Klaas Landsman
IMAPP
Radboud Universiteit Nijmegen
Heyendaalseweg 135
6525 AJ Nijmegen
landsman@math.ru.nl

Onderzoek

De vrije wil-stelling van Conway en Kochen

Bestaat toeval? Hebben mensen een vrije wil? In 2006 en 2009 verschenen twee opzienbarende artikelen van de bekende wiskundigen John Conway en Simon Kochen uit Princeton, waarin zij onder plausibele aannamen – die neerkomen op slechts een klein deel van de kwantummechanica – bewijzen dat als experimentatoren over vrije wil beschikken, elementaire deeltjes in sommige situaties indeterministisch (en daarmee strikt onvoorspelbaar) gedrag vertonen. Klaas Landsman, hoogleraar mathematische fysica aan de Radboud Universiteit, legt het bewijs uit, inclusief de historische context.

De vraag of alle gebeurtenissen al bepaald zijn vóór ze plaatsvinden, en dus een noodzakelijk gevolg zijn van eerdere gebeurtenissen, of dat er ook strikt toevallige voorvallen zijn, wordt al sinds de klassieke oudheid gesteld. Presocratici als Democritus en Empedocles zagen toeval als een scheppende kracht, maar Plato achtte dit juist in strijd met de kosmische ordening. Ook de grote islamitische geleerde Omar Khayyam (1048-1123) meende dat "De eerste dag van de Schepping schreef wat de Dag des Oordeels zal lezen".

De discussie kon echter pas scherp worden gevoerd toen het begrip Natuurwet met Descartes zijn intrede deed. De te beantwoorden vraag is dan of de heersende natuurwetten deterministisch zijn, in de zin dat de toekomst volgens deze wetten geheel door het heden is bepaald.

Volgens de klassieke mechanica van Newton is dat het geval (behoudens pathologische situaties waarin bijvoorbeeld de krachten niet aan een Lipschitz voorwaarde voldoen [14]), omdat de naar hem genoemde bewegingsvergelijkingen in het algemeen een unieke oplossing bij gegeven beginvoorwaarden hebben. Wie kent niet het citaat uit Laplace's *Essai Philosophique sur les Probabilités*, waarin hij zich een superintelligent wezen voorstelt dat op een bepaald moment zowel alle krachten in de natuur kent als de toestand van alle deeltjes, zodat niets voor hem onzeker is en zowel de de toekomst als het verleden zich voor hem ontvouwen?

Kwantummechanica

In één van de beroemdste artikelen van de 20ste eeuwse natuurkunde [19] beweerde Werner Heisenberg op grond van de in dat artikel afgeleide (en later naar de auteur genoemde) onzekerheidsrelatie tussen plaats en impuls dat de demon van Laplace de toestand van alle deeltjes volgens de kwantummechanica in principe niet zou kunnen kennen, en dat de natuur daarom indeterministisch was. Een groot logicus was Heisenberg klaarblijkelijk niet (met de ongeldigheid van het antecedent bij Laplace vervalt niet automatisch ook diens conclusie), maar de stemming keerde zich in die dagen duidelijk tegen het determinisme. Zo had Max Born al een jaar eerder in een eveneens beroemd artikel [6] verkondigd dat de kwantummechanica niet de vraag naar de precieze toestand van een systeem van deeltjes na een botsingsproces kan beantwoorden (zoals de klassieke mechanica dat wel kan), maar slechts de vraag naar de *kans* op een bepaalde eindtoestand. Al spoedig gesteund door Heisenberg en Bohr, zag Born dit niet als een gebrek van deze theorie, maar als een weerspiegeling van een fundamentele eigenschap van de natuur: deze zou op microscopische schaal indeterministisch zijn.

De meeste fysici sloten zich bij deze conclusie aan, behalve Einstein, nota bene een van de grondleggers van de kwantumtheorie (en bovendien de eerste die binnen dat kader probabilistisch redeneerde): hij schreef in 1926 aan Born dat hij er van overtuigd was dat God ("der Alte") niet dobbelt. Op de Solvay-conferentie van 1927 ging Einstein het gevecht aan met Bohr. In deze eerste fase van wat later het Einstein–Bohr debat zou gaan heten (zie [5, 15] voor primaire bronnen en [20, 25] voor een moderne interpretatie) probeerde Einstein de inconsistentie van de onzekerheidsrelaties van Heisenberg aan te tonen, maar dit lukte hem niet: gesteund door met name Wolfgang Pauli wist zijn opponent in ieder geval op dat moment al zijn argumenten te weerleggen. Daarop veranderde Einstein van strategie: hij accepteerde de *geldigheid* van het formalisme van de kwantumtheorie (waar de onzekerheidsrelaties direct uit volgen), en probeerde in de volgende fase van het debat de *onvolledigheid* van de theorie aan te tonen. Deze fase vond haar hoogtepunt in het artikel van Einstein, Podolsky en Rosen uit

Illustratie: Ryu Tajiri

1935 [16], waar we straks op terug komen.

Von Neumann

In de herfst van 1926 nam David Hilbert in Göttingen een nieuwe assistent aan voor zijn grondslagenonderzoek in de wiskunde. Deze assistent was Johann (Janos) von Neumann, die zich al op jonge leeftijd een naam had verworven met werk in de axiomatische verzamelingenleer. Hij zou ook belangrijk werk publiceren over Hilberts bewijstheorie, maar zijn aandacht ging, net als die van Hilbert zelf, toch vooral uit naar de kersverse kwantummechanica (waarvan Göttingen naast Kopenhagen het toonaangevende centrum was). Deze belangstelling leidde uiteindelijk tot het boek *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* [26], waarin Von Neumann voor het eerst de moderne definitie van een Hilbert-ruimte geeft, de spectraalstelling voor zowel begrensde als onbegrensde zelfgeadjungeerde operatoren bewijst, en dit formalisme bovendien verbindt met de op dat moment nog nauwelijks begrepen kwantummechanica.

De belangstelling van Von Neumann was allerminst beperkt tot de wiskundige aspecten van de kwantummechanica; zijn boek bevat uitvoerige discussies over zaken als entropie, metingen, en determinisme. Om de stelling van Kochen en Specker uit 1967 goed te begrijpen is het noodzakelijk om te weten hoe Von Neumann probeerde te bewijzen dat de natuur volgens de kwantummechanica indeterministisch is. Laat A de reëele vectorruimte van hermitische matrices (in het algemeen: begrensde zelfgeadjungeerde operatoren) op H zijn. Iedere toestand ψ als boven definieert een afbeelding $\mathcal{E}_\psi : A \to \mathbb{R}$ door middel van $\mathcal{E}_\psi(a) = (\psi, a\psi)$. In het algemeen heeft deze verwachtingswaarde een dispersie $\mathcal{E}_\psi(a^2) - (\mathcal{E}_\psi(a))^2 > 0$ (tenzij ψ een eigenvector van a is, in welk geval de dispersie nul is). Indien men de toestand niet precies kent, maar een rij eenheidsvectoren (ψ_i) heeft met kansverdeling (λ_i), $0 \le \lambda_i \le 1$, $\sum_i \lambda_i = 1$ (zodat λ_i de kans is dat het systeem zich in de toestand ψ_i bevindt), dan verkrijgt men een algemener soort verwachtingswaarde, gegeven door $\mathcal{E} = \sum_i \lambda_i \mathcal{E}_{\psi_i}$, oftewel

$$\mathcal{E}(a) = \mathrm{Sp}\,(\rho a), \tag{1}$$

waarbij Sp het spoor is (zelfs in het Nederlands ook wel *trace* genoemd), terwijl $\rho = \sum_i \lambda_i p_{\psi_i}$, met p_{ψ_i} de projectie op ψ_i; dit is een positieve matrix met spoor 1 (omgekeerd is vanwege de spectraalstelling iedere positieve matrix met spoor 1 van de gegeven vorm). Afbeeldingen $\mathcal{E} : A \to \mathbb{R}$ gegeven door (1) hebben de volgende eigenschappen:

$$\mathcal{E}(1) = 1; \tag{2}$$

$$\mathcal{E}(a^2) \ge 0; \tag{3}$$

$$\mathcal{E}(sa + tb) = s\mathcal{E}(a) + t\mathcal{E}(b), \tag{4}$$

voor alle $s, t \in \mathbb{R}$ en $a, b \in A$.

Met Heisenberg in het achterhoofd zegt Von Neumann nu dat een deterministische theorie tenminste over voldoende veel verwachtingswaarden $\mathcal{E} : A \to \mathbb{R}$ moet beschikken die dispersievrij zijn, in de zin dat

$$\mathcal{E}(a^2) = \mathcal{E}(a)^2, \tag{5}$$

voor alle $a \in A$. Dergelijke afbeeldingen kan men 'verborgen toestanden' van het systeem noemen; zij zouden onder de kwantumtheorie liggen en de voorspellingen daarvan door uitmiddeling moeten reproduceren.

Welke eigenschappen heeft een verborgen toestand $\mathcal{E}$ nog meer, behalve (5) – en daarmee automatisch (3) – en de onschuldige normalisatie (2)? Nu komt de omstreden stap: Von Neumann neemt aan dat $\mathcal{E}$ lineair is als in (4), net als in de kwantummechanica en de klassieke mechanica. Dit is voor hem voldoende om te bewijzen dat verborgen toestanden niet bestaan. Eerst bewijst hij dat een afbeelding $\mathcal{E} : A \to \mathbb{R}$ die aan (2), (3), (4) voldoet van de vorm (1) is, voor een zekere positieve matrix ρ met spoor 1. Een verborgen toestand $\mathcal{E}$ moet dan ook van de vorm (1) zijn. Maar dergelijke toestanden voldoen niet voor alle a aan (5), tegenspraak!

Als een echte wiskundige concludeert Von Neumann: 'Damit ist *im Rahmen unserer Bedingungen* die Entscheidung gefallen, und zwar gegen die Kausalität' (cursivering toegevoegd). Hij wijst er dus netjes op dat hij slechts onder bepaalde aannamen tot zijn resultaat is gekomen. Niettemin werd de zaak hiermee voor minstens 30 jaar als afgedaan beschouwd.

Kochen en Specker

Ofschoon het EPR-argument (van Einstein, Podolsky en Rosen) eerder verscheen dan dat van Kochen en Specker, is de gang van za-

Hilbert-ruimten en kwantummechanica

Het begrip Hilbert-ruimte ontstond tussen 1904 en 1910 uit het werk van Hilbert, Erhard Schmidt, Frederic Riesz, Ernst Fischer, en anderen; de volgende abstracte definitie werd echter pas in 1927 gegeven door Von Neumann. Een (complexe) Hilbert-ruimte is een vectorruimte over $\mathbb{C}$ met inproduct $(-,-)$ die volledig is in de bijbehorende norm $\|\psi\| = \sqrt{(\psi,\psi)}$. Het eenvoudigste voorbeeld, voldoende om de rest van dit artikel te begrijpen, is $\mathbb{C}^n$ met het standaard-inproduct $(z, w) = \sum_{i=1}^n \overline{z}_i w_i$, maar in de functionaalanalyse is men uiteraard vooral geïnteresseerd in oneindig-dimensionale Hilbert-ruimten.

Naast de Hilbert-ruimten zelf gaat het vooral om de operatoren daarop, dus lineaire afbeeldingen. Een operator op een eindig-dimensionale Hilbert-ruimte als $\mathbb{C}^n$ is (uitgedrukt in een bepaalde basis) niets anders dan een matrix; in het algemeen moet men verschil maken tussen begrensde en onbegrensde operatoren (de laatste zijn niet overal gedefinieerd). In beide gevallen wordt het uit de lineaire algebra bekende begrip van een hermitische matrix gegeneraliseerd tot een zelfgeadjungeerde operator.

Het verband tussen Hilbert-ruimten en kwantummechanica is in een notendop als volgt. Ten eerste worden de toestanden van een kwantumsysteem wiskundig beschreven door eenheidsvectoren ψ in een complexe Hilbert-ruimte H (waarbij twee eenheidsvectoren ψ en ϕ dezelfde toestand voorstellen als $\psi = z\phi$ voor een zekere $z \in \mathbb{C}$ met $|z| = 1$). Ten tweede zijn de observabele grootheden (zoals plaats, impuls, energie, enz.) zelfgeadjungeerde operatoren a op H. In het vervolg nemen we voor het gemak aan dat H eindig-dimensionaal is, zodat $H \cong \mathbb{C}^n$; de observabelen zijn dan dus gewoon hermitische matrices.

Het verband tussen deze twee postulaten is dat de gemiddelde waarde (of verwachtingswaarde) van een observabele a in een toestand ψ gelijk is aan $(\psi, a\psi)$. Een speciale klasse van observabelen correspondeert met zogenaamde ja/nee experimenten: vragen aan het fysische systeem waarop het antwoord van de Natuur slechts 'ja' of 'nee' kan zijn (een voorbeeld is: 'bevindt een deeltje zich in een bepaald gebied van de ruimte?'). Dit zijn de projecties, oftewel de zelfgeadjungeerde operatoren $p = p^*$ die tevens voldoen aan $p^2 = p$. Voor een eenheidsvector ψ wordt het reëele getal $(\psi, p\psi)$, dat tussen 0 en 1 ligt, dan geïnterpreteerd als de kans dat het antwoord op de vraag p in de toestand ψ 'ja' luidt. Als $p\psi = \psi$ is die kans dus gelijk aan $(\psi, p\psi) = (\psi, \psi) = \|\psi\|^2 = 1$, want ψ is per definitie een eenheidsvector.

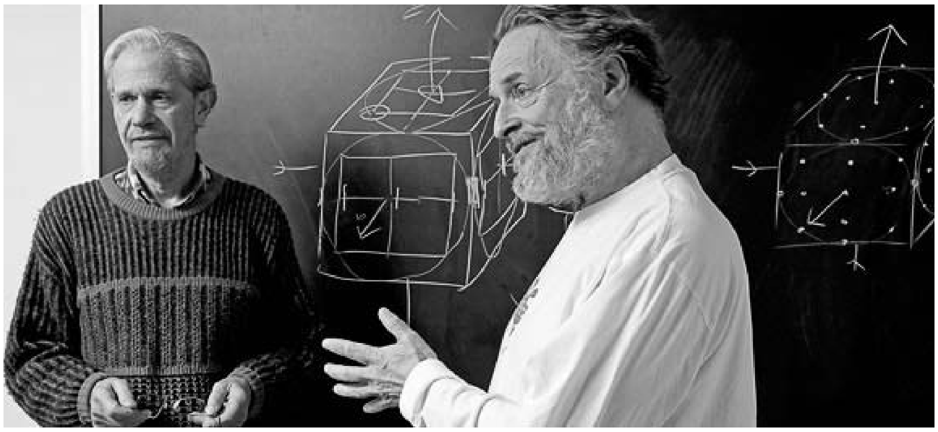

Foto: Princeton University

Simon Kochen en John Conway. De plaatjes op het bord geven de tien assenstelsels die in het bewijs van de Kochen-Specker stelling hieronder voorkomen.

ken beter te begrijpen als we met het laatste beginnen. Al in 1935 wees de filosofe Grete Hermann op het onbevredigende karakter van Von Neumanns aanname dat $\mathcal{E}$ lineair is [21]. Von Neumann toont in zijn boek aan dat twee observabelen dan en slechts dan commuteren als ze beide een functie van een derde observabele zijn, wat fysisch precies het geval is als ze gelijktijdig gemeten kunnen worden en de metingen elkaar niet verstoren. Ook zelf merkt hij overigens op dat de lineariteit $\mathcal{E}(a+b) = \mathcal{E}(a) + \mathcal{E}(b)$ alleen fysisch gemotiveerd kan worden als $ab = ba$, maar hij laat zich toch meeslepen door zijn eigen formalisme van de kwantummechanica door deze eigenschap voor algemene a en b op te leggen. Zijn bewijs sluit daarom niet alle verborgen variabelen uit, maar alleen degene die voldoen aan zijn eis. Het bleek relatief eenvoudig om modellen op te schrijven die daar niet aan voldoen [3], en dit bracht de fysicus John Bell onafhankelijk tot soortgelijke kritiek als Hermann [2]. Bells artikel bevat overigens een primitieve versie van de onderstaande stelling van Kochen en Specker, die Bell afleidt uit een eerdere stelling van Gleason [18] (zodat sommigen van het *Bell–Kochen–Specker Theorem* spreken).

Het artikel van Kochen en Specker uit 1967 [24] lost dit probleem op door middel van de volgende stelling:

Voor Hilbert-ruimten van dimensie ≥ 3 *bestaan er geen functies* $\mathcal{E} : A \to \mathbb{R}$ *die voldoen aan de condities (2), (4) voor* commuterende *operatoren a en b, en (5).*

Voor $H = \mathbb{C}^2$ bestaan er expliciete tegenvoorbeelden. Het bewijs (met een vereenvoudiging van de laatste stap door Peres [28]) verloopt als volgt (zie [17] voor een ander eenvoudig bewijs).

De eerste stap is dat het resultaat voor de Hilbert-ruimte $\mathbb{C}^3$ impliceert dat de stelling geldt in alle Hilbert-ruimten van dimensie ≥ 3; deze stap komt in een andere context al voor bij Gleason [18]. Neem nu een assenstelsel oftewel orthogonaal (niet noodzakelijk orthonormaal) frame $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ in $\mathbb{R}^3$. Dit correspondeert op de voor de hand liggende manier met een keuze van drie 1-dimensionale projecties (p_1, p_2, p_3) op $\mathbb{C}^3$ die loodrecht op elkaar staan (ofwel $p_1p_2 = p_1p_3 = p_2p_3 = 0$) en voldoen aan $p_1 + p_2 + p_3 = 1$; hierbij is p_i de projectie op $\mathbf{u}_i$. De standaardkeuze van de x, y, en z-as geeft bijvoorbeeld

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$p_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Men kan deze situatie fysisch realiseren door een systeem met spin 1: de matrix p_k is dan de projectie op de eigenvector van J_k met eigenwaarde 0, met

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In het algemeen is $J_{\mathbf{u}}$ de matrix die de component van de spin langs de $\mathbf{u}$-richting representeert. Met andere woorden, p_k is de ja/nee vraag '$J_k = 0$?' of de spin J_k van het systeem in de k-richting gelijk is aan nul; het is hierbij opmerkelijk dat ofschoon de J_k niet onderling commuteren (er geldt immers $[J_1, J_2] = iJ_3$ etc.), de projecties p_k dat wél doen. We kunnen de drie vragen '($J_1 = 0?, J_2 = 0?, J_3 = 0?$)' voor een gegeven assenstelsel dus tegelijk stellen; dit is echter niet het geval voor vragen die bij verschillende assenstelsels horen.

Nu volgt direct dat voor een functie $\mathcal{E} : A \to \mathbb{R}$ (waar in dit geval A de ruimte van symmetrische reëele 3×3 matrices is) die voldoet aan de aannamen in de stelling van Kochen en Specker, geldt

$$\mathcal{E}(p_1) + \mathcal{E}(p_2) + \mathcal{E}(p_3) = 1, \tag{6}$$

en omdat wegens $p^2 = p$ tevens geldt dat

$$\mathcal{E}(p) = \mathcal{E}(p^2) = (\mathcal{E}(p))^2,$$

kan $\mathcal{E}$ op een projectie p slechts de waarden 0 of 1 aannemen. De functie $\mathcal{E}$ beeldt daarom precies één van de drie projecties (p_1, p_2, p_3) op 1 af, en de andere twee op 0. Met andere woorden, de mogelijke antwoorden op de combinatievraag '($J_1 = 0?, J_2 = 0?, J_3 = 0?$)' zijn slechts '(ja, nee, nee)', '(nee, ja, nee)', en '(nee, nee, ja)'.

Bekijk nu de volgende 10 assenstelsels:

$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{u}_3$
$(0, 0, 1)$	$(1, 0, 0)$	$(0, 1, 0)$
$(1, 0, 1)$	$(-1, 0, 1)$	$(0, 1, 0)$
$(0, 1, 1)$	$(0, -1, 1)$	$(1, 0, 0)$
$(1, -1, \sqrt{2})$	$(-1, 1, \sqrt{2})$	$(1, 1, 0)$
$(1, 0, \sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, 0, 1)$	$(0, 1, 0)$
$(\sqrt{2}, 1, 1)$	$(0, -1, 1)$	$(-\sqrt{2}, 1, 1)$
$(\sqrt{2}, 0, 1)$	$(0, 1, 0)$	$(-1, 0, \sqrt{2})$
$(1, 1, \sqrt{2})$	$(1, -1, 0)$	$(-1, -1, \sqrt{2})$
$(0, 1, \sqrt{2})$	$(1, 0, 0)$	$(0, -\sqrt{2}, 1)$
$(1, \sqrt{2}, 1)$	$(-1, 0, 1)$	$(1, -\sqrt{2}, 1)$.

De bewering is dat er geen $\mathcal{E}$ bestaat die volgens de bovenstaande regel waarden 0 of 1 toekent aan deze vectoren (of beter gezegd, aan de bijbehorende projecties). De essentie van het argument is dat een gegeven vector in meerdere assenstelsels voorkomt. Stel dat er zo'n $\mathcal{E}$ is. Zonder verlies van algemeenheid beelden we in het eerste stelsel $(0, 0, 1)$ af op 1 en de andere twee vectoren op 0. In het tweede stelsel moet dan ofwel $(1, 0, 1)$ ofwel $(-1, 0, 1)$ naar 1 (en de andere naar 0). Het maakt niet uit welke keuze wordt gemaakt; we sturen $(1, 0, 1)$ naar 1. Ook in de derde en vierde rij ligt het beeld van $\mathbf{u}_3$ vast door de eerdere keuzen, en kiezen we er steeds voor $\mathbf{u}_1$ naar 1 te sturen (andere keuzes geven een soortgelijke tegenspraak). Maar daarna ligt alles vast. In de vijfde rij kwam $(0, 1, 0)$ al eerder voor en staat $(-\sqrt{2}, 0, 1)$ loodrecht op $(1, -1, \sqrt{2})$ uit de vierde rij; omdat die laatste naar 1 gaat, moet $(-\sqrt{2},0,1)$ naar 0. Zo voortredenerend moeten alle vectoren $\mathbf{u}_1$ naar 1 en alle $\mathbf{u}_2$ en $\mathbf{u}_3$ naar 0. Nu komt het slotakkoord: de vectoren $(1,0,0)$, $(0,\sqrt{2},1)$ en $(0,-1,\sqrt{2})$ zijn orthogonaal, en $\mathcal{E}$ zou dus precies één van hen naar 1 moeten sturen. Maar de eerste gaat naar 0 volgens rij 1, de tweede staat loodrecht op $(1,-1,\sqrt{2})$ uit rij 4 en moet dus ook naar 0, terwijl de derde loodrecht staat op $(1,\sqrt{2},1)$ uit rij 10 en daarom eveneens op 0 moet worden afgebeeld. Tegenspraak!

Uit dit bewijs volgt dat de stelling van Kochen en Specker in feite sterker is dan de formulering suggereert: niet alleen bestaat er geen functie $\mathcal{E}: A \to \mathbb{R}$ met de gegeven eigenschappen, er bestaat zelfs geen $\mathcal{E}$ die de verzameling van 33 vectoren uit het bewijs op $\{0,1\}$ afbeeldt, zodanig dat van ieder orthogonaal tripel precies één vector naar 1 gaat. Fysisch betekent dit dat de vragen '$J_{\mathbf{u}} = 0$?' niet voor al deze 33 vectoren $\mathbf{u}$ op consistente wijze met ja of nee kunnen worden beantwoord.

Er zijn ook diepe verbanden, ontdekt door Roger Penrose in de 80er jaren, tussen dit type bewijs en de meetkunde van polyhedra; zie [1, 8]. Zo is de beroemde lithografie *Waterval* van M.C. Escher gemotiveerd door het polyhedron dat door de bovengenoemde 33 vectoren in $\mathbb{R}^3$ wordt opgespannen. Soortgelijke constructies in $\mathbb{C}^4$ blijken verband te houden met het worteltralie van de exceptionele Lie algebra E_8; zie [11] (dit was de oorspronkelijke reden dat Conway in deze kwestie geïnteresseerd raakte). Ten slotte is er ook een interessante logische interpretatie van de gegeven redenering [8, 24].

EPR

Na deze sprong voorwaarts in de tijd pakken we nu de draad weer op in 1935. Einstein gaf in dat jaar (met zijn medewerkers Podolsky en Rosen) een totaal nieuwe draai aan zijn debat met Bohr [16]. Opmerkelijk is daarbij dat hun artikel destijds algemeen werd beschouwd als een wanhoopspoging van een achterhaalde figuur om een al verloren discussie nog ten goede te keren [25, 27], terwijl het nu het meest geciteerde werk uit de 20ste eeuwse natuurkunde is.

Het oorspronkelijke EPR-argument maakt gebruik van de observabelen plaats en impuls, die fysisch weliswaar aanschouwelijk zijn, maar wiskundig worden gegeven door onbegrensde operatoren die bovendien een continu spectrum hebben. De redenering is duidelijker als met spin wordt gewerkt, zoals we nu (in navolging van velen) zullen doen.

Als een kwantumsysteem S_i als toestandsruimte een Hilbert-ruimte H_i heeft, $i = 1,2$, dan heeft het gecombineerde systeem als toestandsruimte het tensorproduct $H_1 \otimes H_2$. Een paar van kwantumdeeltjes met spin 1 heeft dus als toestandsruimte $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$. Deze ruimte bevat een bijzondere toestand waarin de totale spin van het systeem gelijk is aan 0; dit is de eenheidsvector

$$\psi_0 = \frac{\mathbf{e}_1^{(1)} \otimes \mathbf{e}_1^{(2)} + \mathbf{e}_2^{(1)} \otimes \mathbf{e}_2^{(2)} + \mathbf{e}_3^{(1)} \otimes \mathbf{e}_3^{(2)}}{\sqrt{3}},$$

waarin $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ de standaardbasis van $\mathbb{C}^3$ is, en $\mathbf{e}_k^{(1)}$ en $\mathbf{e}_k^{(2)}$ de kopieën van de basisvector $\mathbf{e}_k$ in respectievelijk de eerste en de tweede factor $\mathbb{C}^3$ in het tensorproduct zijn. Evenzo krijgen de projecties p_k en de spinoperatoren J_k als boven een extra label $p_k^{(i)}$, $J_k^{(i)}$, zodat $p_k^{(1)} = p_k \otimes 1$, $p_k^{(2)} = 1 \otimes p_k$, etc. De projecties $p_k^{(1)}$ en $p_l^{(2)}$ commuteren voor alle $k,l = 1,2,3$, zelfs voor verschillende assenstelsels voor deeltje 1 en deeltje 2. We kunnen dus een willekeurige vraag (inclusief toegelaten combinaties van vragen) aan deeltje 1 tegelijk stellen met een andere vraag (of combinatie) aan deeltje 2.

Nu volgt er iets zeer opmerkelijks. In de gegeven toestand is de kans op het antwoord 'ja' op ieder van de vragen '$J_k^{(i)} = 0$?', gesteld aan één van de twee systemen, gelijk aan 1/3. Indien we echter *dezelfde* vraag '$J_k = 0$?' aan de beide deeltjes stellen, en dus de projectie $p_k^{(1)} \otimes p_k^{(2)}$ meten, is de kans op het antwoord '(ja, ja)' gelijk aan 1/3 en die op '(nee, nee)' 2/3; de kans op de antwoorden '(ja, nee)' en '(nee, ja)' is nul. Het ene deeltje geeft op *dezelfde* vraag dus altijd *hetzelfde* antwoord als het andere, al is dit antwoord in ieder geval volgens de kwantummechanica onvoorspelbaar. Dit heet tegenwoordig een EPR-correlatie en vormt de basis van de kwantumcryptografie en de kwantuminformatietheorie.

Het trio EPR redeneert nu (geparafraseerd) als volgt. Als we aan deeltje 1 vragen of $J_k = 0$, krijgen we een bepaald antwoord. We hoeven diezelfde vraag dan niet meer aan deeltje 2 te (laten) stellen, want het antwoord is bekend. Als nu de beide deeltjes zeer ver van elkaar verwijderd zijn, mag het voor deeltje 2 niet uitmaken wat we met deeltje 1 doen; dit is Einsteins eis van lokaliteit van de natuurkunde. Daarom moet het antwoord op de vraag aan deeltje 2 sowieso al bekend zijn, of we de vraag aan deeltje 1 stellen of niet. Dit is echter niet wat de kwantummechanica zegt: die beweert dat als we niets aan deeltje 1 vragen, in de gegeven toestand ψ_0 beide antwoorden bij deeltje 2 met een bepaalde kans mogelijk zijn, als de vraag daaraan gesteld wordt. De kwantummechanica is volgens EPR dus onvolledig. Het is zelfs nog erger dan het lijkt, want het argument kan herhaald worden met verschillende vragen aan deeltje 1. Daar volgt dan uit dat het antwoord op alle mogelijke vragen aan deeltje 2 in principe al bekend moet zijn, zelfs dat op vragen die corresponderen met niet-commuterende projecties en daarom volgens de kwantummechanica helemaal niet tegelijk gesteld kunnen worden.

Bohr

Niels Bohr publiceerde al na zes weken een antwoord op het EPR-argument [4]. Dit antwoord is, zoals de meeste geschriften van Bohr, nogal wollig, maar een aantal punten zijn toch duidelijk. Ten eerste is Bohr niet onder de indruk van het EPR-argument, hij ziet er eigenlijk niets nieuws in. Dit standpunt zou hij later herhalen [5] en het blijkt ook uit andere bronnen dat hij er zo over dacht [27]. Ten tweede ziet hij de zwakte van hun redenering in het feit dat EPR geen rekening houden met de meetopstelling die nodig is om de vragen aan de deeltjes te stellen. In het bijzonder zegt hij dat de meetopstelling bij deeltje 1 wel degelijk invloed heeft op de gang van zaken bij deeltje 2, en wel op "*the very conditions which define the possible types of predictions regarding the future behavior of the system*". Boekenkasten zijn volgeschreven over de mogelijke betekenis van dit zinsdeel, waarbij mag worden opgemerkt dat Bohr juist EPR dubbelzinnigheid verwijt.

Hoe dan ook, als Bohr langer had nagedacht over het probleem, Einstein serieuzer had genomen, en wat wiskunde van zijn broer Harald had geleerd, zou hij misschien de stelling van Kochen en Specker hebben gevonden en als onmiddellijke weerlegging van het EPR-argument kunnen publiceren. Dat laatste leidt namelijk precies tot de waardebepaling die Kochen en Specker uitsluiten. Hierbij is het van belang dat Einstein de kwantummechanica in 1935 als een correcte, maar onvolledige theorie zag; hij accepteerde dus integraal de geldigheid van haar voorspellingen.

Het antwoord dat Bohr wél gaf, zou door Einstein aangegrepen hebben kunnen worden om het debat op de volgende wijze voort te zetten (dit gebeurde echter niet; de volgende discussie stamt uit de jaren '60 [2]). In de klassiek natuurkunde leest een (goede) meting een al bestaande waarde van een grootheid af. Een deterministische theorie voorspelt dergelijke meetwaarden, die samenvallen met werkelijke waarden die niet door de meting zijn beïnvloed. Dit was de door Einstein in iedere fysische theorie gewenste situatie, maar Kochen en Specker tonen aan dat dit ideaal in ieder geval in de kwantumtheorie een illusie is. Bohr en Heisenberg gaan verder: zij beweren niet alleen dat meetresultaten in zekere zin door de metingen zelf gecreëerd worden en van tevoren nog niet bestonden, maar tevens dat de aldus gevonden meetuitkomsten niet door een deterministische theorie beschreven kunnen worden.

De tweede bewering staat in principe los van de eerste, en een vastberaden determinist zou een positie tussen de klassieke en de kwantummechanica in kunnen nemen door vol te houden dat meetresultaten weliswaar vóór de meting nog niet bestonden, maar wel degelijk voorspeld kunnen worden door middel van een deterministische theorie die dieper graaft dan de kwantummechanica en het meetproces in detail beschrijft (juist dat laatste is volgens Bohr en Heisenberg onmogelijk). Het is deze positie, die men *contextueel determinisme* zou kunnen noemen, die Bohr op een presenteerblad aan Einstein aanbiedt. De stelling van Kochen en Specker sluit deze positie niet uit: hun bewijs loopt direct al spaak op de aanname dat $\mathcal{E}$ een functie van A naar $\mathbb{R}$ is. Een contextuele waarde van een projectie p hangt echter in principe af van de totale meting, en dus van het tripel waar p onderdeel van is (in het algemeen hangt een meting van een observabele a af van de keuze van een maximale commutatieve deelalgebra van A waarin a bevat is; een assenstelsel geeft zo'n keuze).

De ironie van EPR is daarmee tweevoudig. Ten eerste vormen de EPR-correlaties de meest spectaculaire voorspelling van de kwantummechanica. Einstein zag deze correlaties echter als *reductio ad absurdum* argument tegen de theorie, terwijl Bohr, die een gat in de lucht had moeten springen bij deze bijzondere eigenschap van zijn levenswerk, in zijn onvermogen Einstein serieus te nemen het belang ervan totaal over het hoofd zag. Ten tweede gaf het antwoord van Bohr, bedoeld om EPR te weerleggen, Einstein juist een potentiële troef in handen, namelijk het contextueel determinisme (al zou hij deze kaart nooit spelen). En juist de EPR-correlaties maken, als cruciaal ingrediënt van de stelling van Conway en Kochen, ook een einde aan deze hoop.

Conway en Kochen

In [12–13] (zie ook [10]) bewijzen Conway en Kochen dat de conjunctie van de volgende aannamen inconsistent is:

i. Kwantumtheorie van een spin-1 systeem;
ii. EPR-correlaties tussen twee spin-1 systemen;
iii. (Contextueel) determinisme;
iv. Zwakke lokaliteit;
v. Vrije wil van de experimentator.

De precieze betekenis van deze termen (met name de laatste!) zal blijken uit het vervolg.

Het argument speelt zich af rond een gelijktijdige (preciezer: ruimteachtig gescheiden) meting aan twee ver van elkaar verwijderde deeltjes met spin 1 in de toestand ψ_0 van totale spin 0, zie boven. Met aanname (**iii**) wordt dan bedoeld dat er een functie V_i bestaat die de uitkomst van een meting aan deeltje i voorspelt en af mag hangen van de geschiedenis G_i van deeltje i (technisch gesproken: van alles wat zich ooit in de achterwaartse lichtkegel ten opzichte van de plaats en tijd van de meting heeft afgespeeld), van de context bij i, en van de context bij de andere deeltjes. We gebruiken de notatie

$$V_i\left(p_1^{(i)} \mid G_i, p_2^{(i)}, p_3^{(i)}\right) \in \{0,1\}$$

voor het resultaat van de meting van p_1 van deeltje i in de context waarin aan deeltje i tevens p_2 en p_3 worden gemeten, met het tripel van projecties (p_1, p_2, p_3) als bij Kochen–Specker (ofwel ieder 1-dimensionaal, onderling orthogonaal, en $p_1 + p_2 + p_3 = 1$). In principe zou deze functie ook af kunnen hangen van de projecties die aan het andere deeltje worden gemeten, maar deze afhankelijkheid wordt per definitie door aanname (**iv**) uitgesloten: de *uitkomst* van een meting aan deeltje 1 hangt volgens deze aanname niet af van de *context* van mogelijke metingen aan deeltje 2 (maar mogelijk wel van het *resultaat* daarvan), en vice versa. Voor alle duidelijkheid: als bij deeltje i de drie projecties (p_1, p_2, p_3) tegelijk worden gemeten, krijgen we als uitkomst drie getallen (v_1, v_2, v_3) die in bovenstaande notatie worden gegeven door $v_1 = V_i\left(p_1^{(i)} \mid G_i, p_2^{(i)}, p_3^{(i)}\right)$, etcetera. Aanname (**i**) geeft dan

$$\begin{aligned} &V_i\left(p_1^{(i)} \mid G_i, p_2^{(i)}, p_3^{(i)}\right) + \\ &V_i\left(p_2^{(i)} \mid G_i, p_1^{(i)}, p_3^{(i)}\right) + \\ &V_i\left(p_3^{(i)} \mid G_i, p_1^{(i)}, p_2^{(i)}\right) = 1 \end{aligned} \tag{7}$$

Het is nu essentieel dat de keuze om p_1 bij deeltje i te meten niet door de geschiedenis G_i wordt afgedwongen, maar volgens aanname (**v**) *vrij* is: de functie V_i moet daarom bij *dezelfde* G_i ook voor willekeurige andere projecties en eventueel daarbij gekozen contexten gedefinieerd zijn. Vgl. (7) geldt dan voor *alle* tripels (p_1, p_2, p_3) als boven. Aanname (**ii**) impliceert nu

$$\begin{aligned} &V_1\left(p_1^{(1)} \mid G_1, p_2^{(1)}, p_3^{(1)}\right) = \\ &V_2\left(p_1^{(2)} \mid G_2, q_2^{(2)}, q_3^{(2)}\right), \end{aligned} \tag{8}$$

waarbij het tripel (p_1, q_2, q_3) dat aan deeltje 2 wordt gemeten niet identiek hoeft te zijn aan het tripel (p_1, p_2, p_3) bij deeltje 1. Vergelijking (8) is een relatie van de vorm

$$f_1(x, y, \ldots) = f_2(x, z, \ldots),$$

waaruit volgt dat f_1 en f_2 beide gelijk moeten zijn aan een functie f die slechts af kan hangen van x en mogelijke andere gemeenschappelijke variabelen van f_1 en f_2. Dus

$$V_1\left(p_1^{(1)} \mid G_1, p_2^{(1)}, p_3^{(1)}\right) = V(p_1, G_1 \wedge G_2),$$

voor een zekere functie V, waarbij het symbool $G_1 \wedge G_2$ staat voor de gemeenschappelijke geschiedenis van deeltjes 1 en 2 ten opzichte van de tweevoudige meting (dit is de doorsnede van de beide achterwaartse lichtkegels ten opzichte van de metingen). Met de notatie $\mathcal{E}(p) = V(p, G_1 \wedge G_2)$, waarbij $G_1 \wedge G_2$ in het rechterlid als constante wordt beschouwd, volgt dan uit (3) dat $\mathcal{E}$ aan (6) moet voldoen. Dit geeft echter een tegenspraak met Kochen–Specker, volgens welke stelling een dergelijke functie $\mathcal{E}$ niet kan bestaan.

Discussie

Ofschoon Conway en Kochen zeggen tien jaar aan hun stelling gewerkt te hebben, was het stramien van het argument al lang bekend; zie [7, 9, 22, 30] (Kochen antwoordt op dit soort opmerkingen dat hij het basisidee al eerder had bedacht maar nooit gepubliceerd [11]). Hoe dan ook heeft het argument een aangename scherpte die bij andere auteurs op dit terrein nog wel eens ontbreekt. We kunnen ons daarom afvragen welke van de vijf aannamen verworpen moet worden. Gezien de rotsvaste theoretische status en experimentele bevestiging van de eerste twee aannamen, komen daartoe slechts de laatste drie in aanmerking.

Conway en Kochen zijn hier stellig over: determinisme sneuvelt (in de vorm van aanname (**iii**)). Deze keuze houdt in dat hun stelling wordt geïnterpreteerd als de implicatie *Vrije Wil → Indeterminisme*, waarbij het linkerlid aan de mens wordt toegeschreven en het rechterlid aan elementaire deeltjes (Conway en Kochen spreken zelfs in het laatste verband van vrije wil). Zoals ze in [12] opmerken (zie ook [23]) kan men de aanname van Vrije Wil echter vervangen door de in de fysica zeer gebruikelijke aanname dat een dynamische theorie gedefinieerd moet zijn voor willekeurige beginvoorwaarden. Een andere herformulering van aanname (**v**) is dat de factoren die (in een deterministische theorie) de instelling van een experiment bepalen (en dat kan zowel via het brein van de experimentator als via een geautomatiseerde opzet verlopen) onafhankelijk zijn van de factoren die de respons op dat experiment bepalen. In beide gevallen is de conclusie feitelijk dezelfde als die uit de beroemde Bell-ongelijkheden, namelijk dat kwantummechanica incompatibel is met de combinatie van determinisme én zwakke lokaliteit [8, 29].

Gerard 't Hooft (en, gezien diens uitgesproken opvattingen over de vrije wil, ongetwijfeld ook Albert Einstein) verwerpt daarentegen de vrije wil; in een deterministisch Universum is tenslotte alles bepaald. Dit standpunt wordt echter meestal als een samenzweringstheorie afgedaan, hetgeen men het duidelijkst ziet uit de tweede herformulering van aanname (**v**): dergelijke 'superdeterministen' moeten volhouden dat de oorzaken van de keuzes die experimentatoren (of random-generatoren) maken wel degelijk overlappen met de factoren die het gedrag van elementaire deeltjes in hun experimenten bepalen. Vanuit Kantiaans standpunt tenslotte lijkt het verwerpen van aanname (**v**) in strijd met een noodzakelijke voorwaarde voor het überhaupt bedrijven van wetenschap: het vrij kiezen van experimenten of 'vragen aan de natuur'.

Volgelingen van de fysicus en mysticus David Bohm geven ten slotte de zwakke lokaliteit op; deze keuze is echter niet in overeenstemming te brengen met de (speciale) relativiteitstheorie van Einstein en heeft dan ook nauwelijks aanhangers. De kwantummechanica is zelf weliswaar niet strikt lokaal vanwege de daarin optredende EPR-correlaties, maar die blijken niet tot een conflict met de speciale relativiteitstheorie te leiden. Zij is wel zwak lokaal in de zin dat de conditionele waarschijnlijkheden W_i (die in de kwantumtheorie de plaats innemen van de functies V_i in de bovenstaande deterministische opzet) niet van de meetcontext bij het andere deeltje afhangen (deze eigenschap wordt ook wel *parameter independence* genoemd [8]).

Tot slot een filosofische opmerking in de geest van Kant. Zelfs met de positie van Conway en Kochen is niet bewezen dat de natuur in absolute zin, oftewel *an sich*, indeterministisch is. Hun stelling slaat op het (in)deterministische karakter van *meetresultaten*. Deze worden volgens Bohr – en hierin heeft hij het gelijk volledig aan zijn zijde – verkregen door als het ware door een klassieke bril naar de kwantumwereld te kijken [5]. Daarom is de natuur hoogstens indeterministisch zoals zij zich, via het doen van experimenten, *aan ons voordoet*. De Schrödingervergelijking van een geïsoleerd kwantumsysteem is (bij een voldoende reguliere potentiaal) minstens zo deterministisch als de bewegingsvergelijkingen van Newton [14]: de eerste heeft *altijd* een oplossing die voor alle tijden is gedefinieerd. Het is de menselijke interventie die de kwantummechanica indeterministisch maakt.

Referenties

1 P.K. Aravind, 'How Reye's configuration helps in proving the Bell-Kochen-Specker theorem: a curious geometrical tale', *Foundations of Physics Letters* **13** (2000), pp. 499–519.

2 John S. Bell, 'On the problem of hidden variables in quantum mechanics', *Reviews in Modern Physics* **38** (1966), pp. 447–475 .

3 David Bohm, 'A suggested interpretation of quantum theory in terms of "hidden variables", Parts I, II', *Physical Review* **85** (1952), pp. 166–170, pp. 180–193 .

4 Niels Bohr, 'Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?', *Physical Review* 48 (1935), pp. 696–701.

5 Niels Bohr, 'Discussion with Einstein on epistemological problems in atomic physics', *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*, pp. 201–241, Ed. P.A. Schlipp, Open Court, La Salle, 1949.

6 Max Born, 'Quantenmechanik der Stoßvorgänge', *Zeitschrift für Physik* **38** (1926), pp. 803–827.

7 Harvey Brown and George Svetlichny, 'Nonlocality and Gleason's lemma. Part I. Deterministic theories', *Foundations of Physics* **20** (1990), pp. 1379–1387.

8 Jeffrey Bub, *Interpreting the Quantum World*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

9 Rob Clifton, 'Getting contextual and nonlocal elements-of-reality the easy way', *American Journal of Physics* **61** (1993), pp. 443–447.

10 John Conway, 'Six video lectures on the Free Will Theorem', http://paw.princeton.edu /issues/2009/07/15/pages/6596/index.xml.

11 John Conway and Simon Kochen, 'The geometry of the quantum paradoxes', *Quantum [Un]speakables: From Bell to Quantum Information*, pp. 257–270, Eds. R.A. Bertlmann and A, Zeilinger, Springer, Berlin, 2002.

12 John Conway and Simon Kochen, 'The Free Will Theorem', *Foundations of Physics* **36** (2006), pp. 1441–1473.

13 John Conway and Simon Kochen, 'The Strong Free Will Theorem', *Notices of the AMS* **56** (2009), pp. 226–232.

14 John Earman, 'Aspects of determinism in modern physics', *Handbook of the Philosophy of Science Vol. 2: Philosophy of Physics, Part B*, pp. 1369–1434, Eds. J. Butterfield and J. EarmanÃŠ, North-Holland, Elsevier, Amsterdam, 2007.

15 Albert Einstein, 'Remarks to the essays appearing in this collective volume (Reply to criticisms)', *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*, pp. 663–688, Ed. P.A. Schilpp, Open Court, La Salle, 1949.

16 Albert Einstein, Boris Podolsky, and Nathan Rosen, 'Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?' *Physical Review* **47** (1935), pp. 777–780.

17 Richard Gill and Michael Keane, 'A geometric proof of the Kochen–Specker no-go theorem', *Journal of Physics* **A29** (1996), pp. L289–L291.

18 Andrew Gleason, 'Measures on the closed subspaces of Hilbert spaces', *Journal of Mathematics and Mechanics* **6** (1957), pp. 885–893. Het resultaat van dit artikel impliceert de stelling van Kochen en Specker, maar was niet geformuleerd in de context van verborgen variabelen en had geen impact op de fysica.

19 Werner Heisenberg, 'Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematic und Mechanik', *Zeitschrift für Physik* **43** (1927), pp. 172–198.

20 Carsten Held, *Die Bohr-Einstein-Debatte: Quantenmechanik und Physikalische Wirklichkeit*, Schöningh, Paderborn, 1998.

21 Grete Hermann, 'Die naturphilosophischen Grundlagen der Quantenmechanik', *Abhandlungen der Fries'schen Schule* **6**(2) (1935), pp. 69–152. De relevante sectie daarvan is te vinden op www.phys.uu.nl/igg/seevinck /trans.pdf. Zie ook Caroline Herzenberg, 'Grete Hermann: An early contributor to quantum theory', **arXiv:0812.3986** en Michiel Seevinck, 'Historical and conceptual aspects of Von Neumann's no hidden variables argument', Utrecht IGG Colloquium 7-10-2004, slides op www. phys.uu.nl/igg/seevinck.

22 Peter Heywood and Michael Redhead, 'Nonlocality and the Kochen–Specker paradox', *Foundations of Physics* **13** (1983), pp. 481-499. Michael Redhead, *Incompleteness, Nonlocality, and Realism*, Clarendon Press, Oxford, 1987.

23 Gerard 't Hooft, 'On the free-will postulate in quantum mechanics', **arXiv:quant-ph/0701097**.

24 Simon Kochen and Ernst Specker, 'The problem of hidden variables in quantum mechanics', *Journal of Mathematics and Mechanics* **17** (1967), pp. 59–87.

25 Klaas Landsman, 'When champions meet: Rethinking the Bohr–Einstein debate', *Studies in History and Philosophy of Modern Physics* **37** (2006), pp. 212–242.

26 Johann von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer-Verlag, Berlin, 1932.

27 Abraham Pais, *Niels Bohr's Times: In Physics, Philosophy, and Polity*, Oxford University Press, Oxford, 1991.

28 Asher Peres, 'Two simple proofs of the Kochen–Specker Theorem', *Journal of Physics* **A24**, pp. L175–L178 (1991). Asher Peres, *Quantum Theory: Concepts and Methods*, Kluwer, Dordrecht, 1993.

29 Abner Shimony, 'Bell's Theorem', *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2009 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = http://plato. stanford.edu/archives/sum2009/entries/bell-theorem/.

30 Allen Stairs, 'Quantum logic, realism, and value definiteness', *Philosophy of Science* **50** (1983), pp. 578–602.