieve betekenis als volgt:

1. De uitspraak $A \vee \neg A$ betekent: ik heb een bewijs voor A of ik heb een bewijs voor $\neg A$. Aangezien dit bij het vermoeden van Goldbach niet het geval is, is Goldbach $\vee$ $\neg$Goldbach dus géén stelling.
2. De uitspraak $\forall n$ (n is even $\vee$ n is oneven) betekent: ik heb een methode waarmee ik voor elk natuurlijk getal n beslissen kan of n even is, dan wel oneven.

De tweede uitspraak is wel een stelling, de benodigde methode is te halen uit het inductiebewijs dat we boven gaven voor deze uitspraak. Die methode kunnen we ook geven in de vorm van een functie f, bijvoorbeeld met het volgende recursieve voorschrift:

$$f(1) = 1$$
$$f(n+1) = 1 - f(n)$$

Deze f is dan een constructie die berekent of n even is of oneven, hetgeen wordt gemeld met een 0, respectievelijk een 1.

Nu uitspraken een constructieve inhoud hebben kunnen ze ook gebruikt worden als basis voor nieuwe constructies. Omdat we weten: n is even $\vee$ n is oneven, kunnen we een functie g maken met het voorschrift:

$$g(n) = \begin{cases} 0, & \text{als n is even;} \\ 1, & \text{als n is oneven} \end{cases}$$

Die functie is effectief dezelfde als de zojuist gedefinieerde functie f.

En daarom juist wijzen we een definitie als de volgende af:

$$x = \begin{cases} 0, & \text{als Goldbach} \\ 1, & \text{als } \neg\text{Goldbach} \end{cases}$$

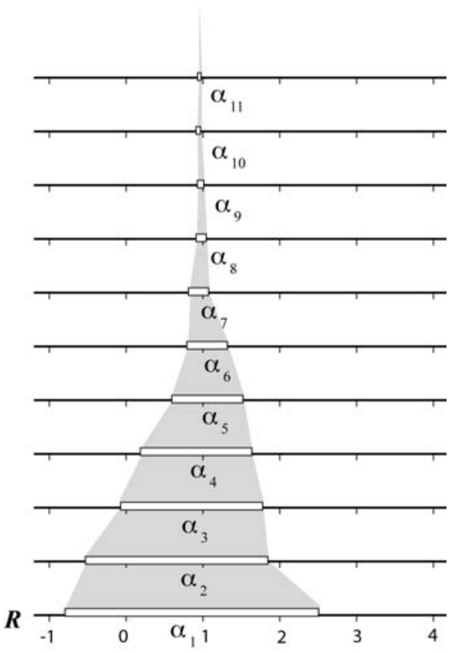
want om x te construeren moeten we eerst beslissen welk van beide gevallen geldig is, maar vooralsnog hebben we geen procedure om dat te doen. Dit ding x is geen wiskundig object, en dus ook geen natuurlijk getal, want een natuurlijk getal kunnen we binnen een afzienbaar aantal eenduidige stappen maken.

Dubbele ontkenning

Nu we logische formules lezen als mededelingen met een constructieve inhoud ontstaat er ook een wezenlijk verschil tussen een bewering 'A' (A is waar) en de bewering '$\neg\neg A$' (A is niet onwaar). Stel je zoekt een oplossing voor een bepaalde vergelijking $h(x) = 0$, dan ben je gesteld voor de vraag: '$\exists x h(x) = 0$?'. Het kan zijn dat de aanname dat er géén x bestaat tot een tegenspraak leidt; dan weten we dus dat het niet zo is dat er geen nulpunt is, oftewel $\neg\neg\exists x h(x) = 0$. Maar dat bewijs op zich levert nog geen methode om dat nulpunt te vinden. Pas als we het nulpunt hebben, oftewel een constructie kunnen aangeven die het nulpunt levert, dan kunnen we beweren $\exists x h(x) = 0$.

De reële getallen

De stappen die we eerder aanbrachten op het continuüm zijn van een willekeurige maat,



Figuur 1 Een 'reëel getal'

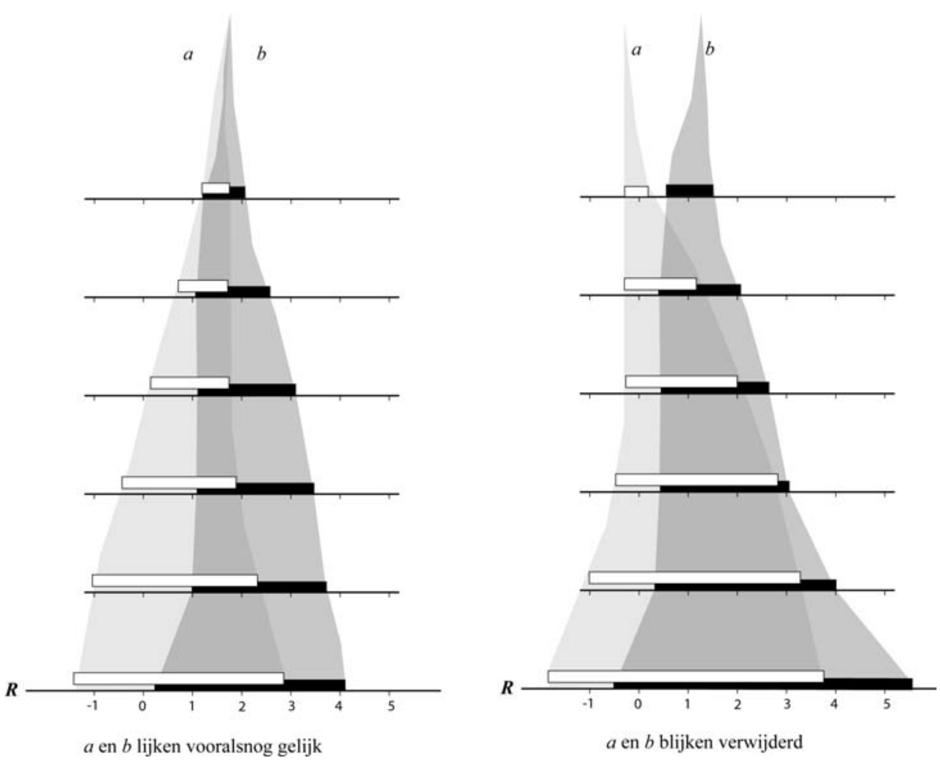
we zouden die stappen ook kleiner of groter hebben kunnen kiezen. Het is een wezenlijk kenmerk van het continuüm dat het er lokaal na uitvergroting altijd weer net zo uitziet als voorheen. Zo kunnen we het stuk tussen 0 en 1 onderverdelen in tien kleinere stukjes, die we op hun beurt ook weer kunnen onderverdelen in 10 nog kleinere, enzovoorts, zodat we een schaalverdeling krijgen die met factor 10 omlaag steeds verder verfijnt. (We hadden natuurlijk net zo goed een andere basis dan 10 kunnen kiezen.) Al die schaalstreepjes zijn eindige decimaalbreuken en vullen het continuüm allerminst op, we kunnen terwijl we de schaal verfijnen immers steeds tussen twee maatstreepjes gaan zitten, bij uitvergroting zien we dat daar altijd weer genoeg ruimte voor is. Zo kunnen we al afdalend van verfijning naar verfijning een plaats aanwijzen in het continuüm met almaar toenemende nauwkeurigheid. Die aanwijzing bestaat dan uit opeenvolgende paren van maatstreepjes waartussen we hebben besloten te blijven. Deze weg komt nooit tot een einde omdat we na uitvergroting altijd weer voor in wezen dezelfde overweldigende keuzeruimte staan. Zo komen we tot het begrip 'reëel getal', als een eindeloze rij intervallen (dat wil zeggen paren maatstreepjes), waarbij de volgende altijd bevat is in de voorgaande en de breedte gedurig inkrimpt om smaller te worden dan elke verfijning van de schaal, zie Figuur 1.

Dit is theoretisch wat ons te wachten staat als we een bepaalde lengte volmaakt nauwkeurig zouden willen opmeten. Vergeten we even de kwantumfysica dan is die lengte altijd nog nauwkeuriger op te meten, omdat we altijd weer verder kunnen uitvergroten. Het is ook het beeld dat we oproepen als we een reëel getal voorstellen met een eindeloze rij decimalen. In elk stadium geeft de nog onvoltooide rij een gebied aan waarbinnen we verder zullen blijven. Hebben we bijvoorbeeld 3,1415 dan beperken we ons daarmee tot het gebied tussen 3,141 en 3,142. Bij de volgende decimaal 3,14159 is dit verder ingeperkt tot 3,1415 en 3,1416. (Waarmee niet gezegd is dat deze twee concepten geheel samenvallen.) Hierbij laten we het beeld los van reële getallen als minuscule stipjes zonder omvang die tezamen de getallenlijn te vormen. Een reëel getal is niet een punt zonder afmeting, maar een voortschrijdend proces van inperking dat nooit voltooid is, waarbij we steeds scherper een deel van het continuüm afbakenen. Dit concept strookt ook met het karakter van elk concreet reëel getal waar we in de wiskunde mee rekenen; wortels, machten, logaritmen, goniometrische waarden constanten als π, e en γ, we kennen er — enkele bijzondere rationale waarden daargelaten — altijd maar een beginstukje van. Voor een platonist is π een oneindige rij decimalen die ergens in een gouden boek zijn opgeschreven, in de praktijk echter is het een eindig aantal decimalen dat we uitgerekend hebben en dat op dat moment voldoet voor onze berekeningen.

De onderlinge ligging van getallen

Bekijken we de onderlinge ligging van twee van zulke reële getallen dan kunnen zich verschillende mogelijkheden voordoen.

1. $a = b$
   Als we weten dat de intervallen in elk stadium blijven overlappen, dan zijn de twee plaatsen die we aanwijzen niet van elkaar te onderscheiden en hebben we dus met hetzelfde reële getal te maken. Zie Figuur 2, links.
2. $a\#b$
   Als we weten dat op een bepaald moment de intervallen losraken, dan zijn a en b verschillende reële getallen. Zulks is rechts in Figuur 2 gevisualiseerd. Blijkbaar weten we dan in welk stadium zij losraken en kunnen dan aan de bijbehorende intervallen zien welke links en welke rechts ligt, dus beslissen $a < b$ of $a > b$. We noemen een tweetal getallen dan *verwijderd* van elkaar, notatie $a\#b$.
3. $a \neq b$
   Het kan ook zijn dat we alleen weten dat de intervallen niet altijd zullen blijven overlappen, maar geen aanwijzing hebben in welk stadium ze van elkaar losraken. De getallen zijn dan in elk geval ongelijk (anders zouden ze altijd blijven overlappen) maar we hebben niet voldoende kennis om te besluiten dat ze van elkaar verwijderd



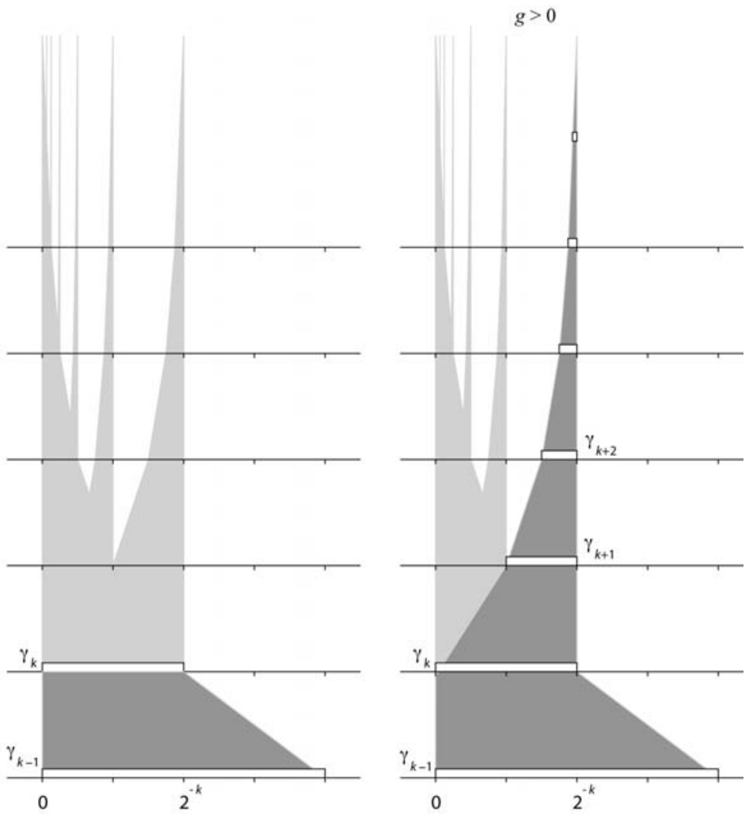
Figuur 2 De onderlinge ligging van reële getallen a en b.

zijn. In feite is $a \neq b$ hetzelfde als $\neg\neg a \# b$. De klassieke wiskunde kent de zogenaamde trichotomie die behelst dat voor reële getallen a en b er precies drie mogelijkheden zijn: $a < b$, $a = b$ of $a > b$. In bewijsvoering is dit een graag toegepaste gevalonderscheiding. Intuïtionistisch is een dergelijke opsplitsing niet mogelijk omdat de onderlinge ligging van reële getallen niet altijd te bepalen is. We geven twee voorbeelden.

Een zwevend getal
De situatie kan zich voordoen dat we van een getal niet weten waar het zich ten opzichte van 0 bevindt, we spreken dan van een zwevend getal. Dat kan zijn omdat we niet weten of $a = 0 \vee a \neq 0$, zoals bij het volgende getal g dat we construeren op basis van het vermoeden van Goldbach. De rij intervallen voor g vormen we stap voor stap als volgt:

- Onderzoek $G(n)$, te beginnen bij $n = 1$.
- Zolang $G(n)$ voor de oplopende n nog geldt, laat je het interval inkrimpen rond 0, met $\gamma_n = [0, 2^{-n}]$.
- Als je echter stuit op een k waarvoor $G(k)$ niet geldt, laat je het interval voor verdere n inkrimpen rond 2^{-k}: $\gamma_n = [2^{-k} - 2^{-n}, 2^{-k}]$

Als er nooit een Goldbach-tegenvoorbeeld opduikt komt g uit op 0. Maar omdat we tevoren niet weten of er toch tegenvoorbeeld zal komen, blijven we in die situatie over de verdere ontwikkeling van k steeds even onzeker. In Figuur 3 is in het linkerdiagram de trechter boven γ_k daarom licht van kleur. Hebben we eenmaal een tegenvoorbeeld gevonden, dan ligt de ontwikkeling van g verder geheel vast. Om dit te benadrukken is de trechter rechts donker van kleur gemaakt. Verschijnen er wel tegenvoorbeelden dan blijft het getal g steken op zekere 2^{-m} en is dus ongelijk aan 0, zie Figuur 3. Zolang het Goldbach's vermoeden open blijft, zal ook de ligging van g t.o.v. 0 ongewis zijn, en mogen we niet stellen dat $g = 0 \vee g \neq 0$.



Het getal $2k$ blijkt de som van twee priemgetallen te zijn.

Het getal $2k$ blijkt geen som van twee priemgetallen te zijn.

Figuur 3 Zwevend getal g. Tot $2k$ blijkt elk even getal de som van twee priemgetallen te zijn.

Nog een zwevend getal
Op een vergelijkbare manier kunnen we een zwevend getal d construeren waarvan niet uitgemaakt kan worden of $d \leq 0 \vee d \geq 0$. Daarbij baseren we ons op de decimaalontwikkeling van het getal π. Op dit moment zijn er van π zo'n 10^{12} cijfers berekend, zonder dat daarin een duidelijk patroon zichtbaar is geworden. Vooralsnog zijn er geen series van dezelfde cijfers gevonden langer dan ongeveer tien. We stellen nu de volgende open vraag: komt in de decimaalontwikkeling van π eerder een aaneengesloten rijtje van honderd nullen voor of eerder een rijtje van honderd negens. Het is duidelijk dat de twee series niet gelijktijdig kunnen optreden. Op basis van deze vraag construeren we het volgende getal d. Begin de rij intervallen van d met $\delta_1 = [-1/2, 1/2]$ Zolang je noch honderd opeenvolgende nullen, noch honderd opeenvolgende negens bent tegengekomen in de decimaalontwikkeling van π laat je het interval symmetrisch rond 0 inkrimpen. Zie je op een gegeven moment in de decimaalontwikkeling van π op de k-de decimaal de laatste nul in een rijtje van honderd nullen, zet dan de linkergrens van het interval vast en laat het interval verder daarheen inkrimpen (geval één). Kom je daarentegen eerst een rijtje van honderd negens tegen eindigend op de k-de decimaal, dan dwing je de rij intervallen naar rechts (geval twee). In formulevorm:

$$\delta_n = \begin{cases} [-2^{-k}, -2^{-k} + 2^{-n}], & \text{geval één} \\ [2^{-k} - 2^{-n}, 2^{-k}], & \text{geval twee} \\ [-2^{-n}, 2^{-n}], & \text{anders} \end{cases}$$

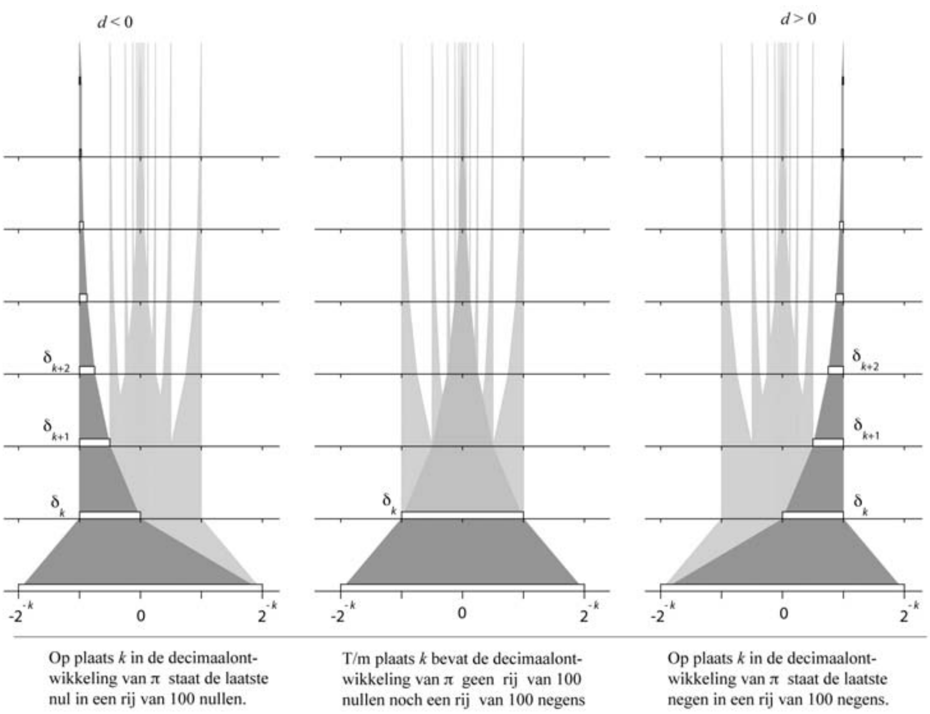
De constructie van het getal d kan de lezer zich voorstellen als in Figuur 4.

Zou je nu kunnen beslissen of $d \leq 0 \vee d \geq 0$ geldt, dan zou je al weten welk van beide series in elk geval niet als eerste komt. In Figuur 4 is de constructie van het getal d gevisualiseerd.

Brouwer gaf een soortgelijk voorbeeld [5] om te laten zien dat niet elk reëel getal een decimaalontwikkeling heeft (1920). Beschouw daartoe het getal $d + 1/10$, waarbij d het bovengenoemde zwevende getal is. Is de eerste decimaal van dit getal een 0, dan begint de decimaalontwikkeling met 0,0 en is het getal $d + 1/10$ blijkbaar niet groter dan $1/10$, dus $d \leq 0$. Is de eerste decimaal daarentegen een 1, dan ligt $d + 1/10$ blijkbaar niet onder $1/10$, en is dus $d \geq 0$. Maar we hadden d juist geconstrueerd als een voorbeeld waarvoor de beslissing $d \leq 0 \vee d \geq 0$ buiten ons bereik ligt.

Functies

Met de reële getallen kunnen we rekenen zonder problemen. Willen we bijvoorbeeld twee getallen a en b bij elkaar optellen, dan moeten we een rij intervallen construeren voor de uitkomst $a + b$. Die intervallen kunnen we bepalen vanuit de intervallen van a en van b. Willen we bijvoorbeeld een interval voor $a + b$ waarvan de grenzen niet meer dan $1/10$ uiteenliggen, vraag van a en b dan intervallen waarvan de grenzen minder dan $1/20$ uit elkaar liggen, zeg $[a_l, a_r]$ en $[b_l, b_r]$. Het in-



Figuur 4 Zwevend getal d. Gesteld dat tot plaats k de decimaalontwikkeling van π geen rij van 100 nullen noch een rij van 100 negens bevat.

terval $[a_l + b_l, a_r + b_r]$ voldoet dan aan de gestelde eis. Bij een functie van reële getallen naar reële getallen, construeren we beginstukken van het beeld op basis van beginstukken van het origineel, zowel x als $f(x)$ zijn immers reële getallen en dus onaf. Wil je $f(x)$ met een bepaalde nauwkeurigheid weten, dan is dat mogelijk mits je x met een bepaalde nauwkeurigheid aanlevert. Visueel kunnen we een reëelwaardige functie voorstellen als een rij grafieken waarbij de lijn van de grafiek met steeds scherpere pen getrokken wordt, zie Figuur 5.

Geen sprongen

De bekende functies uit de analyse zoals polynoomfuncties, e-macht, logaritme, en goniometrische functies zijn constructief en stellen ons niet voor problemen. Treffen we een x-waarde die zweeft, dan kunnen we het beeld gewoon ook laten zweven, de aard van de reële getallen is dat we $f(x)$ stap voor stap kunnen bijstellen, al naargelang we x beter in beeld hebben. Dit gaat echter mis als we voor de y-waarde een abrupte keuze willen maken, zoals het geval was bij het bepalen van de eerste decimaal van het eerdergenoemde getal d. We lichten dit toe door nog een ander voorbeeld uit te werken. Stel: we willen een functie S maken op het interval $[-1, 1]$ met

$$S(x) = \begin{cases} 0, & \text{als } x \leq 0; \\ 1, & \text{als } x > 0 \end{cases}$$

Neem nu het eerder genoemde zwevende getal g waarvan niet beslist kan worden of $g = 0 \vee g \neq 0$. Het beeld $S(g)$ moet tot op elke nauwkeurigheid bepaald kunnen worden, laten we zeggen dat we voor het beeld van g een interval willen met een breedte niet groter dan $1/2$. Omdat 0 en 1 te ver uit elkaar liggen is S dan genoodzaakt het beeldinterval voor $S(g)$ hetzij bij 0 hetzij bij 1 te kiezen. Nu mag S van ons vragen om een interval van g dat flink smal is. De breedte van dat interval correspondeert met een n tot waar Goldbach dan gecontroleerd is. Op grond van die n moet S dan beslissen of het beeld van g in de buurt van 0 zal liggen dan wel in de buurt van 1. Maar dan zou S op grond van die eerste n getallen het vermoeden van Goldbach moeten kunnen beslissen, waarvan we aannamen dat dat (nog) niet mogelijk is.

Twee centrale stellingen

Dat reëelwaardige functies geen sprongen kunnen vertonen hebben we aannemelijk gemaakt met een beroep op de aard van het reële getal als eindeloze keuzerij, en op een notie van wat functies uitvoerbaar of 'constructief' maakt. Daarbij namen we stilzwijgend aan dat de functie totaal is, dat wil zeggen voor alle reële getallen gedefinieerd moet zijn. In de aangevoerde argumenten ligt in feite besloten dat een reëelwaardige functie wel continu moet zijn om uitvoerbaar te zijn. Binnen het bestek van dit artikel voert het te ver een technische uitwerking te geven, we vermelden derhalve zonder bewijs de twee stellingen die de essentie van reëelwaardige functies vastleggen:

Stelling 1: Elke totale functie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{N}$ is constant.

Stelling 2: Elke totale functie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ is continu.

Het is interessant de eerste stelling te bezien in relatie tot de verzamelingenleer van Cantor waarin steeds grotere verzamelingen worden opgebouwd door machtsverzamelingen te nemen, dus verzamelingen van alle deelverzamelingen van een bepaalde verzameling. Bij Cantor is de machtsverzameling altijd 'groter' dan de verzameling zelf. De machtsverzameling van A kunnen we voorstellen als alle functies van A naar $\{0, 1\}$. Uit stelling 1 volgt dat voor intuïtionisten deze machtsverzameling van $\mathbf{R}$ maar twee elementen heeft, namelijk de functie f met constant $f(x) = 0$ en die met constant $f(x) = 1$.

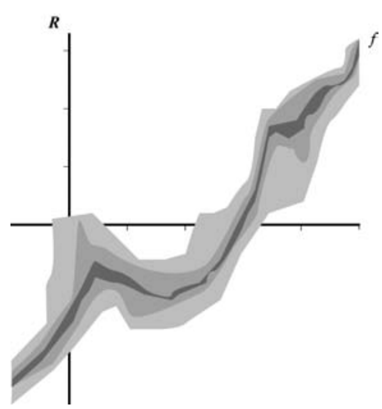
Geen tussenwaardestelling

Een ander mooi resultaat over reëelwaardige functies betreft zogenaamde tussenwaarden van functies. In de klassieke analyse hebben we

Tussenwaardestelling Gegeven een continue functie $f : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ met $f(0) < 0$ en $f(1) > 1$, dan is er een $x \in \mathbf{I}$ met $f(x) = 0$.

Hier staat $\mathbf{I}$ voor het eenheidsinterval $[0, 1]$. Intuïtionistisch geldt deze stelling niet. We zullen laten zien dat het vinden van zo'n nulpunt net zo veel voorzienigheid vergt als het beslissen of Goldbach wel of niet waar is. Om niet al te zeer verstrikt te raken in technische details beschouwen we de functie: $f : [0, 3] \to \mathbf{R}$ met $f(x) = \min(x - 1, 0) + \max(0, x - 2) + d$ waarbij d het zwevende getal is waarvan niet achterhaald kan worden of $d \geq 0 \vee d \leq 0$.

Links in Figuur 6 zien we wat er met deze functie aan de hand is. In het gebied van 1 tot 2 bevindt f zich steeds rond de x-as.



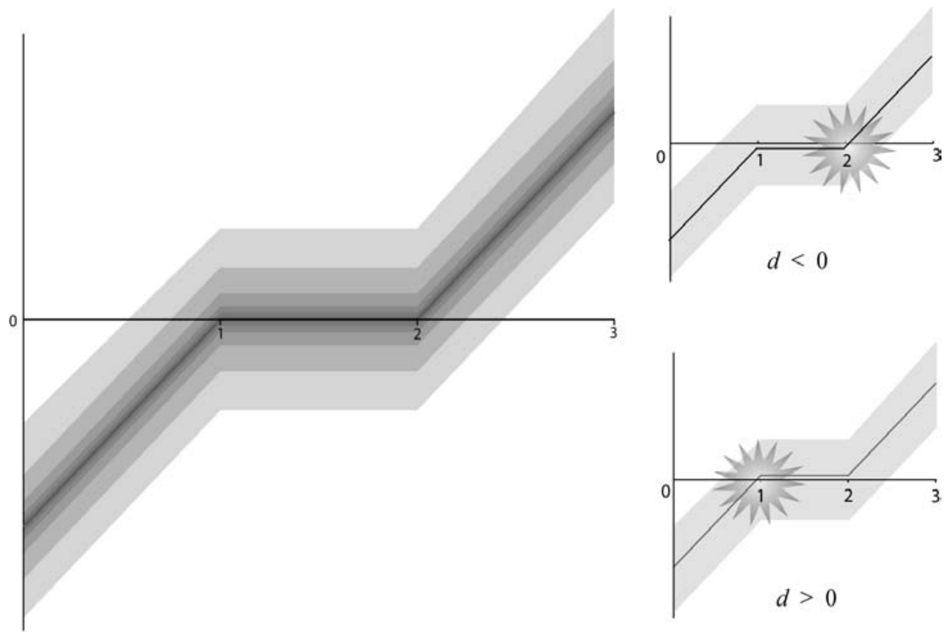
Figuur 5 Functie

Terwijl de decimalen van π worden afgezocht naar een rij van honderd nullen dan wel honderd negens krimpt het beeld steeds verder en trekt zich van 1 tot 2 steeds dichter rond de x-as samen. Mochten zich voor het eerst een rijtje van honderd nullen voordoen in de decimaalontwikkeling van π, dan trekt d de grafiek iets omlaag en zal er alleen nog een nulpunt ontstaan rond 1 (zie rechtsboven). Mocht daarentegen eerder een rijtje van honderd negens verschijnen dan tilt d de grafiek iets omhoog en komt het enige nulpunt helemaal bij 2 (zie rechtsonder). Een onvoorspelbaar kleine verschuiving in de y-richting duwt het nulpunt zo een hele eenheid van zijn plaats. Wil nu de ligging van het nulpunt bepaald worden dan moet al gekozen worden hetzij in de buurt van 1 de gaan zitten, hetzij bij 2, maar de kennis om dat te doen is dezelfde die nodig is om te beslissen of $d \geq 0 \vee d \leq 0$.

Tegenover dit negatieve resultaat staan twee positieve stellingen:

- Voor belangrijke deelklassen van functies is de tussenwaardestelling intuïtionistisch wel geldig. Stijgt f monotoon, of is f bijvoorbeeld een polynoomfunctie, dan is er wel een constructie om een nulpunt te vinden.
- Bij elke functie kan een bijna-nulpunt gevonden worden: dat wil zeggen een x waarvoor $f(x)$ minder dan 10^{-n} van 0 verschilt.

De bovenstaande weerlegging van de tussenwaardestelling heeft ook in de klassieke wiskunde een plaats. Daar toont deze functie aan dat er geen continue operatie op $C(\mathbf{I}, \mathbf{I})$ kan bestaan die een nulpunt van f geeft.



Figuur 6 Tussenwaarde

Geen dekpuntstelling

In 1952 schreef Brouwer een artikel [1] waarin hij zijn eigen dekpuntstelling intuïtionistisch weerlegt. De situatie is vergelijkbaar met die bij de tussenwaardestelling. Het vinden van een dekpunt bij een willekeurige continue afbeelding $f : \mathbf{I}^k \to \mathbf{I}^k$ veronderstelt een constructie om voor een reëel getal x te kunnen beslissen $x \geq 0 \vee x \leq 0$. Omdat die constructie niet bestaat blijkens getallen als d is het dekpunt niet vindbaar. Ook hier is er echter wel een bijna-dekpunt te vinden, een punt dat minder dan 10^{-n} van zijn plaats gaat. Brouwer laat in het artikel zien hoe dit voor dimensie $k = 2$ gedaan kan worden.

Deels onbekende getallen

De intuïtionistische analyse behandelt reële getallen als onaffe objecten. De grootheden die optreden in dagelijks rekenwerk zijn meestal ook onaf. Dat kan zijn omdat de grootheid een lengte is die altijd nog nauwkeuriger opgemeten had kunnen worden. Het kan ook een grootheid zijn die wel geheel is of rationaal maar waarvan de precieze getalwaarde schommelt dan wel niet vastgesteld kan worden. Denk aan getallen als: het aantal inwoners van Nederland, de gemiddelde leeftijd van die Nederlanders, de leeftijd van de aarde. Ook bij deze grootheden zien we dezelfde kwesties optreden als bij de intuïtionistische getallen. Als N het aantal inwoners van Nederland is, dan is het moeilijk vast te stellen of $N \geq 16.421.651$ dan wel $N \leq 16.421.651$, dat zal per minuut kunnen verspringen en ook gevoelig zijn voor hoe we het exacte moment van geboorte of sterfte definiëren. Zijn we in een berekening uitgekomen op $x \sim 0,25$, dan ligt x blijkbaar tussen $245/1000$ en $255/1000$ en is niet meer vast te stellen of $x \geq 1/4 \vee x \leq 1/4$. In de schoolwiskunde hinken we vaak op twee gedachten. Enerzijds is er de exactheid uit de klassieke analyse, anderzijds willen we dat de leerling zich realiseert dat de getallen slechts benaderingen zijn. De zaak loopt regelmatig door elkaar, bijvoorbeeld:

1. “Los op voor $x \in [0, \pi]$ $\sin(1/2x) < 0,8$.” Wat is hier het verschil met de vraag $\sin(1/2x) \leq 0,8$?
2. “Het gewicht van appels (in grammen) is bij benadering normaal verdeeld met $\mu = 48$ en $\sigma = 12$g.” Moet hier continuïteitscorrectie worden toegepast?

Referenties

1 L.E.J. Brouwer, ‘Door klassieke theorema’s gesignaleerde pinkernen die onvindbaar zijn’, Kon. Nederlandse Academie van Wetenschappen. Proc. Ser. A55 (1952), pp. 443–445.

2 L.E.J. Brouwer, ‘Over de grondslagen der wiskunde’, proefschrift, Uitgegeven in epsilonreeks *L.E.J. Brouwer en de grondslagen der wiskunde*, D.van Dalen, deel 51.

3 L.E.J. Brouwer, ‘Over de onbetrouwbaarheid der logische principes’, Tijdschrift voor Wijsbegeerte 2, pp. 152–158, in bovenvermelde epsilonuitgave.

4 L.E.J. Brouwer, ‘Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten’, Verhandelinghen KNAW in ‘Brouwer Collected Works’, ed. A.Heyting, North Holland, Amsterdam.

5 L.E.J. Brouwer, ‘Besitzt jede reelle Zahl eine Dezimalbruchentwicklung?’, Mathematische Annalen vol 83, nr 3-4 september 1921 (via www.springerlink.com/content/j610803w2l7x4192)

6 Anne Troelstra, Dirk van Dalen, *Constructivism in Mathematics*, volume 1, North Holland, Amsterdam, 1988