

Robert Tijdeman

Mathematisch Instituut

Postbus 9512

2300 RA Leiden

tijdeman@math.leidenuniv.nl

Afscheidsrede

Het leven van een

In getaltheorie worden eigenschappen van gehele getallen bestudeerd. Veel problemen spreken tot de verbeelding en zijn aan leken makkelijk uit te leggen, terwijl voor het oplossen van die problemen heel vaak zeer ontoegankelijke technieken nodig zijn. Vorig jaar ging Robert Tijdeman, vermaard getaltheoreticus, met emeritaat. In zijn afscheidsrede, uitgesproken op 29 augustus 2008, schetst hij zijn ervaringen en visie als onderzoeker, opleider, beoordelaar, burger en persoon. Ook gaat hij in op de talenten die een wiskundige moet hebben.

Het is me een genoegen iets te vertellen over het leven van een wiskundige. Aanleiding daarvoor zijn vragen van niet-wiskundigen zoals "Is er nog iets nieuws te bewijzen in de wiskunde?", "Kun je als je wiskunde studeert nog wat anders worden dan leraar?" en "Word je daarvoor betaald?". In recente films en boeken over wiskundigen wordt bij voorkeur gekozen voor wiskundigen met zeer afwijkend en soms bizar gedrag. Ik heb daarom gekozen voor een gewone hoogleraar wiskunde. Nu wil ik mijn collega's niet gewoon noemen. Zo kom ik terecht bij een wiskundige die ik vrij goed ken. Overigens is het mij opgevallen dat in veel afscheidsredes de spreker de hoofdrol speelt.

Hogere machten

Bijna 37 jaar geleden hield ik een openbare les getiteld 'Oud en nieuw in de getaltheorie' [1]. Dat zou ik nu weer kunnen doen, want wat toen nieuw was, is tegenwoordig oud en er is veel nieuws te vertellen. Ik kon toen nog niet bevroeden welk een grote rol hogere machten in mijn leven zouden spelen. U denkt nu misschien aan iets spiritueels, maar ik bedoel de hogere machten van de u welbekende getal-

len 1, 2, 3, 4, enzovoort.

Als ik getal zeg, bedoel ik hier een positief, geheel getal. Een macht krijg je door een getal een aantal keren met zichzelf te vermenigvuldigen. Vermenigvuldig je het getal één keer met zichzelf, dan krijg je een kwadraat, 3 maal 3 is 9, 4 maal 4 is 16, 5 maal 5 is 25 en dus zijn 9, 16 en 25 kwadraten. Merkwaardig is dat $9+16=25$. De som van twee kwadraten kan dus zelf ook een kwadraat zijn. Dat wordt vaak gebruikt bij sommetjes over de stelling van Pythagoras. U herinnert zich nog wellicht: als de lengtes van de rechthoekszijden gelijk zijn aan 3 en 4, dan heeft de schuine zijde lengte 5, immers $a^2 + b^2 = c^2$, in dit geval $3^2 + 4^2 = 5^2$. Er zijn meer van die mooie Pythagoreïsche drietallen, bijvoorbeeld 5, 12, 13 en 8, 15, 17. U denkt wellicht ook aan 6, 8, 10, maar dat is te krijgen door het drietal 3, 4, 5 te verdubbelen. Wij zoeken naar *primitieve* getallen, dat zijn getallen die geen gemeenschappelijke deler groter dan 1 hebben. Er zijn oneindig veel primitieve Pythagoreïsche drietallen. Een Franse jurist, de Fermat, die in de 17e eeuw leefde, heeft een methode ontwikkeld om al deze drietallen te karakteriseren, zie het kader over deze drietallen.

Hogere machten krijg je als je een getal meer dan eens met zichzelf vermenigvuldigt. Doe je het twee keer, dan heb je een derdemacht, bijvoorbeeld 8, want dat is $2 \times 2 \times 2$, of 1000, want dat is $10 \times 10 \times 10$. Vermenigvuldig je een getal drie keer met zichzelf, dan heb je een vierdemacht, bijvoorbeeld 16, want dat is $2 \times 2 \times 2 \times 2$, of 81, want dat is $3 \times 3 \times 3 \times 3$. [18] Er zijn veel meer kwadraten dan hogere machten. Hoe hoger de exponent, des te zeldzamer de machten zijn. Overigens heeft u dagelijks met machten te maken. Als u 2875 euro krijgt, is dat $2 \times 1000 + 8 \times 100 + 7 \times 10 + 5$, ofwel $2 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 7 \times 10 + 5$. Overigens, ook hier geldt: hoe hoger de macht, hoe zeldzamer het is dat je het krijgt.

Voor een wiskundige is het niet verrassend dat, nadat Fermat begrepen had welke sommen van twee kwadraten een kwadraat zijn, hij zich afvroeg of de som van twee derdemachten wellicht een derdemacht kan zijn. Na zijn dood vond zijn zoon in de marge van een wiskundeboek een aantekening van Fermat dat hij een wonderlijk mooi bewijs gevonden had dat de som van twee derdemachten geen derdemacht kan zijn, de som van twee vierdemachten geen vierdemacht, enzovoort, maar dat de marge te klein was om het bewijs op te schrijven. Deze bewering staat bekend als *de laatste stelling van Fermat*:

Er bestaan geen getal $n > 2$ en primitieve drietal getallen x, y, z zó dat $x^n + y^n = z^n$.

Nergens was te vinden welk bewijs Fermat in



Robert Tijdeman

wiskundige

gedachten had. Dat was jammer, maar niet verbazingwekkend. Er zijn maar weinig bewijzen die Fermat wel opgeschreven heeft.

Meestal daagde hij zijn tijdgenoten uit om bepaalde stellingen te bewijzen, zonder zijn eigen bewijs te onthullen. Wel opmerkelijk is dat de wiskundige Euler, die een eeuw na Fermat leefde, geen bewijs van de laatste stelling van Fermat kon vinden. Hij bewees alle andere beweringen van Fermat op één bewering na, die hij weerlegde. Wel bewees Euler de laatste stelling van Fermat voor exponent 3, dat wil zeggen dat de som van twee derdemachten geen derdemacht kan zijn, nadat Fermat het al voor exponent 4 had aangetoond. In de 19de eeuw volgden bijna alle exponenten tot 100, vooral dankzij de Duitser Kummer, die daarvoor een theorie ontwikkelde die zou uitmonden in de algebraïsche getaltheorie. In het begin van de 20ste eeuw werden nog enkele slimme trucs bedacht en kwam men tot exponent 617. In de tweede helft van de vorige eeuw werd de computer in stelling gebracht. Toen ik in 1971 mijn openbare les hield kwamen de exponenten tot 100000 in zicht en in 1993 was het voor alle exponenten tot vier miljoen bewezen. Toch is dit niet de manier om Fermats laatste stelling te bewijzen. Tenslotte zijn de getallen tot vier miljoen nog niet een honderdste procent van alle getallen, sterker nog, in feite vormen ze 0% van alle getallen. Andere methoden waren nodig. En die kwamen er. In 1982 gaf de Duitser Faltings ons nieuwe hoop door te be-

wijzen dat er voor vaste exponent n maar eindig veel primitieve drietallen x, y, z zijn zó dat $x^n + y^n = z^n$, maar zijn methode is ineffectief en kan daarom niet tot een volledig bewijs leiden. Onverwachts, in 1993, kondigde de Engelsman Wiles aan een bewijs van Fermats laatste stelling gevonden te hebben. Zeven jaar lang had deze hoogleraar uit Princeton in stilte aan een nieuwe theorie gewerkt die het bewijs mogelijk zou maken en uiteindelijk was het hem gelukt. Dacht hij, want de referenten die zijn bewijs controleerden vonden een gat in de redenering. Wat een teleurstelling. Wiles ging onverdroten verder en een jaar later slaagde hij er met hulp van zijn landgenoot Richard Taylor in het gat te dichtten. In 1995 verscheen het volledige bewijs van de laatste stelling van Fermat, 140 blad-

zijden gecompliceerde wiskunde. Na 360 jaar was de stelling bewezen waar bekende en onbekende wiskundigen, en hobbyisten hun tanden op stuk hadden gebeten [2].

Het is lang niet altijd het geval dat oude wiskundevermoedens door gerenommeerde wiskundigen worden opgelost. Een goed voorbeeld daarvan is het vermoeden van Catalan. De getallen 8 en 9 zijn beide machten, want $8 = 2 \times 2 \times 2$ en $9 = 3 \times 3$. Als je verder rekent (zie het kader over machten), kom je nog wel machten tegen die 2 verschillen, namelijk $25 = 5^2$ en $27 = 3^3$, en machten die 3 verschillen, namelijk $125 = 5^3$ en $128 = 2^7$, maar het verschil 1 vind je niet meer. Catalan lanceerde in 1844 het vermoeden dat 8 en 9 de enige machten zijn die 1 verschillen. Laten we eens aannemen dat er nog een paar

Getallen, machten, hogere machten

Getallen:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
Kwadraten:	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	...
3e machten:	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000	...
4e machten:	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561	10000	...
5e machten:	1	32	243	1024	3125	7776	.	.	.	.	...
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Machten: de getallen die vanaf de tweede rij voorkomen. Dus: 1, 4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 125, 128, 144, 169, 196, 216, 225, 243, 256, ...

Hogere machten: alle getallen die vanaf de derde rij voorkomen. Dus: 1, 8, 16, 27, 32, 64, 81, 125, 128, 216, 243, 256, ...

Pythagoreïsche drietallen

Laat r, s getallen zijn met $r > s$. Definieer $x = r^2 - s^2, y = 2rs, z = r^2 + s^2$. Dan geldt $x^2 + y^2 = z^2$, want

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (r^2 - s^2)^2 + (2rs)^2 \\ &= r^4 - 2r^2s^2 + s^4 + 4r^2s^2 \\ &= r^4 + 2r^2s^2 + s^4 \\ &= (r^2 + s^2)^2 = z^2. \end{aligned}$$

Hiermee kun je willekeurig veel Pythagoras-drietallen x, y, z maken. Als je $r - s$ oneven kiest en r, s primitief, dan zijn ook x, y, z primitief.

Bijvoorbeeld geldt:

$$\begin{aligned} r = 2, s = 1 &\rightarrow x = 3, y = 4, z = 5; \\ r = 3, s = 2 &\rightarrow x = 5, y = 12, z = 13; \\ r = 4, s = 1 &\rightarrow x = 15, y = 8, z = 17; \\ r = 4, s = 3 &\rightarrow x = 7, y = 24, z = 25. \end{aligned}$$

Zo vinden we de eerder genoemde Pythagoras-drietallen 3,4,5; 5,12,13; 15,8,17; 7,24,25.

Fermat bewees bovendien het omgekeerde: bij elk primitief drietal getallen x, y, z met $x^2 + y^2 = z^2$ kun je getallen r, s vinden zó dat $x = r^2 - s^2, y = 2rs, z = r^2 + s^2$. Er zijn dus geen andere primitieve Pythagoras-drietallen dan de drietallen die je met de r, s constructie kunt maken.

machten is dat 1 verschilt. In 1850 bewees V.A. Lebesgue dat het kleinste van die twee machten geen kwadraat kan zijn en in 1964 bewees de Chinees Chao Ko dat ook de grootste geen kwadraat kan zijn. De vraag werd dus: kunnen twee hogere machten 1 verschillen? Anders uitgedrukt:

Bestaat een oplossing in getallen $m > 2, n > 2, x, y$ van $x^m - y^n = 1$?

In 1976 bewees ik dat er boven een bepaalde grens geen Catalaanse paren meer voorkomen. Helaas was die grens wel erg hoog, zoiets als

$$10^{10^{10^{10^{300}}}},$$

veel te hoog om met een computer de resterende paren te controleren. Met name door de Fransman Mignotte werd die grens behoorlijk omlaag gebracht, en rond de eeuwwisseling leek het definitieve bewijs van het vermoeden van Catalan in zicht. Plotseling was er het gerucht dat een Roemeen Mihalescu uit Paderborn Catalans vermoeden bewezen had met behulp van een andere methode, namelijk de door Kummer gestarte algebraïsche getaltheorie. Een probleem was wel dat hij moeite had zijn ideeën goed op te schrijven. De Wit-Rus Bilu uit Bordeaux hielp Mihalescu aan een acceptabel bewijs. Ditmaal werd een bekend vermoeden al binnen 160 jaar opgelost [3].

Dit waren enkele getaltheoretische hoogtepunten tijdens mijn actieve loopbaan. U zou nu wellicht de vraag willen stellen of er nog

wel iets over is om te bewijzen. Maakt u zich niet ongerust. Wiskundigen zijn nog creatiever in het bedenken van vermoedens dan van bewijzen. We weten nog niet of twee hogere machten 2 kunnen verschillen. In 1993 sprak ik tijdens de Fermatdag in Utrecht het vermoeden uit dat de som van twee primitieve hogere machten niet gelijk kan zijn aan een derde. Anders uitgedrukt:

Er zijn geen getallen l, m, n alle > 2 en primitief drietal x, y, z zó dat $x^l + y^m = z^n$.

Door $l = m = n$ te nemen krijg je de laatste stelling van Fermat, door $x = 1, l = 3$ te nemen Catalans vermoeden. Sinds de Amerikaanse bankier Beal een som geld voor de oplossing van dit probleem heeft uitgelooft, staat deze bewering bekend als het vermoeden van Beal [4]. Hoewel er de laatste tijd flinke vooruitgang is geboekt, is dit probleem nog niet opgelost. Overigens is dit niet de heilige graal waar mensen naar zoeken die zich met dit soort problemen bezig houden. Dat is het nog diepere *abc*-vermoeden, in 1985 uitgesproken door de Fransman Oesterlé en de Brit Masser. Ik waag een poging om u het idee duidelijk te maken. U kent vast wel de priemgetallen, de getallen die niet in kleinere getallen te ontbinden zijn, zoals 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 en ook 101. Stel je hebt een primitief drietal getallen a, b , en c zó dat $a + b = c$. Bereken dan het product N van de priemdelers van abc . Nemen we $a = 32, b = 49, c = 81$, dan zijn dat alleen de priemgetallen 2 (voor

32), 7 (voor 49) en 3 (voor 81). Het product van die priemgetallen is $N = 2 \times 7 \times 3 = 42$. Het *abc*-vermoeden, een variant van het *abc*-vermoeden, zegt nu dat c altijd kleiner is dan N^2 :

Als a, b, c een primitief drietal is met $a + b = c$, dan geldt $c < (\prod_{p|abc} p)^2$.

In dit geval klopt het, want $c = 81$ is kleiner dan $N^2 = 42^2 = 1764$. Er is ondanks veel speurwerk geen enkel primitief drietal gevonden waarvoor het niet klopt. Het tot nu toe in zekere zin beste resultaat is

$$a = 3^{10} \times 109, b = 2, c = 23^5$$

met $c = 6436343$ en $N = 3 \times 109 \times 2 \times 23 = 15042$. Ook hier is echter c aanmerkelijk kleiner dan $N^2 = 226261764$. Als u het *abc*-vermoeden bewijst, dan bewijst u in wezen zowel de laatste stelling van Fermat (zie kader links), als het vermoeden van Catalan, het vermoeden van Beal, en nog veel meer [5].

Wiskunde is overal nodig

Waar is dit allemaal goed voor? Voor de wiskundige gaat het om het bevredigen van nieuwsgierigheid, het structureren van inzicht en de schoonheid van een redenering. Wat dat betreft zijn we eigenlijk wiskunstenaars. Helaas zijn er maar weinig mensen die we van onze kunstuitingen kunnen laten genieten, anders dan musici en schilders. Er is echter één aspect van de wiskunde dat niet opgaat voor muziek en schilderijen. Wiskunde is overal nodig. De wiskundigen bouwen samen aan een wetenschap die door iedereen gebruikt wordt. Grote priemgetallen spelen een belangrijke rol bij de bescherming van gegevens, bijvoorbeeld bij het elektronisch bankieren. De treinen rijden nu beter op tijd dan een paar jaar geleden mede dankzij het werk van de Nederlandse wiskundige Lex Schrijver, die hiervoor vandaag een prijs ontvangt. Voor andere toepassingen van wiskunde in het dagelijks leven zou ik kunnen verwijzen naar de mobiele telefoon, CD en DVD, Google, de weersverwachting, het verkeer op de weg en in de lucht, het beheer van uw pensioengeld, enzovoort. Zelf ben ik zijdelings betrokken bij de ontwikkeling van een geheel andere toepassing van de wiskunde. Dat ging als volgt.

In 1997 werd ik uitgenodigd voor een conferentie over discrete tomografie. Zulke uitnodigingen krijg ik wekelijks en omdat ik niet wist wat discrete tomografie is, heb ik de uitnodiging meteen verwijderd. Na enige weken kreeg ik een persoonlijke email van Maurice Nivat, dat hij me voor de conferentie uitgenodigd had om een wiskundeprobleem te bespreken. Ik nam de uitnodiging aan. Discrete

tomografie bleek te gaan over het reconstrueren van een vorm van een object uit een aantal (röntgen)foto's. Denk aan scans, zoals de MRI. Dat gaat met continue tomografie waarvoor honderden foto's nodig zijn. Het object wordt rondgedraaid ten opzichte van de camera en vanuit alle hoeken langs een cirkel gefotografeerd. Kan dat niet met veel minder foto's? Zo kom je terecht bij de discrete tomografie, die in 1997 nog in de kinderschoenen stond en geen enkele praktische toepassing had. Een probleem uit de discrete tomografie hield me bezig en op een gegeven moment realiseerde ik me dat het nemen van een foto eigenlijk net zoiets is als het berekenen van de rest bij deling door een veelterm. Nu is er een stelling in de getaltheorie, de zogenaamde Chinese reststelling, die je in staat stelt om, als je van een getal weet wat de rest is bij deling door 5, en bij deling door 7, en bij deling door 11, te bepalen wat de rest is bij deling door $5 \times 7 \times 11$ (zie kader op de volgende bladzijde). Er is ook zo'n stelling voor veeltermen. Als je een aantal foto's neemt uit verschillende hoeken, is dat dus net zoiets als de resten bepalen bij deling door verschillende veeltermen. Door gebruik te maken van die duizend jaar oude stelling kon ik de mogelijke objecten karakteriseren die tot de gemaakte foto's zouden leiden. Dat gaf inzicht in de structuur van het gefotografeerde object. Tezamen met mijn Hongaarse collega Lajos Hajdu heb ik dit uitgewerkt [6]. Het ging hierbij dus om het herkennen van de structuur van een mij bekende stelling in een onverwachte setting.

In die tijd was er een begaafde derdejaars student die zowel wiskunde als informatica studeerde. Ik vroeg hem of hij geïnteresseerd was in het doen van onderzoek op dit gebied, want dan konden we voor hem een promotieplaats aanvragen. Joost Batenburg, want zo heet hij, zei dat hij een onderwerp met wiskunde én informatica, en mogelijk medische toepassingen, ideaal vond. Bij de medische toepassingen dachten we aan het verlagen van de stralingsbelasting door het verminderen van het aantal te maken foto's bij een scan. In het economiekatern van de NRC van 14 juni van dit jaar [7] las ik dat het reconstrueren van een scan van een knietje 25 minuten kost, en van een brein langer. Als je dat weet te halveren, is er een enorme winst geboekt. In de wetenschapsbijlage van de NRC van diezelfde dag staat een artikel [8] van het wiskundemeisje Ionica Smeets [9] over het scannen van diamanten. Diezelfde Joost Batenburg, inmiddels in Leiden gepromoveerd en in Antwerpen werkzaam, is de hoofdpersoon van dat artikel. Door gebruik te maken van grafi-

Gevolgen van het *abc2*-vermoeden

Uit abc2 volgt Fermat

In 1830 was bekend dat als $x^n + y^n = z^n$ voor getallen $n > 2, x, y, z$, moet gelden dat $n > 6$. Stel dat zo'n oplossing bestaat en dat het *abc2*-vermoeden waar is. Dan is

$$z^n = c < N^2 = \left(\prod_{p|x^n y^n z^n} p \right)^2 = \left(\prod_{p|xyz} p \right)^2.$$

Er geldt $\prod_{p|x} p \leq x, \prod_{p|y} p \leq y, \prod_{p|z} p \leq z$ en $x \leq z, y \leq z$. Dus

$$z^n < (xyz)^2 < (z^3)^2 = z^6.$$

Hieruit volgt $n < 6$, maar dat was al in 1830 uitgesloten. □

Uit abc2 volgt Catalan

Sinds 1964 was bekend dat als $x^m - y^n = 1$ een andere oplossing heeft dan $3^2 - 2^3 = 1$, zowel de m als de n groter zijn dan 4. Stel dat zo'n oplossing bestaat en dat het *abc2*-vermoeden waar is. Dan geldt

$$x^m = c < N^2 = \left(\prod_{p|x^m y^n} p \right)^2 = \left(\prod_{p|xy} p \right)^2.$$

Er geldt $y^n < x^m$, dus $y < x^{m/n}$. Zo vinden we

$$x^m < (xy)^2 < x^{2+2m/n}.$$

Dus $m < 2 + 2\frac{m}{n}$, ofwel $1 < \frac{2}{m} + \frac{2}{n}$. Echter $\frac{2}{m} + \frac{2}{n} < \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1$. □

sche kaarten uit de game-industrie, hardware bedoeld voor computerspellen dus, is hij erin geslaagd om de scantijd van een diamant terug te brengen van twee uur tot twaalf minuten en het berekenen van de vorm van de diamant zelf van een week tot een half uur. Dat kennen van de precieze vorm van de diamant is voor de diamantslijpers nodig om de ruwe diamant zo gunstig mogelijk te kunnen splitsen in diamantjes bruikbaar voor de verkoop. Aan het eind van het artikel spreekt Batenburg de verwachting uit dat over vijf jaar discrete tomografie ook medische toepassingen zal hebben. Karakteristiek in dit verhaal is de onvoorspelbaarheid van ontwikkelingen en het belang van aanwezige kennis, nieuwsgierigheid en inzicht.

Eigenschappen van wiskundigen

Wiskundige zijn is veelzijdig en veeleisend. Leven met een wiskundige ook. Mijn vrouw is op dit gebied ervaringsdeskundige. Ik maak u dan ook attent op een boeiende lezing die ze aangekondigd heeft te houden, niet met de titel "Het leven van een wiskundige", maar "Het leven mét een wiskundige". Wat maakt het beroep van wiskundige zo veelzijdig? Wiskundige zijn vereist kennis van de wiskunde, inzicht, creativiteit, gestructureerd kunnen denken, doorzettingsvermogen, schrijftalent, objectiviteit, geduld,

het vermogen om het werk van anderen te doorgronden en beoordelen, met studenten en promovendi kunnen omgaan en werken, en ook nog organisatie-, inschatting- en selectievermogen om de bijkomende bestuurlijke taken te kunnen verrichten. Die talenten bezitten wiskundigen niet in gelijke mate. Het is me opgevallen dat veel mensen anderen vooral beoordelen op de punten waar ze zelf goed in zijn. Mensen die veel onderzoek doen letten op publicatielijsten, mensen die didactisch goed zijn letten op welke leerlingen iemand heeft, mensen die bestuurlijk sterk zijn letten op de belangrijke functies die iemand vervuld heeft, enzovoort. Soms moet je dit voor ogen houden als je het oordeel van een ander, en van jezelf, wilt begrijpen. Ik ben ervan overtuigd dat de wiskunde alleen kan floreren doordat er velerlei soorten wiskundigen zijn en ze elkaar aanvullen.

Talent benutten

Een belangrijke eigenschap die ik nog niet genoemd heb is het vermogen om talent te herkennen en te laten ontwikkelen. Als ik kijk hoe Nederland met talent omgaat, dan is er nog veel te verbeteren. Ik noem enkele voorbeelden.

Ik heb zelf het voorrecht gehad om op het gymnasium drie wiskundeleraars te hebben waarvan er twee gepromoveerd waren en de

De Chinese reststelling.

De Chinese reststelling zegt dat als $m_1, m_2, \dots, m_r$ getallen zijn waarvan elk tweetal primitief is, en $c_1, c_2, \dots, c_r$ getallen zijn met $0 \leq c_i < m_i$ voor $i = 1, 2, \dots, r$, er een uniek getal c met $0 \leq c < m_1 \times m_2 \times \dots \times m_r$ is en de volgende eigenschap:

als x voor $i = 1, 2, \dots, r$ bij deling door m_i rest c_i heeft, dan heeft x bij deling door $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_r$ rest c .

Het getal c kan zo gevonden worden: Schrijf $m = m_1 \times m_2 \times \dots \times m_r$. Zoek voor elke i een getal d_i zó dat $d_i m / m_i$ bij deling door m_i rest 1 heeft. Bereken dan

$$y = c_1 d_1 \frac{m}{m_1} + c_2 d_2 \frac{m}{m_2} + \dots + c_r d_r \frac{m}{m_r}.$$

Dan is c de rest van y bij deling door m .

Bijvoorbeeld: het getal x heeft bij deling door 5 rest 3, bij deling door 7 rest 4 en bij deling door 11 rest 5. Dan is

$$\begin{aligned} m_1 &= 5, m_2 = 7, m_3 = 11, m = 385, \\ c_1 &= 3, c_2 = 4, c_3 = 5, d_1 = 3, d_2 = 6, d_3 = 6, \\ y &= 3 \times 3 \times 77 + 4 \times 6 \times 55 + 5 \times 6 \times 35 = 3063 \\ &\text{en } c = 368. \end{aligned}$$

Inderdaad heeft 368 bij deling door 5 rest 3, bij deling door 7 rest 4 en bij deling door 11 rest 5. De Chinese reststelling impliceert dat elk getal x dat dezelfde resten heeft een veelvoud van 385 van 368 verschilt.

derde naderhand is gepromoveerd. Zij brachten me inzicht bij. Het ging er om de wiskunde te begrijpen, niet om veel sommetjes te maken. Als je het principe begrepen had, was de vaardigheid snel verworven [19]. De vakken-nis van veel wiskundeleraars, met name in de onderbouw, schiet tegenwoordig tekort om de beste leerlingen goed te begeleiden. De meeste jongere leraren op het VWO hebben zelf niet of nauwelijks wetenschappelijk onderwijs gevolgd. Toen ik in Leiden begon werd ruim 60 procent van de wiskundestudenten leraar, nu is dat minder dan 10 procent. Het aantal wiskundestudenten is in de tussentijd gehalveerd en een grote groep potentiële wiskundeleraars wordt gemist. Gelukkig worden de gemaakte fouten nu door de regering erkend, maar daarmee is de opgelopen achterstand nog lang niet goed gemaakt. Ik vind het van landsbelang dat het leraarschap hoger wordt gewaardeerd en ook dat de faculteiten exacte wetenschappen hier een maatschappelijke functie vervullen die ze sinds de jaren tachtig van de vorige eeuw om financiële redenen hebben verwaarloosd. Ik vind dat de leraaropleiding wiskunde binnen de eigen faculteit thuishoort en dat wiskundigen daarvoor verantwoording moeten dragen. Er is nog een ander gat in de markt. Veel meisjes met wiskundetalent hebben meer belangstelling voor biologie en geneeskunde dan voor natuur- en scheikunde. Welke universiteit durft het aan een brede en minder diepe wiskundeopleiding aan te bieden die bij deze belangstelling

aansluit en waarmee ook een onderwijsbevoegdheid wiskunde verkregen kan worden? Hier is een potentiële bron om het aantal wiskundestudenten te verdubbelen.

Het probleem begint al jong. Van dichtbij heb ik meegemaakt hoe er in één gezin grote problemen waren met twee kinderen, het ene had een IQ van meer dan 150, het andere had het syndroom van Down. Het meisje met het syndroom van Down heeft van overheidswege haar hele leven bijzondere zorg en steun. Voor het hoogbegaafde kind moest de moeder het zelf maar uitzoeken. Toch zijn er mogelijkheden voor begaafde kinderen om zich te ontwikkelen. Zo kennen we de Stichting Vierkant voor Wiskunde [10] die in het Leidse Mathematische Instituut is gehuisvest en zomerkampen voor scholieren organiseert, die dan een hele week echte wiskunde doen. Dat gaat praktisch helemaal op vrijwillige basis en de nodige gelden moeten bij elkaar worden geschaapt. Ik ben blij met de voorzieningen voor kinderen met zeer lage intelligentie, maar van kinderen met zeer hoge intelligentie hangt de toekomst van onze kennissamenleving voor een groot deel af. Juist deze week werd bekend dat de regering 10 miljoen uitrekt voor het onderwijs aan hoogbegaafde kinderen op basisscholen [11]. Hulde aan het kabinet! Ik hoop wel dat dit beleid nog uitgebreid wordt tot kinderen van hogere leeftijden en tot buitenschoolse activiteiten.

Het is interessant om na te gaan hoe de Verenigde Staten in staat zijn om talent naar

zich toe te trekken. De dominantie van dat land op het gebied van toegepaste wetenschap en techniek staat niet in verhouding tot het aantal inwoners als we ze met de Europese Unie vergelijken. Ik ben nu zo'n twaalf jaar lid van de jury van de Ostrowskiprijs. Ostrowski en zijn vrouw hebben een legaat nagelaten waaruit tweejaarlijks een prijs van zo'n 75.000 euro wordt gegeven aan de wiskundige of wiskundigen die in de voorgaande vijf jaren de beste wiskundeprestatie hebben geleverd. Het voorzitterschap rouleert. Toen ik laatst voorzitter was en de prijsuitreiking in Leiden plaatsvond, ben ik nagegaan waar de prijswinnaars geboren waren en waar ze werkten. Van de 17 laureaten tot dan toe was niemand in de Verenigde Staten geboren, maar er werkten 15 in dat land, 1 in Engeland en 1 in Rusland. Dit jaar was ik voorzitter van de prijzencommissie van het Europese Wiskundige Genootschap dat in juli in Amsterdam haar congres hield. Daar kregen de beste Europese wiskundigen onder de 35 jaar een prijs. Van de 9 winnaars die in Europa geboren waren werken er nu al 4 in de Verenigde Staten. Het is dus een Europees probleem om talent aan te trekken en te behouden. Overigens, de enige Nederlander die ooit deze Europese prijs gewonnen heeft woont met zijn Amerikaanse vrouw in de Verenigde Staten. Gezinsverbanden spelen zeker een rol; het zou helpen als er soepele oplossingen werden gecreëerd voor de partners van wetenschappers die men graag naar Nederland wil halen.

Overigens betreft het niet alleen het top-talent. Er is in Nederland al jarenlang de tendens om het wiskundeonderwijs minder abstract, meer zogenaamd realistisch te maken. Dat heeft geleid tot een afname van wiskundige vaardigheid. Bij mijn gastlessen in vijfde klassen van VWO's heb ik vijfmaal meegemaakt dat niemand in de hele klas wist hoe je $a^2 - b^2$ kunt ontbinden. Veelgehoord argument in dit verband is dat de overgrote meerderheid de wiskunde toch niet meer nodig heeft, omdat de computers het allemaal kunnen. Wat daarbij echter vergeten wordt, is dat met het verminderen van het aantal lessen wiskunde ook het aantal uren gestructureerd leren denken en werken is verminderd. Volgens mij heeft dat grote gevolgen. In de NRC van 17 juni 2008 las ik dat het Nederlands spoor, meer dan in het buitenland, te kampen heeft met grote storingen die het gevolg zijn van ICT-problemen [12]. Dat ligt niet aan de gebruikte wiskunde! In een bericht van 2 juli staat dat psychotherapeuten protesteren omdat ze wegens automatiseringsproblemen al een half jaar geen vergoeding hebben ge-

had voor hun diensten [13]. Eerder waren er problemen met de ov-chipkaart, de stemcomputers en de tolpoorten. De belastingdienst, vroeger een toonbeeld van betrouwbaarheid, laat steek op steek vallen. Het energielabel voor huizen in de verkoop blijkt niet te meten wat het zou moeten meten. Het is niet eenvoudig om de oorzaak van al deze problemen eenduidig aan te geven [14], maar het lijkt met een computervirus te maken te hebben. Dit keer niet een virus in de computer, maar in de hersenen van politici en beleidsmakers. Het doet ze denken dat je elk lastig probleem met computers kunt oplossen, zonder dat je hoeft na te gaan of het redelijk is dat te verwachten, of de capaciteit en de kwaliteit van de computerafdeling voldoende is om het karwei te klaren, of de beschikbare computers er geschikt voor zijn en of de leidinggevendenden voldoende kennis hebben om de operatie tot een goed einde te brengen. Ook ontbreekt meestal de tijd voor proefprojecten. Het virus doet mensen ook denken dat je dingen niet meer hoeft te leren, omdat alles op het internet te vinden is. Het is een virus waarvoor geen virus-scanner of firewall bestaat. Gelukkig heb ik als voorzitter van de onderwijsvisitatiecommissie kunnen vaststellen dat de universitaire wiskundeopleidingen nog niet door het virus besmet zijn, en ik denk dat dit ook voor de informaticaopleidingen geldt. Daar zal het herstel vandaan moeten komen, maar het zal nog jaren duren.

Ouder talent

Een andere categorie waar talent onbenut blijft zijn de ouderen. We hebben in dit land het bijzondere voorrecht dat we al tussen de 60 en 65 jaar met pensioen kunnen gaan en daarna een redelijk inkomen genieten. Daar wordt begrijpelijkwijls graag gebruik van gemaakt. Veel van mijn leeftijdgenoten doen vrijwilligerswerk, maken reizen of wijden zich aan de kunst. Soms combineren ze het in kunstreizen. Van de leden van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen in de periode 1917-1946 bleek op 50-jarige leeftijd de levensverwachting nog 22 jaar te zijn, en stierven ze dus gemiddeld op 72-jarige leeftijd. Ze gingen toen op 70-jarige leeftijd met emeritaat. Dat verschilt twee jaar. Zestig jaar later, van 1977-2006, bleek de levensverwachting op 50-jarige leeftijd te zijn opgelopen tot 34 jaar, en werden ze dus gemiddeld 84 jaar. We gaan tegenwoordig op 65-jarige leeftijd met emeritaat, zo niet eerder. Het verschil was dus gegroeid van 2 jaar tot bijna 20 jaar [15]. Waarschijnlijk is het verschil inmiddels nog verder toegenomen [16].

Het is geen wonder dat gepleit wordt voor verhoging van de pensioengerechtigde leeftijd.

Het herinnert me aan een voorval, flink wat jaren geleden. Mijn vrouw leidde toen samen met een jongeman een jeugdkring. Hij was jarig. De kinderen van een jaar of acht vroegen hoe oud hij was geworden: 26 jaar. "Wat oud!" reageerden ze in koor. Als ik veertigers over gepensioneerd hoor praten, dan reageren ze nog net zo [17]. In Leiden zijn de werkomstandigheden voor emeriti die actief onderzoek doen nog goed. Elders worden ze vaak weggestopt of uit het instituut verbannen. Op het Leidse Mathematisch Instituut zijn de kamers voor emeriti zo dicht mogelijk bij de lift, zodat ze hun kamer nog kunnen bereiken zonder te vallen. Ik verwacht niet dat ik als geschenk van het instituut een rollator zal krijgen, want dat is niet verantwoord in verband met de komende bezuinigingen, maar misschien een looprek. Gepensioneerden worden respectvol met rust gelaten.

De vraag is of Nederland zich deze luxe kan blijven veroorloven. Opmerkelijk is dat beleidsmakers steeds spreken over een pensioenleeftijd die voor iedereen geldt. Als ik om me heen kijk, dan krijg ik een heel ander beeld. Sommige leeftijdgenoten zijn lichamelijk of geestelijk uitgeput en niet meer in staat om te werken. Anderen zijn nog tot op hoge leeftijd actief, zoals de man die mijn moeder liefdevol heeft verzorgd tot haar dood in januari van dit jaar. Op 90-jarige leeftijd loopt hij nog dagelijks enkele keren vijf trappen op, leert hij met de computer omgaan, en af en toe verblijft hij anderen met zijn piano-spel. Een individuele aanpak lijkt dus nodig. In sommige andere landen is men veel flexibeler. In de Verenigde Staten wordt een vaste pensioenleeftijd als leeftijdsdiscriminatie beschouwd en is deze wettelijk verboden. In Hongarije krijgen alleen sommige hoogleraren op 65-jarige leeftijd de titel emeritus wat betekent dat ze vanwege hun verdiensten de eer hebben om nog door te mogen werken. In Zweden wordt de pensioenhoogte wettelijk gekoppeld aan de levensverwachting, die jaarlijks wordt vastgesteld. Wie meer pensioen wil, kan langer doorwerken. Zo ligt het risico van een hoge levensverwachting ook bij de oudere generaties. Het niet goed benutten van talent kan ons land lelijk opbreken als straks de geboortegolf van direct na de Tweede Wereldoorlog met pensioen is. Waarom is in deze tijd van individualisering alles zo rigide geregeld? Waarom moet bijvoorbeeld de AOW voor iedereen op 65-jarige leeftijd ingaan? Kan het voor iemand die hiervan afhankelijk is niet aantrekkelijker zijn enkele

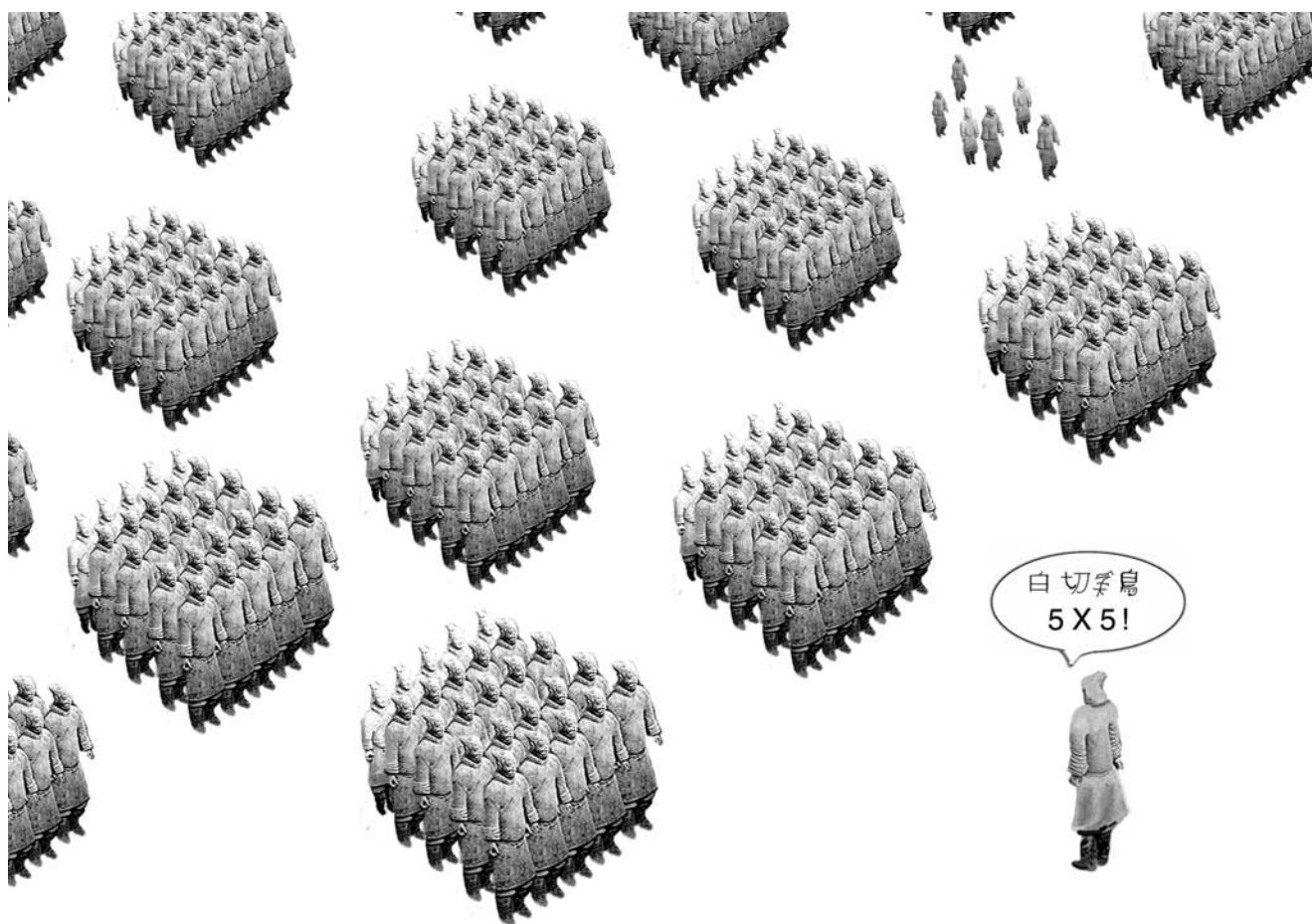
jaren door te werken om daarna een hogere uitkering te ontvangen [20]? Ik denk dat er met flexibiliteit en stimulansen veel te bereiken is.

Positieve ontwikkelingen

Ik heb u wellicht onbedoeld de indruk gegeven dat het een en al ellende is en dat het allemaal de verkeerde kant op gaat. Zo heb ik mijn carrière niet beleefd en zie ik de toekomst ook niet. Daarom voor het evenwicht enkele positieve ontwikkelingen.

Zoals u gemerkt zult hebben vormen wiskundigen een wereldwijde gemeenschap. Samenwerking beperkt zich niet tot de landsgrenzen. Al twintig jaar voor het ijzeren gordijn smolt hadden mijn vrouw en ik een jaar in Hongarije doorgebracht en we zijn er daarna nog vaak geweest. Vóór de weinig vredige gebeurtenissen op het plein van de Hemelse Vrede in Peking in 1989 hadden we in China rondgereisd. Door de persoonlijke contacten zijn we ook bij mensen thuis uitgenodigd, in Hongarije, Polen, Frankrijk, Canada, de Verenigde Staten, India, China, Japan, Australië, enzovoort. Anderzijds hebben we vele collega's uit andere landen bij ons thuis ontvangen. Zo hebben we vriendschappen gesloten, culturen overbrugd en een klein steentje bijgedragen aan de vrede en is ons gezichtsveld verbreed. In dat verband is het verheugend om sommige ontwikkelingen te zien. Veertig jaar geleden mochten Hongaren nooit met het hele gezin naar het buitenland; nu maken ze deel uit van de Europese Unie. Toen ik promoveerde was China een afgesloten land waar uitstekende wiskundigen jarenlang het land moesten bewerken; nu is er een open uitwisseling van wetenschappers mogelijk. Dertig jaar geleden moest ik tijdens reizen soms tot diep in de nacht wachten tot ik mijn vrouw telefonisch kon spreken, nu kan ik haar overal en altijd mobiel en per e-mail bereiken.

Toen ik in Leiden kwam gaf ik in dit gebouw college op een bord van nog geen 1 bij 1,5 meter. In het in 1972 in gebruik genomen Snelliusgebouw heb ik sindsdien in een ruime werk-kamer en in goede collegezalen mogen werken met begaafde studenten die allengs beter het Engels beheersten en beter konden presenteren. Onderwijs en begeleiding hebben me veel voldoening gegeven. Waar er in het begin nogal wat spanningen en naijver waren tussen de verschillende wiskunde-instituten in Nederland, is in de loop van de tijd een florerende samenwerking ontstaan die vorm heeft gekregen in onderzoekscholen, landelijk onderwijs en wiskundeclusters. Ik heb 37 jaar lang met veel enthousiasme in Leiden gewerkt. Ik dank studenten, promovendi, insti-



$$N \equiv 6 \pmod{25}$$

Copyright: Lin A. Russinoff

tuutsmedewerkers en collega's, in Leiden en elders, voor de plezierige contacten en de stimulerende samenwerking.

Kunstenaars kennen geen pensioenleeftijd. Daarom past deze gewone hoogleraar zich aan zijn leeftijdgenoten en wordt hij wiskun-

stenaar. Af en toe zal hij ook wel een wiskunstreis maken. Hoe het verder zal gaan met deze man, de tijd zal het leren.

Noten

- 1 De bewerkte tekst is in het Engels verschenen als: Old and new in number theory, *NAW* 3 (1972), pp. 188-192
- 2 Voor het verhaal: S. Singh, *Fermat's Last Theorem*, Fourth Estate, New York, 1997
Voor de wiskunde: A.J. van der Poorten, Notes on Fermat's Last Theorem, *Canad. Math. Soc.*, Wiley, 1996
- 3 J. Daems, Het vermoeden van Catalan, *NAW* 5(5), 2004, pp. 221-225
- 4 www.bealconjecture.com
- 5 R. Tijdeman, De Riemann-hypothese en het ABC-vermoeden, Onbewezen-vermoedens, *Vakantiecurcus 1999*, CWI Amsterdam, pp. 31-44, Sectie 3
- 6 L. Hajdu, R. Tijdeman, Algebraic aspects of discrete tomography, *J. Reine Angew. Math.* 534, 2001, pp. 119-128
Voor een inleiding: R. Tijdeman, Discrete tomografie, Wiskunde en gezondheid, *Vakantiecurcus 2002*, CWI Amsterdam, pp. 115-128
- 7 M. de Waard, Een knietje kost 25 minuten, een brein langer, *NRC Handelsblad*, 14 juni 2008
- 8 I. Smeets, Diamant scannen, *NRC Handelsblad*, 14 juni 2008
- 9 www.wiskundemeisjes.nl
- 10 www.vierkantvoorwiskunde.nl
- 11 10 mln extra voor slimme leerlingen, *NRC Handelsblad*, 25 augustus 2008
- 12 Spoor kampt met veel grote storings ICT, *NRC Handelsblad*, 17 juni 2008
- 13 W. Oosterbaan, Overheid verwacht en eist te veel van haar computers, *NRC Handelsblad*, 2 juli 2008
- 14 Na mijn voordracht werd ik attent gemaakt op het artikel 'Toezicht bevrijdt overheid en IT-sector uit wurggreep' van Jan Turk in *Het Financieel Dagblad*, 6 mei 2008
- 15 D. van de Kaa, Het lange leven van akademieleden, Demos, NIDI, Amsterdam, april 2008, pp. 6-10
- 16 Man leeft langer door warmer weer, *NRC Handelsblad*, 28 juli 2008
- 17 Nederland gruwet van de ouderdom, *Leidsch Dagblad*, 19 maart 2008
- 18 We korten af: $8 = 2^3$, $1000 = 10^3$, $16 = 2^4$, $81 = 3^4$ en noemen het hoge getal de *exponent*
- 19 Het *Leidsch Dagblad* van 25 augustus 2008 verwoordt dit treffend: Jan Hendrickx, oud-hoogleraar en oprichter van de Leonardoscholen, stelt dat hoogbegaafde kinderen nou eenmaal anders leren dan 'normale' leeftijdgenoten. In plaats van zich de stof stap voor stap eigen te maken, zijn zij er meer bij gebaat als eerst het grote geheel wordt uitgelegd. "Neem het metrisch systeem, de kern daarvan is dat elke maat tien keer zo groot of klein is als de vorige. Je hoeft dus niet eerst de centimeters uit te leggen, dan pas de decimeters enzovoort. Weten ze hoe het zit, dan kunnen ze binnen een uur met dat hele systeem, inclusief grammen en liters, uit de voeten en sommen maken."
- 20 Soms reageert de regering razendsnel. De volgende ochtend, 30 augustus 2008, stond in het *Leidsch Dagblad*: "Het kabinet maakt het mogelijk de AOW maximaal vijf jaar uit te stellen. Later krijgt de doorwerkende oudere dan een hogere AOW uitgekeerd." Ik weet niet waarom er een bovengrens van 70 is. Ik hoop van harte dat mijn andere suggesties voor verbeteringen met dezelfde voortvarendheid opgevolgd zullen worden.