

Ferdinand Verhulst

Mathematisch Instituut  
Universiteit van Utrecht  
Postbus 80010  
3508 TA Utrecht  
F.Verhulst@uu.nl

Oleg Kirillov

Department of Mechanical Engineering  
Technical University of Darmstadt  
Hochschulstr. 1  
D-64289 Darmstadt, Germany  
kirillov@dyn.tu-darmstadt.de

## Onderzoek

# Bottema opende Whitney's paraplu

Zo theoretisch als het onderwerp 'singulariteiten' uit de analyse van dynamische systemen ook mag klinken, de toepassing ervan in mechanica en werktuigbouwkunde heeft uiterst concrete inzichten opgeleverd. Na het poneren van Zieglers paradox in 1952 duurde het tot de jaren negentig voor het verband met Whitney's paraplu werd gelegd. Deze ontdekking was echter al in 1956 gedaan door een Nederlander. Ferdinand Verhulst en Oleg Kirillov geven Oene Bottema de eer die hem toekomt.

Als er geen wrijving was, zou het perpetuum mobile bestaan. De mathematische slinger, het standaardvoorbeeld uit de mechanica, zou zonder wrijving altijd blijven slingeren. In de werkelijkheid echter is er wrijving in het ophangpunt en is ook de luchtweerstand een tegenwerkende kracht. Dat levert energieverlies zodat de slinger langzaam maar zeker naar de evenwichtsstand - stil omlaag hangen - terugkeert. Een ander voorbeeld is het zonnestelsel. De wrijving bij de beweging van de planeten om de Zon is zo gering dat we de posities van de planeten eeuwen vooruit kunnen voorspellen zonder met wrijving rekening te houden. Bij voorspellingen op nog langere termijn - miljoenen jaren - moeten we echter wel rekening houden met allerlei soorten van wrijving die energieverlies geven.

In de mechanica die in de negentiende eeuw in boeken als [20] werd vastgelegd was de boodschap duidelijk: wrijving stabiliseert 'neutraal stabiele' evenwichtstoestanden. Wat is neutraal stabiel? Denk aan de harmonische oscillator, dat is de mathematische slinger, gelineariseerd bij de omlaag hangende positie van de slinger. De eigenwaarden van deze evenwichtspositie zijn zuiver imaginair.

Dat heet neutraal stabiel, omdat een klein positief reëel deel de evenwichtspositie instabiel maakt, een klein negatief reëel deel de positie stabiel. Zuiver imaginair zit daar net (neutraal) tussen in.

Het idee dat wrijving stabiliseert kreeg een wijde verspreiding in het onderwijs en de wetenschappelijke literatuur. Er is echter een fascinerende categorie systemen die het volgende paradoxale gedrag bezitten: *zonder wrijving bezitten ze neutraal stabiele evenwichtstoestanden, maar als er kleine wrijving aan het systeem wordt toegevoegd, worden sommige van deze stabiele evenwichten instabiel.*

Het paradoxale verband tussen wrijving (of demping) en instabiliteit werd voor het eerst opgemerkt bij rotorsystemen. Deze bleken stabiel tot bij een zekere rotatiesnelheid, maar ze werden bij wrijving al eerder instabiel. Dat vonden bijvoorbeeld Kimball in 1924 [14] en Smith in 1933 [19]. We zullen later een model voor een rotorsysteem in meer detail bekijken.

Pas in de jaren 1950-1970 werd deze paradox duidelijk geformuleerd in de publicaties van Ziegler [24-25], Bolotin [5-6], en Hermann [11-12]; hun motivatie lag vooral op het

gebied van toepassingen in de aërodynamica, met name de zogenaamde 'flutter'-trillingen van staven en panelen die belast worden. Het bleek dat de kritische belasting waarbij zo'n staaf of paneel instabiele beweging ging vertonen, aanzienlijk lager werd indien er rekening werd gehouden met wrijving.

In de mechanica werd dit verschijnsel Zieglers paradox genoemd. Het gaf aanleiding tot een groot aantal studies en pogingen tot verklaring, tot in de jaren negentig duidelijk werd dat deze instabiliteitsparadox te maken heeft met de Whitney paraplu (umbrella) singulariteit van het stabiliteitsgebied. Zo leverde singulariteiten- en bifurcatie-theorie een onverwacht inzicht in deze mechanische verschijnselen.

Opmerkelijk genoeg was dit singulariteitengedrag al ontdekt door Oene Bottema [8] in 1956. Deze ontdekking is een halve eeuw lang onopgemerkt gebleven in de literatuur over dit onderwerp. GOOGLE SCHOLAR geeft geen enkele citatie van dit artikel in de periode 1956-2008.

In dit artikel bespreken we kort Zieglers paradox, het resultaat van Whitney en het werk van Bottema [8]. In Bottema's standaardwerk *Theoretische Mechanica* (heruitgegeven door Epsilon Uitgaven) wordt dit verschijnsel overigens niet genoemd. Hij achtte het onderwerp waarschijnlijk te weinig elementair. Het vele werk van Bottema op het gebied van praktische mechanica wordt beschreven in [16]. We besluiten met een rotor model dat de verschijnselen illustreert. Een uitvoerig overzicht

van historische en moderne resultaten is te vinden in [15].

**Zieglers paradox**

In 1952 publiceerde Hans Ziegler van de ETH Zürich twee artikelen [24–25] die klassiek werden en in brede kring bekend bij werktuigbouwkundig ingenieurs; het trok ook de aandacht van wiskundigen.

Het gaat over de dubbele slinger die is weergegeven in figuur 1(a); deze bestaat uit twee onbuigzame staven van lengte  $l$ , de hoeken die ze met de verticaal maken worden aangegeven met  $\varphi_1$  en  $\varphi_2$ . De twee massapunten  $m_1$  en  $m_2$  met gewichten  $G_1$  en  $G_2$  bevinden zich op afstanden  $a_1$  en  $a_2$  van de scharnieren. De elastische weerstand en de wrijving in de scharnieren worden gegeven door  $c\varphi_1$ ,  $c(\varphi_2 - \varphi_1)$  en  $b_1\dot{\varphi}_1$ ,  $b_2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)$ , waarbij een punt differentiatie naar de tijd aangeeft. Op het vrije einde van de slinger werkt een axiale belasting  $P$ .

Met deze aannames geldt voor de kinetische energie van het systeem

$$T = \frac{1}{2} [(m_1 a_1^2 + m_2 l^2) \dot{\varphi}_1^2 + 2m_2 l a_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + m_2 a_2^2 \dot{\varphi}_2^2],$$

terwijl voor de potentiële energie geldt

$$V = \frac{1}{2} [(G_1 a_1 + G_2 l + 2c) \varphi_1^2 - 2c \varphi_1 \varphi_2 + (G_2 a_2 + c) \varphi_2^2].$$

Voor de dissipatieve, niet-conservatieve krachten geldt

$$Q_1 = Pl(\varphi_1 - \varphi_2) - ((b_1 + b_2)\dot{\varphi}_1 - b_2\dot{\varphi}_2),$$

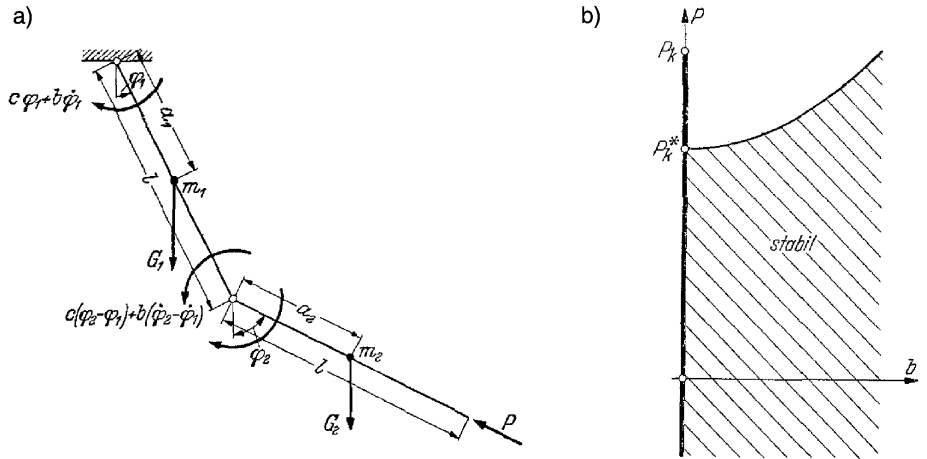
$$Q_2 = b_2(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2).$$

We kunnen vervolgens de Lagrange bewegingsvergelijkingen opschrijven:  $\dot{L}\dot{\varphi}_i - L_{\varphi_i} = Q_i$ , waarbij  $L = T - V$ . Dat leidt tot een 4-dimensionaal systeem van lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten. Ziegler neemt dan aan dat  $m_1 = 2m$ ,  $m_2 = m$ ,  $a_1 = a_2 = l$ ,  $b_1 = b_2 = b$  en begint ook met aan te nemen dat de dissipatie afwezig is ( $b = 0$ ). De stabiliteit van de verticale evenwichtspositie volgt uit de eigenwaardebepaling van een 4-dimensionale matrix. Ziegler vindt dat de evenwichtspositie instabiel wordt als de axiale belasting  $P$  groter is dan een kritische waarde  $P_k$ , waarbij

$$P_k = \left(\frac{7}{2} - \sqrt{2}\right) \frac{c}{l} \approx 2.086 \frac{c}{l}.$$

In het geval van wrijving ( $b > 0$ ) moet de berekening opnieuw worden uitgevoerd. We vinden voor de kritische belasting

$$P_k(b) = \frac{41}{28} \frac{c}{l} + \frac{1}{2} \frac{b^2}{ml^3}.$$



**Figuur 1** Oorspronkelijke figuren van Ziegler. (a) Dubbele slinger met tangentiële belasting  $P$ , (b) stabiliteitsinterval (vet,  $b = 0$ ) van de wrijvingsloze slinger en (gearceerd) het gebied van asymptotische stabiliteit van de gedempte slinger met gelijke wrijving voor beide delen van de slinger. Als  $b = 0$ , dan hebben we geen wrijving en stabiliteit indien  $P < P_k$  geldt voor de belasting.

Ziegler vond dat het gebied van asymptotische stabiliteit van de evenwichtspositie in het geval van wrijving wordt gegeven door de ongelijkheden  $P < P_k(b)$  en  $b > 0$ . Deze kun je uitzetten, samen met het stabiliteitsinterval als er geen wrijving is in een  $(P, b)$ -parameterdiagram, zie figuur 1(b). Het is verrassend dat de limiet van de kritische belasting  $P_k(b)$  als  $b$  naar nul gaat, veel lager is dan de kritische belasting van het systeem zonder wrijving:

$$P_k^* = \lim_{b \rightarrow 0} P_k(b) = \frac{41}{28} \frac{c}{l} \approx 1.464 \frac{c}{l} < P_k.$$

In de mechanica en werktuigbouwkunde wordt dit verschijnsel de paradox van Ziegler genoemd. In de conclusie van zijn klassieke boek [5] benadrukt Bolotin in 1961 dat het oplossen van deze paradox van groot belang is voor de stabiliteitstheorie. Hij was zich er niet van bewust dat de essentiële elementen van de verklaring al in 1956 door Bottema waren gepubliceerd.

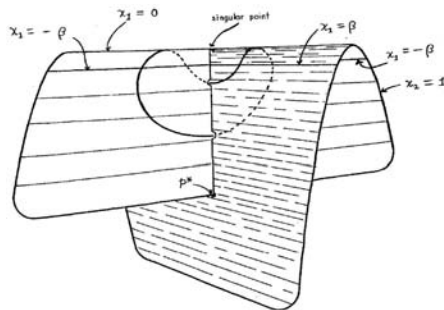
**De paraplu van Whitney**

Voordat we het werk van Bottema bekijken keren we terug naar 1943 en het onderzoek aan singulariteiten van afbeeldingen. Wat heeft dat met stabiliteitsonderzoek in de mechanica te maken? Bedenk, dat bij het bepalen van de stabiliteit van een oplossing we bijna altijd de eigenwaarden van een  $n \times n$  matrix moeten bepalen. Deze zijn de oplossingen van de karakteristieke vergelijking. In de elementen van deze matrix komen allerlei parameters voor: massa's, frequenties, dempingsconstanten enzovoorts. De eigenwaarden van de matrix willen we graag expli-

ciet kennen als functies van al deze parameters. Echter, de karakteristieke eigenwaardevergelijking die we kunnen opstellen is polynomiaal van graad  $n$ , ook de parameters zullen in deze vergelijking meestal polynomiaal van hoge graad voorkomen. We kunnen deze algebraïsche vergelijkingen, als ze van graad  $n = 4$  of hoger zijn, zelden in hun volle algemeenheid oplossen. Maar we willen nu juist weten hoe de eigenwaarden veranderen als de parameters van waarde veranderen en met name bij welke waarde van de parameters een eigenwaarde met negatief reëel deel in een positief reëel deel overgaat. Dergelijke waarden van de parameters waarbij de aard van de oplossingen kwalitatief verandert, heten *bifurcatiewaarden*.

Terwijl toegepast wiskundigen en ingenieurs in dit soort bifurcaties geïnteresseerd waren, bestond er een groep wiskundigen met een heel andere invalshoek, degenen die differentiaaltopologie en globale analyse beoefenden. Daar was men onder andere geïnteresseerd in de veranderingen van de aard van algebraïsche krommen en oppervlakken, meer in het algemeen in het gedrag van singulariteiten van afbeeldingen bij verandering van parameters. Deze ontwikkeling liep parallel, pas in de zeventiger jaren van de vorige eeuw kwamen de ontwikkelingen uit de verschillende vakgebieden bij elkaar.

In 1943 verscheen een opmerkelijk artikel van Hassler Whitney [22]. Hij beschreef singulariteiten van afbeeldingen van differentieerbare  $n$ -variëteiten in  $\mathbf{R}^m$  met  $m = 2n - 1$ . Waarom precies deze relatie tussen  $m$  en  $n$ ? Het bleek dat in dit geval een speciaal soort singulariteit een belangrijke rol speelt. De lo-



**Figuur 2** Whitney's originele schets van de paraplu [23]

cale meetkundige gedaante van de variëteit in de buurt van de singulariteit werd 'Whitney's umbrella' genoemd, de paraplu van Whitney. In figuur 2 reproduceren we de originele schets van dat singuliere oppervlak uit een begeleidend artikel [23].

We geven schetsmatig de hoofdstelling weer: Beschouw de  $C^k$  afbeelding  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  met  $m = 2n - 1$  en een geïsoleerde singulariteit  $x = p$ . We kunnen dan in een omgeving van  $p$  in  $\mathbf{R}^n$  coördinaten  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  kiezen en in  $\mathbf{R}^m$  bijbehorende coördinaten  $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$  in een omgeving van  $f(p)$  kiezen, zodat geldt

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1^2, \\ y_i &= x_i, \quad i = 2, \dots, n, \\ y_{n+i-1} &= x_1 x_i, \quad i = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Als bijvoorbeeld  $n = 2, m = 3$ , dan geldt in een omgeving van de oorsprong

$$y_1 = x_1^2, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_1 x_2,$$

zodat  $y_1 \geq 0$  en als we  $x_1$  en  $x_2$  elimineren:

$$y_1 y_2^2 - y_3^2 = 0. \tag{1}$$

Als we op de  $y_2$ -as starten voor  $y_1 = y_3 = 0$ , dan verwijdt het oppervlak zich als  $y_1$  toeneemt. Voor vaste waarden van  $y_2$  is de doorsnede steeds een parabool; als  $y_2$  door 0 gaat, degenereert de parabool tot een halve lijn, en opent weer opnieuw (in omgekeerde richting); zie figuur 2.

De studie van singulariteiten van afbeeldingen heeft na het pionierswerk van Whitney en Marston Morse een grote vlucht genomen met veel toepassingen op de theorie van evenwichts- en periodieke oplossingen van differentiaalvergelijkingen. We noemen in dit verband nog [1-4, 9-10]. Bifurcatietheorie, normaalvormen en numerieke analyse zijn up-to-date bij elkaar gebracht in [17].

Afbeeldingen zoals Whitney die bestudeerde bleken in de mechanica een grote rol

te spelen. Het was echter in 1943 moeilijk voorstelbaar dat afbeeldingen van  $\mathbf{R}^2$  in  $\mathbf{R}^3$  zoals die door Whitney in [22] als zuiver wiskundig probleem werden behandeld, al binnen enkele jaren een industriële toepassing zouden hebben.

**Bottema's oplossing**

In 1956 verscheen in het tijdschrift *Indagationes Mathematicae* een artikel van Oene Bottema [8] (1901-1992); hij was in die tijd Rector Magnificus van de TH Delft (nu Technische Universiteit Delft) en had al veel artikelen over klassieke meetkunde en mechanica gepubliceerd. Met dit artikel liep Bottema tientallen jaren op de ontwikkelingen in de literatuur vooruit. Een eerder artikel [7] kunnen we als een inleiding zien, het was een studie van de paradox van Ziegler. Het artikel [8] is echter veel algemener en bevat Ziegler's voorbeeld als speciaal geval. We schetsen de resultaten.

Beschouw een mechanisch systeem met twee vrijheidsgraden en evenwichtoplossing  $x = \dot{x} = y = \dot{y} = 0$  gegeven door

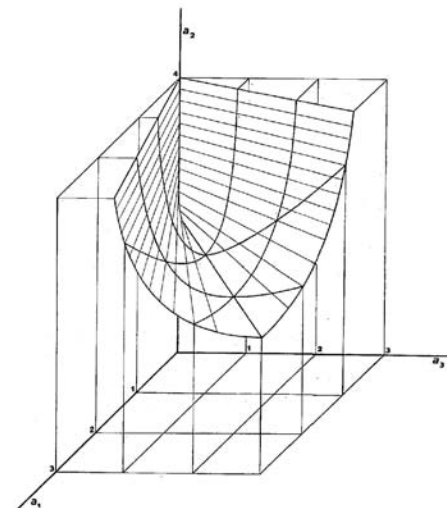
$$\begin{aligned} \ddot{x} + a_{11}x + a_{12}y + b_{11}\dot{x} + b_{12}\dot{y} &= 0, \\ \ddot{y} + a_{21}x + a_{22}y + b_{21}\dot{x} + b_{22}\dot{y} &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

met  $a_{ij}$  en  $b_{ij}$  constanten,  $\mathbf{A} := (a_{ij})$  is de coëfficiëntenmatrix van de krachten die van de posities afhangen,  $\mathbf{B} := (b_{ij})$  de coëfficiëntenmatrix van de krachten die van de snelheden afhangen. Als  $\mathbf{A}$  symmetrisch is en we hebben geen demping, dan heeft het mechanisch systeem een potentiaal functie van de vorm  $V = (a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2)/2$ ; als  $\mathbf{A}$  antisymmetrisch is, geven de krachten rotatie. Als de matrix  $\mathbf{B}$  symmetrisch is, hebben we zogenaamde niet-gyroscopische demping, als  $\mathbf{B}$  antisymmetrisch is, zijn de krachten die van de snelheden afhangen zuiver gyroscopisch. De stabiliteit van de evenwichtoplossing volgt uit de eigenwaarden van de coëfficiëntenmatrix van het systeem. De eigenwaarden zijn de oplossingen van de karakteristieke vergelijking

$$\lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0,$$

waarbij de coëfficiënten  $a_1, \dots, a_4$  van de acht coëfficiënten van het mechanisch systeem afhangen. De evenwichtoplossing is stabiel als alle eigenwaarden enkelvoudig zijn en reële delen nul of negatief hebben.

Twee elementen zijn opmerkelijk in de behandeling van dit probleem door Bottema. Allereerst blijkt hij in staat om het probleem in zijn volle algemeenheid op te lossen. Technisch gezien is dit een huzarenstukje, zeker in



**Figuur 3** De originele figuur uit 1956 van Bottema [8] geeft het gebied van asymptotische stabiliteit weer; dit wordt bepaald door de wortels van een karakteristieke vergelijking van graad 4 met bifurcatieoppervlak  $V$ , de paraplu van Whitney.

een tijd waarin formulemanipulatie nog volledig met de hand moest gebeuren. Daar houdt het echter niet op. Bottema zag in dat zijn resultaten de paradox van Ziegler oplosten. Hij liet zien dat als de parameters die met demping samenhangen naar nul gaan, we een andere limietwaarde voor de stabiliteitsgrens vinden, dan als we vanaf het begin de demping nul kiezen. Kennelijk hebben we een discontinuïteit in onze stabiliteitsvoorwaarden. In de parameterruimte wordt het kritieke oppervlak  $V$  dat deze bifurcatie beschrijft, gegeven door de vergelijking

$$a_1 a_2 a_3 = a_1^2 + a_3^2, \tag{3}$$

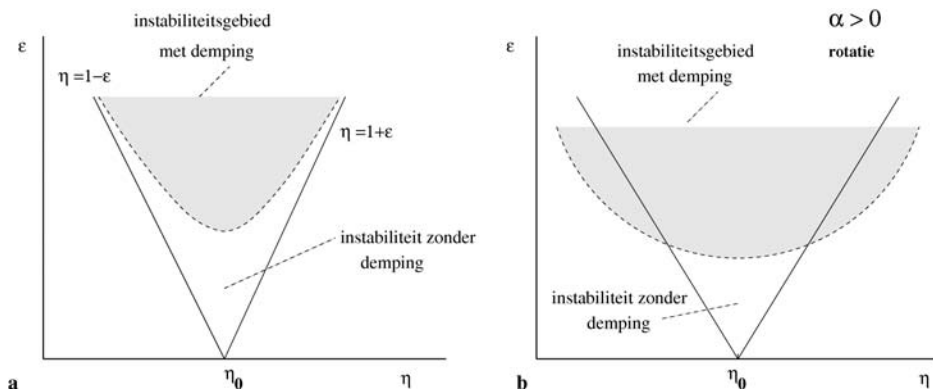
zodat  $V$  een oppervlak van de derde graad is. Bedenk dat  $a_1$  en  $a_3$  met de demping samenhangen en positief zijn. Bottema illustreert dit bifurcatiegedrag in figuur 3.

We zijn met acht parameters begonnen, terwijl het bifurcatiegedrag door drie parameters beschreven wordt. Het bifurcatieoppervlak  $V$  wordt gegeven door een afbeelding van  $\mathbf{R}^2$  in  $\mathbf{R}^3$  zoals die door Whitney werd behandeld.

In plaats van de uitvoerige berekeningen van Bottema weer te geven (zie [8] en [15]), laten we aan de hand van een expliciet voorbeeld de besproken paradox zien. Beschouw het mechanisch systeem beschreven door:

$$\begin{aligned} \dot{x} + x + y + \kappa \dot{x} &= 0, \\ \dot{y} - x + \omega^2 y &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

waarbij we alleen in de eerste vrijheidsgraad



**Figuur 4** Links het klassieke geval zoals we dat vinden voor de Mathieu vergelijking zonder en met damping. Door de damping wordt het instabiliteitsgebied van de  $\eta$ -as gelicht en wordt het kleiner. Rechts de instabiliteitsgebieden voor het rotorsysteem. Weer wordt door de damping het instabiliteitsgebied van de  $\eta$ -as gelicht, maar het gebied wordt tevens breder. De grenzen van het V-gebied als er geen damping is worden in eerste benadering beschreven door de uitdrukking  $\eta = \sqrt{1 + \alpha^2}(1 \pm \epsilon)$ ,  $\eta_0 = \sqrt{1 + \alpha^2}$ .

damping ( $\kappa > 0$ ) toelaten. De bijbehorende matrix is van de vorm

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -\kappa & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

met de volgende karakteristieke vergelijking voor de eigenwaarden  $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ :

$$(\lambda^2 + \kappa\lambda + 1)(\lambda^2 + \omega^2) + 1 = 0.$$

Als  $\kappa = 0$ , is gemakkelijk in te zien dat de triviale evenwichtoplossing instabiel is als  $0 < \omega^2 < 3$  en stabiel als  $\omega^2 > 3$ . De eigenwaarden zijn in het laatste geval zuiver imaginair. Als  $\omega^2 = 3$  dan hebben we een zogenaamde Kreinbotsing van de eigenwaarden: de 4 eigenwaarden zijn imaginair en vallen twee aan twee samen.

We geven nu de eigenwaarden zonder en met damping voor  $\omega^2 = 4$  die volgen uit een MATLAB berekening:

$$\begin{aligned} \omega^2 = 4, \kappa = 0 & \\ \text{eigenwaarden : } & \pm 1.9021i, \pm 1.1756i; \\ \omega^2 = 4, \kappa = 0.1 & \\ \text{eigenwaarden : } & -0.05851 \pm 1.1736i, \\ & + 0.0085 \pm 1.9029i; \\ \omega^2 = 4, \kappa = 0.2 & \\ \text{eigenwaarden : } & -0.1164 \pm 1.1678i, \\ & + 1.0164 \pm 1.9053i. \end{aligned}$$

Het is duidelijk dat damping in de eerste vrijheidsgraad de evenwichtoplossing destabiliseert.

**Parametrische excitatie**

Het klassieke probleem van parametrische excitatie is de beweging van een slinger met

periodiek oscillerend ophangpunt. Dat probleem wordt in lineaire benadering beschreven door de Mathieuvergelijking

$$\ddot{x} + \epsilon\kappa\dot{x} + (1 + \epsilon \cos 2\eta t)x = 0,$$

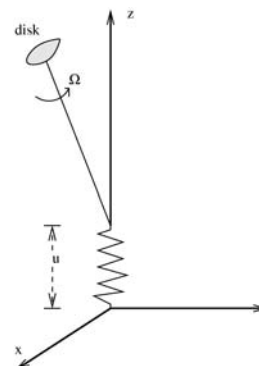
waarbij  $\epsilon\kappa$  de dempingscoëfficiënt is. De evenwichtoplossing  $x = \dot{x} = 0$  is instabiel als  $\kappa = 0$  en de waarde van  $\eta$  dicht bij een natuurlijk getal ligt; we noemen dat parametrische resonantie. In figuur 4a is het V-vormig instabiliteitsgebied in de  $\epsilon, \eta$ -parameter ruimte weergegeven zonder damping ( $\kappa = 0$ ) en met  $\eta$  in een omgeving van  $\eta_0 = 1$ . Indien er damping is ( $\kappa > 0$ ), dan is het instabiliteitsgebied kleiner. Meer informatie over deze problemen is te vinden in het overzichtsartikel [21].

Het volgende voorbeeld beschrijft een systeem met twee vrijheidsgraden en is gebaseerd op [18] en [13]. Het model is indertijd ontworpen voor de beweging van roterende assen in de stadsbussen van Praag.

Beschouw een rotor die bestaat uit een zware schijf die met constante hoeksnelheid  $\Omega$  om een starre as kan draaien. De as is elastisch gemonteerd op een fundering, de verbindingen die de as rechtop houden zijn ook elastisch. We beschouwen de projectie van de uitwijkingen van de rotor op het  $x, y$ -vlak, zie figuur 5. Als de verticale trillingen klein en harmonisch zijn met frequentie  $2\eta$ , dan worden de bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\alpha\dot{y} + (1 + 4\epsilon\eta^2 \cos 2\eta t)x & \\ + 2\epsilon\kappa\dot{x} = 0, & \\ \ddot{y} - 2\alpha\dot{x} + (1 + 4\epsilon\eta^2 \cos 2\eta t)y & \\ + 2\epsilon\kappa\dot{y} = 0. & \end{aligned} \tag{5}$$

De parameter  $\alpha$  is evenredig met de hoeksnelheid  $\Omega$  en positief. Systeem (5) bestaat uit twee Mathieu-achtige vergelijkingen met damping. De eigenfrequenties van



**Figuur 5** Rotor die bestaat uit een roterende schijf met constante hoeksnelheid  $\Omega$ , die gemonteerd is op een starre as. De as kan elastisch bewegen op de fundering met uitwijkingen in de axiale en de twee horizontale richtingen.

het systeem zonder parametrische excitatie en zonder damping (dus voor  $\epsilon = 0$ ) zijn  $\omega_1 = \sqrt{\alpha^2 + 1} + \alpha$  en  $\omega_2 = \sqrt{\alpha^2 + 1} - \alpha$ . We bestuderen nu wat er gebeurt in de buurt van de resonantie

$$\omega_1 + \omega_2 = 2\eta,$$

zodat

$$\sqrt{1 + \alpha^2} \approx \eta. \tag{6}$$

*Wat gebeurt er als er geen damping is:  $\kappa = 0$ ?* Het instabiliteitsgebied in de  $(\epsilon, \eta)$ -parameter ruimte komt overeen met wat we vonden voor de gewone Mathieu-vergelijking en is weergegeven in figuur 4 links. De randen van het V-vormig instabiliteitsgebied worden gegeven door

$$\eta_b = \sqrt{1 + \alpha^2} (1 \pm \epsilon) + O(\epsilon^2).$$

*Nu het geval met damping:  $\kappa > 0$*

We kiezen weer de resonantie  $\omega_1 + \omega_2 \approx 2\eta$ . De analyse is wat ingewikkelder. We vinden na toepassing van normaliserings- en middelmingsmethoden voor de rand van het instabiliteitsgebied:

$$\eta_b = \sqrt{1 + \alpha^2} \cdot \left( 1 \pm \sqrt{(1 + \alpha^2)\epsilon^2 - \left(\frac{\kappa}{\eta_0}\right)^2} + \dots \right). \tag{7}$$

Hieruit volgt dat het instabiliteitsgebied *groter* wordt als er damping is. Zie figuur 4 rechts. Er is dus een discontinuïteit bij  $\kappa = 0$ . Immers, als  $\kappa \rightarrow 0$ , dan gaan de randen van het instabiliteitsgebied naar de limieten  $\eta_b \rightarrow \sqrt{1 + \alpha^2}(1 \pm \epsilon\sqrt{1 + \alpha^2})$  hetgeen verschillend is van het resultaat dat we vinden als  $\kappa = 0$ :  $\eta_b = \sqrt{1 + \alpha^2}(1 \pm \epsilon)$ . Wiskundig is dit wel duidelijk, maar hoe is deze paradox vanuit de mechanica te verklaren?



Figuur 6 Oene Bottema (met dank aan R. Bottema)

Damping wordt toch verondersteld te stabiliseren? De oorzaak van de groter wordende instabiliteit is dat door de damping de twee vrij-

heidsgraden in  $x$ - en  $y$ -richting aan elkaar gekoppeld worden, zonder damping was dit niet het geval. Het is opnieuw een voorbeeld van

het optreden van instabiliteit in de mechanica en de rol die de paraplu van Whitney daarbij speelt. De genericiteit van het verschijnsel wordt benadrukt in [13].

### Besluit

Het resultaat van Oene Bottema in 1956 kwam met veel vernuft en met veel inzicht in stabiliteitsvragen tot stand. Het loste de klassieke paradox van Ziegler op, waarbij de paraplu van Whitney een prominente rol speelt (al gebruikt Bottema deze term niet). Deze paradox correspondeert met een verschijnsel dat veelvuldig optreedt in bijna-Hamiltoniaanse en bijna-reversibele systemen. Wat betreft de toepassingen komt het in uiteenlopende gebieden van de mechanica en de natuurkunde voor, van werktuigbouwkundige constructies, hydro- en aërodynamica tot contactmechanica. Daarnaast houden deze verschijnselen verband met de zogenaamde Kreinbotsing van eigenwaarden in de lineaire algebra welke zowel in de bifurcatietheorie als in de numerieke lineaire algebra een rol speelt. In het artikel [15] zijn hier over meer details te vinden. ←

### Referenties

- 1 D.V. Anosov and V.I. Arnold (eds.), *Dynamical Systems I, Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, Springer, Berlin, 1988.
- 2 V.I. Arnold, 'On matrices depending on parameters', *Russian Math. Surveys.*, 26 (1971), pp. 29–43.
- 3 V.I. Arnold, *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- 4 V.I. Arnold (ed.), *Dynamical Systems VIII, Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, Springer, Berlin, 1993.
- 5 V.V. Bolotin, *Non-conservative Problems of the Theory of Elastic Stability*, Fizmatgiz (in Russian), Moscow, 1961; Pergamon, Oxford, 1963.
- 6 V.V. Bolotin, N.I. Zhinzher, 'Effects of damping on stability of elastic systems subjected to nonconservative forces', *Int. J. Solids Struct.* 5. (1969), pp. 965–989.
- 7 O. Bottema, 'On the stability of the equilibrium of a linear mechanical system', *Z. Angew. Math. Phys.* 6 (1955), pp. 97–104.
- 8 O. Bottema, 'The Routh-Hurwitz condition for the biquadratic equation', *Indagationes Mathematicae*, 18 (1956), pp. 403–406.
- 9 M. Golubitsky and D.G. Schaeffer, *Singularities and maps in bifurcation theory*, vol. 1, Applied Mathematical Sciences 51, Springer, Berlin, 1985.
- 10 M. Golubitsky, D.G. Schaeffer and I. Stewart, *Singularities and maps in bifurcation theory*, vol. 2, Applied Mathematical Sciences 69, Springer, Berlin, 1988.
- 11 G. Herrmann and I. C. Jong, 'On the destabilizing effect of damping in nonconservative elastic systems', *ASME J. of Appl. Mechs.*, 32(3) (1965), pp. 592–597.
- 12 G. Herrmann, 'Stability of equilibrium of elastic systems subjected to non-conservative forces', *Appl. Mech. Revs.* 20 (1967), pp. 103–108.
- 13 I. Hoveijn, M. Ruijgrok, 'The stability of parametrically forced coupled oscillators in sum resonance', *Z. angew. Math. Phys.*, 46 (1995), pp. 384–392.
- 14 A.L. Kimball, 'Internal friction theory of shaft whirling', *Gen. Elec. Rev.* 27 (1924), pp. 224–251.
- 15 O.N. Kirillov and F. Verhulst, 'Paradoxes of dissipation-induced destabilization or who opened Whitney's umbrella?', verschiijnt in 2010, preprint arXiv:0906.1650.
- 16 T. Koetsier, 'Oene Bottema (1901-1992)', *History of Mechanism and Machine Science*, vol. 1, Distinguished Figures in Mechanism and Machine Science, Springer (2007), pp. 61–78.
- 17 Yu.A. Kuznetsov, *Elements of applied bifurcation theory*, Applied Mathematical Sciences 112, Springer, Berlin, 2004.
- 18 M. Ruijgrok, A. Tondl, F. Verhulst, 'Resonance in a Rigid Rotor with Elastic Support', *Z. angew. Math. Mech.* 73 (1993), pp. 255–263.
- 19 D.M. Smith, 'The motion of a rotor carried by a flexible shaft in flexible bearings', *Proc. Roy. Soc. London A* 142 (1933), pp. 92–118.
- 20 W. Thomson, P.G. Tait, *Treatise on Natural Philosophy*, Vol. I, Part I, New Edition, pp. 387–391, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1879.
- 21 F. Verhulst, *Perturbation analysis of parametric resonance*, Encyclopedia of Complexity and Systems Science, Springer, 2009.
- 22 H. Whitney, 'The general type of singularity of a set of  $2n - 1$  smooth functions of  $n$  variables', *Duke Math. J.*, 10 (1943), pp. 161–172.
- 23 H. Whitney, 'The singularities of a smooth  $n$ -manifold in  $(2n - 1)$ -space', *Ann. of Math.*, 45(2) (1944), pp. 247–293.
- 24 H. Ziegler, 'Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik', *Ing.-Arch.*, 20 (1952), pp. 49–56.
- 25 H. Ziegler, 'Linear elastic stability: A critical analysis of methods', *Z. Angew. Math. Phys.* 4 (1953), pp. 89–121.