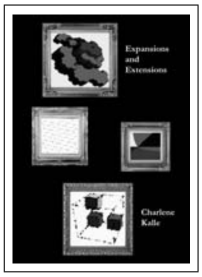
In de verdediging

In defence

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht.

Redacteur: Geertje Hek
la Voie-du-Coin 7
1218 Grand-Saconnex
Zwitserland
G.M.Hek@uva.nl



Expansions and Extensions

Charlene Kalle

Op 27 augustus van dit jaar promoveerde Charlene Kalle aan de Universiteit Utrecht bij Richard Gill en Karma Dajani op het proefschrift met de prikkelende titel *Expansions and Extensions*. Om wat voor ontwikkelingen en uitbreidingen gaat het hier?

Getalsontwikkelingen

In haar proefschrift bestudeerde Kalle de eigenschappen van een dynamisch systeem dat gebruikt kan worden om getalsontwikkelingen te maken. Standaard voorbeelden van getalsontwikkelingen zijn de decimale en de binaire ontwikkeling, respectievelijk met basis 10 en basis 2. In het algemeen hebben getalsontwikkelingen niet noodzakelijk een gehele basis. Voor een reëel getal $x \in [0,1)$ is de zogenaamde β-ontwikkeling van de vorm $x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n/\beta^n$, waarbij $\beta > 1$ de basis is en alle getallen b_n in een cijferverzameling $A = \{a_0, ..., a_m\}$ liggen. Met $\beta = 10$ en $A = \{0, 1, ..., 9\}$ is dit precies de decimale ontwikkeling.

Sinds het einde van de vijftiger jaren is veel onderzoek gedaan naar ontwikkelingen met een niet-gehele basis β en cijfers 0 tot en met $\lfloor \beta \rfloor$, het grootste gehele getal kleiner dan β. Voor het maken van dergelijke ontwikkelingen kunnen dynamische systemen worden gebruikt. Een binaire ontwikkeling in basis 2 en met cijfers 0 en 1 kan bijvoorbeeld worden gegenereerd met de *doubling map* $T : x \mapsto 2x \mod 1$ die de cijfers $b_n = b_n(x)$ van $x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n/2^n$ bepaalt als volgt:

$$b_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1 & \text{als } x \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases} \quad \text{en} \quad b_n(x) = b_1(T^n x)$$

Kalle heeft een afbeelding bestudeerd die getalsontwikkelingen maakt voor een reële basis $\beta > 1$ en cijfers in een *willekeurige* eindige verzameling van reële getallen, $A = \{a_0, ..., a_m\}$. De enige eis op deze cijferverzameling is dat twee opeenvolgende cijfers niet te ver uit elkaar mogen liggen. In tegenstelling tot de klassieke cijferverzameling $\{0, 1, \ldots, \lfloor \beta \rfloor\}$, die je compleet zou kunnen noemen, bevatten de cijferverzamelingen bij Kalle niet alle cijfers van 0 tot en met $\lfloor \beta \rfloor$. De ontwikkelingen heten daarom *β-expansions with deleted digits*. De bijbehorende genererende transformatie die ze heeft bekeken is een 'zaagtandafbeelding': stuksgewijs lineair met helling β en voor ieder cijfer a_j is er een interval waarop de transformatie gelijk is aan $\beta x - a_j$. Voor niet-gehele β en de klassieke cijferverzameling is de transformatie gelijk aan

$$x \mapsto \begin{cases} \beta x \mod 1 & x \in [0, 1] \\ \beta x - \lfloor \beta \rfloor & x \in [1, (\lfloor \beta \rfloor)/(\beta - 1)] \end{cases}$$

Voor algemene cijferverzamelingen is de transformatie iets minder regelmatig, met 'tanden' van verschillende hoogte.

Overaftelbaar veel ontwikkelingen

Getallen tussen 0 en 1 zijn bij gebruik van een gehele basis meestal op precies één manier te schrijven. In zo'n basis zijn er aftelbaar veel getallen waarvoor dat niet geldt; die hebben precies twee ontwikkelingen. De meeste getallen hebben bijvoorbeeld een unieke decimale ontwikkeling, maar een getal als $1/4$ is te schrijven als $0,25$ en als $0,2499999...$ Het grote verschil tussen de ontwikkelingen met gehele basis en die met niet-gehele basis is, dat dit niet langer geldt voor niet-gehele bases. In een niet-gehele basis hebben meestal bijna alle getallen overaftelbaar veel verschillende ontwikkelingen. Dat betekent ook dat er niet één maar vele verschillende transformaties zijn die de getalsontwikkelingen kunnen genereren. Tussen al deze transformaties zijn er twee bijzondere, de *greedy* (gulzige) en *lazy* (luie) transformatie. De greedy transformatie maakt ontwikkelingen die op iedere plek het grootst mogelijke cijfer hebben staan. De lazy transformatie doet precies het tegenovergestelde, die pakt op ieder moment het kleinst mogelijke cijfer.

Random transformatie en uitbreidingen

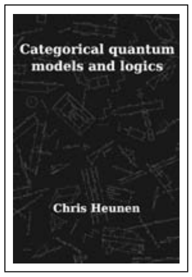
Omdat bijna alle getallen in een niet-gehele basis overaftelbaar veel verschillende ontwikkelingen hebben en er veel verschillende transformaties zijn die de ontwikkelingen maken, kun je een random transformatie definiëren. Kalle heeft zo'n transformatie gemaakt, die voor iedere n beslist wat het cijfer b_n wordt door het gooien van een dobbelsteen met het juiste aantal zijdes. In tegenstelling tot de greedy of lazy transformatie, die voor ieder getal één mogelijke ontwikkeling geven, is deze transformatie in staat alle mogelijke ontwikkelingen te geven. Van deze en andere transformaties heeft Kalle allerlei eigenschappen bestudeerd. Ook definieerde ze uitbreidingen van de transformaties. Een van de mooie eigenschappen daarvan blijkt te zijn dat ze getallen met een periodieke ontwikkeling karakteriseren.

Sfeer en gezelligheid

Het leven als aio met de erbij horende vrijheid vond Kalle heel prettig. Allereerst was er natuurlijk haar onderzoek, maar het onderwijs geven vond ze een heel welkome afwisseling. De dagelijkse begeleiding bij haar onderzoek lag vooral in handen van Karma Dajani. Aan haar heeft Kalle naar eigen zeggen ontzettend veel gehad. Niet alleen op het wiskundig vlak, maar ook qua gezelligheid. Ze konden uren praten. Als ze naar haar toeging met een wiskundige vraag ging het gesprek na een half uur vaak over heel andere dingen. Ook mede-aio's zorgden voor een leuke sfeer. Gezamenlijke vrijdagochtendkoffie en lunch, af en toe films kijken, samen schaatsen of mountainbiken; zelfs een reisje naar Rome of Berlijn was voor een groep Utrechtse aio's niet te gek. De prettige omgeving maakte, dat Kalle graag naar de universiteit kwam en niet vaak thuis werkte.

In de tweede helft van haar derde aio-jaar hadden Kalle en Dajani het gevoel dat het promoveren wel zou gaan lukken binnen de tijd. Daardoor was de druk er wat af en kon Kalle echt genieten van het aio-schap. Die periode was nog extra plezierig, omdat ze naar twee conferenties in Rome en Praag ging die precies over haar onderwerp gingen. Beide conferenties waren erg gezellig en daarmee nog eens extra motiverend.

Het laatste half jaar was moeilijker. Er was opeens heel veel dat moest gebeuren. Het proefschrift moest natuurlijk afgerond worden, maar ook voordrachten, onderwijs en het zoeken naar een postdocplek plus het schrijven van onderzoeksvoorstellen daarvoor kostten tijd. Met nog wat conferenties erbij was het een heel hectische periode waarin ze af en toe het overzicht een beetje verloor. Maar uiteindelijk is het natuurlijk allemaal goed gekomen. Sinds september werkt ze als postdoc aan de universiteit van Warwick, op een Marie Curie positie van een jaar. Waarschijnlijk zal ze in dat jaar ook wat weken in Wenen doorbrengen en als het lukt volgt er nog een jaar postdoc-schap in Wenen. Daarna is alles nog open, maar ze hoopt uiteindelijk toch wel in Nederland aan de slag te kunnen.



Categorical quantum models and logics
Chris Heunen

Gebruikmaken van kwantummechanische principes levert computers op die essentieel sneller zijn dan klassieke computers, en communicatieprotocollen waarbij in principe niet afgeluisterd kan worden. Op het eerste gezicht ideaal dus. Helaas zijn kwantumcomputers nog erg duur. Ze worden dan ook vooral gebruikt door grote instellingen als banken en overheden. Behalve de hoge kosten is er nog een nadeel: het tegenintuïtieve karakter van kwantummechanica maakt het schrijven van programma's voor een kwantumcomputer of het ontwerpen van kwantumcommunicatieprotocollen lastig. Chris Heunen, die op 7 januari volgend jaar bij Bart Jacobs en Klaas Landsman hoopt te promoveren aan de Radboud Universiteit, legt uit waarom. "Het is heel moeilijk om je intuïtie uit te schakelen, of op zijn minst om te vormen, opdat je slimme kwantumtrucs uit kunt halen. Bovendien moet een 'kwantumprogrammeur' nog erg *low level* bezig zijn; denk aan programmeren door direct poorten en bits te manipuleren, in plaats van een programmeertaal als Java of Mathematica te gebruiken die dat soort details abstraheert."

Noodzakelijke wiskundige bewijzen van correctheid

Gebruikers als banken en overheden zijn natuurlijk niet tevreden als programma's wel lijken te werken en programmeurs zeggen dat het allemaal klopt. Om hun de gewenste zekerheid te bieden, zijn wiskundige bewijzen van correctheid noodzakelijk. Bovendien wordt het een stuk gemakkelijker om een hoog-niveau-taal te ontwerpen voor kwantumomgevingen, als er bij iedere laag-niveau stap een correctheidsbewijs wordt meegenomen. Maar ook als je dat probeert, speelt het tegenintuïtieve karakter van de kwantummechanica je parten. Er zijn allerlei eigenschappen die tegen onze normale logische intuïtie ingaan. Heunen noemt als voorbeeld *entanglement*. Dit principe zegt dat twee kwantumbits op zo'n manier vervlochten kunnen raken, dat als je de een meet, de uitkomst van een meting van de ander onmiddellijk vastligt, zelfs als ze ruimtelijk heel ver gescheiden zijn.

Categorische modellen en logica

In zijn proefschrift *Categorical quantum models and logics* onderzoekt Chris Heunen welke aspecten van het gangbare model voor kwantummechanica dit soort logisch onbegrijpelijke eigenschappen veroorzaken. Zijn nieuwe uitgangsmodel is een *categorie* die aan bepaalde axioma's voldoen. De axioma's formuleren op hun beurt kwantumeigenschappen. Door hierop categorische logica te bedrijven, komt hij op een kwantumlogica die meer aansluit bij onze logische intuïtie.

Heunen legt uit op welke manier de 'gewone' kwantumlogica niet aansluit bij onze logische intuïtie: "Normale logica gaat over proposities die deelverzamelingen van een verzameling representeren. Zo'n machtsverzameling heeft een heleboel structuur; vereniging kun je bijvoorbeeld opvatten als logische conjunctie (en), en doorsnede als disjunctie (of). Men heeft geprobeerd ook zo te kijken naar gesloten deelruimten van een Hilbertruimte (toestandsruimte van de kwantummechanica), maar de logische interpretatie blijkt dan erg vreemd. Conjunctie distribueert bijvoorbeeld niet meer over disjunctie. In een analogie van Chris Isham: het is dan mogelijk om noch spek en eieren, noch ham en eieren als ontbijt te krijgen, als je de keuze hebt tussen eieren en ofwel spek ofwel ham." Het contra-intuïtieve karakter van de kwantumlogica is dus niet eens het gevolg van bijvoorbeeld de onzekerheidsrelatie in de kwantummechanica; het is nog fundamenteler.

Een categorie bevat grof gezegd objecten met pijlen, of morfismen, ertussen. De objecten mogen vagere dingen zijn dan de gebruikelijke verzamelingen of functieruimten. In zekere zin bestudeert categorieëntheorie de wiskunde, waarbij ze functies als het centrale primitieve begrip neemt, in plaats van de 'element van'-relatie. Categorieëntheorie bestudeert hoe objecten zich gedragen ten opzichte van andere objecten, zonder gebruik te maken van een interne structuur.

Dit heeft natuurlijk ook gevolgen voor de logica. Kwantoren bijvoorbeeld, zoals 'er is een y zodat ...', worden traditioneel gemodelleerd door verzamelingen $\{x \in X | \exists_{y \in Y} \varphi(x, y)\}$. Als je geen elementen hebt, maar alleen functies, moet je dat anders doen: in de categorische logica wordt een kwantor veralgemeniseerd tot een functor die geadjungeerd is aan *pullback*. In de categorie van verzamelingen (als objecten) en functies (als morfismen) komt dit dan neer op de traditionele definitie.

Categorisch modelleren van kwantumeigenschappen

Aan de hand van het entanglement-voorbeeld illustreert Heunen hoe hij kwantumeigenschappen in zijn proefschrift modelleert. Om entanglement categorisch te modelleren, moet je ten eerste eisen dat de categorie 'monoïdaal' is. Dat wil zeggen dat er een manier is om twee objecten samen te stellen tot een groot nieuw object, en net zo, om twee morfismen samen te stellen tot een nieuw morfisme van het goede type. Grof gezegd moet er dus, om entanglement te kunnen modelleren, een tensorproduct zijn op de categorie. Het woord 'tensor' is hierbij echter misleidend, want het product hoeft geen bilineariteitseigenschappen te hebben. Het is slechts nodig eindig veel objecten te kunnen groeperen. In het bijzonder moet er een 'leeg systeem' zijn, dat Heunen I noemt.

Vervolgens stelt hij als axioma, dat voor ieder object X er een partnerobject X^* is, en morfismen $I \to X^* \otimes X$ en $X \otimes X^* \to I$ die precies samenwerken zoals de natuurkundige entanglement voorschrijft. Op deze manier krijg je niet-standaard modellen, die toch de kwalitatieve eigenschap 'entanglement' vangen, en waarin je dus kunt redeneren over en eigenschappen kunt bewijzen van entanglement.

Een typisch voorbeeld van een categorie waarbij dit axioma is opgelegd, is de categorie van vectorruimten (als objecten) en lineaire transformaties (als morfismen), met als monoidale structuur daadwerkelijk het tensorproduct. Een ander voorbeeld is de categorie van verzamelingen (als objecten) en relaties (als morfismen), met als monoidale structuur het Cartesisch product van verzamelingen.

Het mooiste resultaat

Het mooiste resultaat in zijn proefschrift vindt Heunen de 'karakterisatiestelling' dat iedere categorie met bepaalde eigenschappen in te bedden is in de categorie waarin objecten Hilbertruimten zijn, en morfismen continue lineaire transformaties. Daarbij schiet hij zichzelf wel een beetje in de voet, want dit resultaat laat zien dat de 'niet-standaard modellen' die hij bekijkt altijd een deel uitmaken van het traditionele (Hilbertruimte) model van de kwantummechanica. Anderzijds zijn de categorische eigenschappen die hij oplegt vrij zwak. Normaal gesproken zijn (complexe) scalairen bijvoorbeeld al in een kwantummodel ingebakken vanaf het moment dat de natuurkundige eist dat de toestandsruimte een vectorruimte is. Heunen eist echter helemaal niets over scalairen, maar toch blijken de complexe getallen als uit het niets te verschijnen. Het voorbeeld van de entanglement illustreert dit wederom goed. Hij eist daarvoor dat er een manier ('tensorproduct') is om systemen samen te stellen, en dat er een 'leeg systeem' is. Bij een echt tensorproduct is het lege systeem de 1-dimensionale vectorruimte, dus de complexe getallen. Zoals gezegd hoeft de manier van samenstellen voor Heunen helemaal geen echt tensorproduct te zijn; sterker nog, zijn axioma's leggen helemaal geen vermenigvuldiging met scalairen op. Maar die blijkt dus wel te volgen uit de wel opgelegde axioma's.

Zwarte band in karate vergelijkbaar met promotie

Het leven als aio beviel Heunen prima: "Boeiend werk, extreem flexibele werkomstandigheden, eigen verantwoordelijkheid, redelijk salarisniveau, wat valt er niet aan te bevallen?" Hij roemt vooral de vriendelijke verwelkoming door internationale collegae: ondanks een natuurlijke concurrentie is de sfeer bij bijeenkomsten vooral opbouwend en uitnodigend tot vooruitgang door samenwerking. In zijn tweede jaar kende hij echter wel een periode van twijfel. Hij had een artikel ingestuurd, waar hij zelf best trots op was. Twee maanden later werd het tijdens zijn vakantie in niet mis te verstane bewoordingen afgewezen door de referee: in een cruciaal lemma had hij (en zijn begeleiders) iets totaal over het hoofd gezien. Die domper deed hem weleens twijfelen of dit nou zijn leven was. Achteraf denkt hij, dat zo'n periode vast hoort bij de vorming van een evenwichtige wetenschapper.

Professioneel gezien was vooral de zomer van het derde jaar fantastisch. Op de een of andere manier kreeg hij het heilige vuur te pakken en in twee weken legde hij de basis voor wat uiteindelijk twee hoofdstukken van het proefschrift zijn geworden. Het mooiste moment daarbij was de schetsmatige voltooiing van het bewijs van bovengenoemde karakterisatiestelling.

Naast de afronding van zijn proefschrift heeft Heunen afgelopen lente succesvol het zwarte-bandexamen karate afgelegd. Daar is hij heel blij mee en, terecht, ook wel een beetje trots op. Heunen vindt het trainen voor de zwarte band wel vergelijkbaar met een promotietraject: bij beide werk je ergens naartoe door jarenlange training, steeds maar aan je techniek schaven en continu bijleren.

Komende twee jaar naar Oxford

Als hij zichzelf met vrienden vergelijkt die in het bedrijfsleven werken, is hij eigenlijk alleen minder tevreden met de onzekerheid over de toekomst. Voor de komende twee jaar ligt die voor hem al wel vast. Met een Rubicon-subsidie van NWO werkt hij sinds september als postdoc in Oxford; een voortzetting van het goede leven als promovendus. Echter, de wekelijkse bijeenkomsten met zijn begeleiders, die inspirerende houvasten vormden, gaat hij waarschijnlijk wel missen.