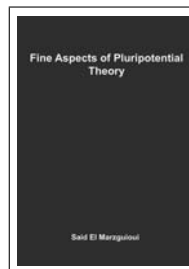


In de verdediging

| In defence



Fine aspects of pluripotential theory

Said El Marzguioui

Naar een ander land verhuizen is een ingrijpende gebeurtenis. Nadat Said El Marzguioui in de zomer van 2003 vanuit Marokko naar Nederland kwam, heeft hij erg getwijfeld of hij wel de juiste beslissing had genomen. Hij moest wennen aan de cultuur, het weer en het landschap en hij moest van alles gaan leren. De taal, de normen en waarden, zelfs zijn rijbewijs moest hij opnieuw behalen. Hoewel dit alles zeker niet makkelijk was, was het de moeite waard. Op 18 februari 2009 sloot Said zijn aio-tijd aan de UvA succesvol af met de verdediging van zijn proefschrift *Fine aspects of pluripotential theory*. En bovendien voelt hij zich inmiddels beter thuis in Nederland dan in Marokko.

Pluripotentialtheorie en de pluri-fijne topologie

Van zijn promotor Jan Wiegerinck kreeg Said de opdracht om de eigenschappen van de zogenaamde pluri-fijne topologie te doorgronden. Said legt uit dat deze topologie voortkomt uit de pluripotentialtheorie, die op haar beurt kan worden beschreven als het bestuderen van de plurisubharmonische functies op de complexe vectorruimte \mathbf{C}^n . Dergelijke functies zijn in vele opzichten analoog aan convexe functies. Een functie f op de reële lijn heet convex als de tweede afgeleide van f positief is. De vergelijkbare eis voor een plurisubharmonische functie is dat de zogenaamde complexe Monge-Ampere operator positief moet zijn.

Er is echter een belangrijk verschil tussen de twee begrippen. Een convexe functie is altijd continu, maar een plurisubharmonisch functie hoeft niet continu te zijn en kan bovendien de waarde $-\infty$ toekennen. Omdat continuïteit in de wiskunde een topologisch begrip is, kan men de Euclidische topologie zodanig uitbreiden dat alle plurisubharmonische functies op \mathbf{C}^n continu worden. De 'kleinste' topologie die alle plurisubharmonische functies continu maakt heet de pluri-fijne topologie. Het is een zeer gecompliceerde topologie, die niet voldoet aan de aftelbaarheidsaxioma's en dus niet metriseerbaar is. Maar het ergst van alles is dat deze topologie zo groot is dat alleen de eindige verzamelingen compact zijn. Een typische voorbeeld van een open verzameling ziet eruit als een gatenkaas met zoveel gaten dat er geen stukje kaas zonder gat meer uitgesneden kan worden.

Vallen en opstaan

Al in 2005 bewees Said met Jan Wiegerinck dat de pluri-fijne topologie lokaal samenhangend is en dat de pluri-fijne open verzamelingen toch een aangename structuur hebben. Dit resultaat beantwoordde een meer dan 20 jaar oude vraag van de Deen Bent Fuglede en vormt ook meteen de belangrijkste stelling van zijn proefschrift. Het afronden van het bewijs gaf Said een overwinningsgevoel, vooral omdat het zijn eerste echte bijdrage aan de wiskunde was. Naar aanleiding hiervan mocht hij op bezoek bij Bent Fuglede in Kopenhagen om meer te leren over diens theorie van fijne harmonische en subharmonische functies.

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht.

Redacteur: Geertje Hek
 la Voie-du-Coin 7
 1218 Grand-Saconnex
 Zwitserland
 G.M.Hek@uva.nl

Echter, Said leerde ook al snel dat onderzoek vaak gepaard gaat met vallen en opstaan: ongeveer twee maanden na het oplossen van Fugledes probleem ontdekte zijn promotor een ernstig gat in het bewijs. Dit was een zware tegenslag: het leek erop dat het hele bewijs instortte. Bovendien hing zijn hele onderzoeksproject van dit probleem af. Na vele slapeloze nachten en dagenlang hard werken wisten Said en zijn promotor uiteindelijk het gat te dichten: een enorme opluchting!

Kers op de taart

Het oplossen van Fugledes probleem, en daarmee het begrijpen van de pluri-fijne topologie, maakte het mogelijk om de theorie van fijne plurisubharmonische functies in pluri-fijne open verzamelingen te ontwikkelen. Deze vorm van pluripotentialtheorie is veel lastiger dan de gewone, want er zijn geen oneindige compacta, waardoor de gebruikelijk redeneringen niet opgaan.

De verzameling waarin een gewone plurisubharmonische functie min oneindig wordt, kom je op veel plaatsen in de wiskunde tegen en wordt de pluripolaire verzameling genoemd. Pluripolaire verzamelingen zijn ingewikkeld van structuur en vertonen een merkwaardig verschijnsel. Dankzij de theorie van fijne plurisubharmonische functies heeft Said veel vooruitgang geboekt in het begrip van de eigenschappen van pluripolaire verzamelingen.

In de zomer van 2008 bewees Said dat een fijne plurisubharmonische functie altijd continu is ten opzichte van de pluri-fijne topologie. Zijn promotor vond het een zeer belangrijke doorbraak en moedigde hem bijna dagelijks aan om na te denken over de mogelijke gevolgen en toepassingen van het resultaat. Inderdaad, kort daarna bewees Jan Wiegierinck dat de verzameling waarop een *fijne* plurisubharmonische functie min oneindig wordt pluripolair is, een resultaat dat Said niet haalbaar achtte. Deze doorbraak vormde de kers op zijn promotietaart, want met dit tweede belangrijke resultaat was het schilderij compleet. De grondslagen van een nieuwe theorie waren nu echt gelegd.

Een bijzondere baan

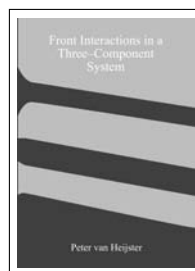
Said vindt het aio-schap een bijzondere baan. Naast het verrichten van onderzoek volg je ook cursussen in binnen- en buitenland, waar je vakgenoten ontmoet en leert hoe ze wiskunde bedrijven. Ondanks de cultuurverschillen en taalbarrière begrijp je elkaar heel goed omdat de taal van de wiskunde universeel is. Said ging dan ook graag naar een zomerschool of conferentie: omdat er zo weinig mensen zijn met wie je je wiskundige ideeën kunt uitwisselen, voelt de kring van vakgenoten vaak als een familie.

Said heeft naast zijn onderzoek ook met veel plezier lesgegeven aan studenten van alle niveaus, van eerstejaars- tot en met masterstudenten. In het begin besteedde hij heel veel tijd aan het voorbereiden van de lessen. Hij had de Nederlandse taal pas geleerd en wilde helder kunnen uitleggen en geen taalfouten maken. Zoveel voorbereiding bleek echter niet nodig: de studenten begrepen hem goed en waardeerden het zeer dat hij les gaf in het Nederlands. Het onderwijs geven vond hij belangrijk, omdat hij zo zijn wiskundige kennis kon overdragen. Maar hij heeft er zelf ook heel veel van geleerd. De vaardigheden van het lesgeven, de Nederlandse taal en, niet te vergeten, wiskunde. Veel wiskundige begrippen begreep hij pas echt toen hij ze aan de studenten moest uitleggen.

Wiskunde was mijn redding

Zoals gezegd, voelt Said zich inmiddels beter thuis in Nederland dan in Marokko. Hij is dankbaar voor de vele hulp die zijn promotor Jan Wiegierinck hem gaf bij het 'inburgeren'. Hij is er echter van overtuigd

dat de wiskunde zijn echte redding was. Had hij bijvoorbeeld rechten of economie gestudeerd, dan had hij de Nederlandse taal uitstekend moeten beheersen om zover te komen als hij nu gekomen is. Hij kent veel mensen die in Marokko zijn afgestudeerd maar in Nederland geen diploma konden halen vanwege de taalbarrière. Tot slot vertelt Said nog dat Nederland ook in belangrijke mate van Marokko verschilt in de toekomstperspectieven voor gepromoveerden. In Marokko kom je meestal maar moeilijk aan een baan na je promotie. Hier zijn er zeker voor gepromoveerde wiskundigen prima vervolgbanen te vinden. Zelf werkt Said sinds 1 oktober 2008 als credit risk analist bij ABN AMRO. Er komt redelijk wat wiskunde bij zijn nieuwe functie kijken en bovendien beschikt hij als wiskundige natuurlijk over de bekende vaardigheden die hard nodig zijn in de financiële wereld, zoals analytisch denken, ruimtelijk inzicht en abstractievermogen. En hoewel hij de pluri-fijne topologie niet kan toepassen om winst voor de bank te maken, is hij er voorlopig wel op zijn plaats!



Front interactions in a three-component system

Peter van Heijster

Bij het verschijnen van dit nummer heeft ook Peter van Heijster zijn proefschrift verdedigd, en wel op 26 mei. De afgelopen vier jaar werkte hij onder begeleiding van Arjen Doelman aan het CWI. Op het moment van schrijven van dit stukje had hij net het manuscript van zijn proefschrift *Front interactions in a three-component system* ingediend bij de promotiecommissie. Een mooi moment om eens terug te kijken.

Peter beschrijft zijn aio-tijd als de toe nu toe mooiste en leukste periode van zijn leven. Elke dag kon hij bezig zijn met wiskundeonderzoek, iets dat hij erg graag doet. Het vele reizen naar conferenties en het lesgeven bevat hem ook prima, en tot slot zat hij als aio ook nog eens niet vast aan strikte werktijden. Met andere woorden, hij vond het een ideale baan. Het is dan ook niet wonderlijk dat hij hoopt op een vervolg in de vorm van een postdoc positie aan Brown University in Providence, RI, in de Verenigde Staten.

Hoewel Peter zijn aio-tijd achteraf dus heel positief beoordeelt, had hij het aan het begin, in de zomer van 2005, best moeilijk. Het was bloedheet, hij was net begonnen met zijn onderzoek en hij zat helemaal vast met een berekening. Evenals de rest van het CWI was zijn promotor op vakantie. Daar zat hij dan ... Een maand lang heeft hij enorm lopen ploeteren. In september kwam iedereen terug van vakantie en begon het normale leven weer, ook in sociaal opzicht. Onder andere de roeisport bracht de nodige afleiding en structuur. Bovendien verhielp Arjen Doelman zijn probleem in een paar minuten, zodat hij met frisse moed verder kon.

Interactie van golffronten

In zijn proefschrift onderzocht Peter aan de hand van een specifiek systeem van reactie-diffusievergelijkingen hoe golffronten elkaar

beïnvloeden. Bij golffronten moet men denken aan bijvoorbeeld boeg- of hekgolven van een schip of aan een puls door een zenuwbaan. Wiskundig gesproken zijn het oplossingen van een systeem van differentiaalvergelijkingen die overal in rust zijn behalve in enkele gelocaliseerde gebiedjes. Het betreffende specifieke systeem is in de jaren negentig geïntroduceerd om fenomenen in gasontladingen te beschrijven, maar Peter gebruikte het meer als *toy-model*: een relatief simpel model waarvan de frontinteracties wiskundig te bestuderen zijn.

Voordat de interactie van bepaalde frontoplossingen kan worden bestudeerd, moet natuurlijk allereerst bewezen worden dat zulke oplossingen bestaan. Om betekenisvol te zijn moeten ze bovendien *stabiel* zijn. Peter legt uit waarom: “Niet-stabiele oplossingen komen in de natuur niet voor. Denk maar eens aan een recht omhoog wijzende slinger. Indien je een slinger in die stand een uiterst klein zetje geeft dan zal deze uiteindelijk tot rust komen in een stabiele, naar beneden wijzende stand.” De recht omhoog wijzende slinger correspondeert met een instabiele oplossing, waarop een kleine verstoring een grote invloed heeft. Een dergelijke oplossing zul je in het algemeen niet waarnemen, in tegenstelling tot stabiele oplossingen.

Het mooiste resultaat

Nadat existentie en stabiliteit van de oplossingen bewezen waren, kon Peter de frontinteracties daadwerkelijk gaan bestuderen. Hij leidde een systeem van gewone differentiaalvergelijkingen af dat in leidende orde de dynamica van multi-frontoplossingen beschrijft. Vier jaar geleden was de centrale vraag in zijn onderzoeksvorstel of het mogelijk is om deze dynamica te beschrijven. Met de afleiding van dit systeem is die centrale vraag positief beantwoord. Omdat er ook nog eens een mooi stukje wiskunde bij kwam kijken, vindt Peter dit het fraaiste resultaat in zijn proefschrift.

Voor het eenvoudigste geval, de 2-front oplossing, ziet de vergelijking er als volgt uit:

$$\frac{d}{dt} \Delta\Gamma = 3\sqrt{2}\varepsilon(\alpha e^{-\varepsilon\Delta\Gamma} + \beta e^{-\varepsilon\Delta\Gamma/D} - \gamma)$$

Hier is ε een kleine parameter die voldoet aan $0 < \varepsilon \ll 1$. De parameters α, β, γ, D zijn $O(1)$ met betrekking tot ε en $\Delta\Gamma$ is de afstand tussen de twee fronten. Bovendien is het belangrijk om op te merken dat $\Delta\Gamma$ wegens constructie $O(\varepsilon^{-1})$ is. De verandering in de onderlinge afstand tussen de golffronten vindt dus in verhouding heel langzaam plaats.

Zoals gezegd beschrijft deze vergelijking de leidende orde dynamica van de afstand tussen de twee fronts van een 2-front oplossing. Je kunt er bijvoorbeeld aan zien dat een stationaire 2-front oplossing (oftewel een 2-front die niet meer verandert in de tijd) moet voldoen aan

$$\alpha e^{-\varepsilon\Delta\Gamma^*} + \beta e^{-\varepsilon\Delta\Gamma^*/D} = \gamma$$

waarbij $\Delta\Gamma^*$ de afstand tussen de fronten van de stationaire oplossing

is. Dit blijkt precies de conditie te zijn die al eerder in het existentiebewijs voor een dergelijke 2-front oplossing was afgeleid! Uit de gevonden differentiaalvergelijking kan ook de stabiliteit van deze stationaire oplossing gemakkelijk worden bepaald: om stabiliteit te garanderen moet iedere kleine verstoring van de stationaire oplossing uitdoven. Daarom moet voor stabiliteit gelden

$$\alpha e^{-\varepsilon\Delta\Gamma^*} + \frac{\beta}{D} e^{-\varepsilon\Delta\Gamma^*/D} > 0.$$

Formeel was de afleiding van de formule voor de multi-front dynamica niet zo moeilijk, maar het rigoreuze bewijs was verre van triviaal. Peter laat in zijn proefschrift bovendien zien dat de resultaten keurig overeenkomen met numerieke experimenten.

Het bewijs is gebaseerd op een paar vrij recente technieken, waaronder de zogenaamde renormalisatie-groepmethode (die overigens verschilt van de oorspronkelijke ‘natuurkundige’ renormalisatiemethodes van Kadanoff en Wilson) om niet-lineaire stabiliteit en existentie, alsmede de validiteit van de formele afleiding, te bewijzen.

Een hoogtepunt in Oberwolfach

Gevraagd naar het mooiste moment in de afgelopen vier jaar, zegt Peter dat er natuurlijk verschillende hoogtepunten waren. Een voorbeeld is een hogere-orde berekening aan een bifurcatie die na twee maanden rekenen eindelijk het gewenste resultaat gaf. Maar de beste herinneringen heeft hij toch aan de vele positieve reacties die hij direct na afloop van zijn presentatie tijdens de Oberwolfach workshop *Dynamics of patterns* kreeg. Het was sowieso al bijzonder dat hij daar aanwezig was en een voordracht mocht houden. Voor conferenties in Oberwolfach worden altijd vijftig senior-onderzoekers uitgenodigd. Aangezien er altijd een paar deelnemers afzeggen is er een reservelijst, waar Peter ook op stond. Zodoende belandde hij in het wiskundige conferentiecentrum in het Zwarte Woud. Hij vertelt dat Oberwolfach in *the middle of nowhere* ligt en vrijwel volledig afgesloten is van de ‘boze buitenwereld’. Zo is er op de kamers, die trouwens niet op slot kunnen, geen TV- of internetaansluiting. Het is dan ook een soort toevluchtsoord voor wiskundigen, om heerlijk een week lang kunnen samenwerken zonder al te veel gestoord te worden. Ook het dinerritueel is bijzonder: iedereen heeft een eigen servet met zijn of haar naam erop, dat bij elke maaltijd willekeurig bij een tafel wordt neergelegd. Zodoende spreek je telkens nieuwe mensen, ideaal voor aio’s.

Peter was niet alleen op deze geweldige plek beland, hij mocht er ook nog eens 40 minuten spreken. Hij was dan ook heel erg zenuwachtig. Ondanks of misschien juist dankzij de zenuwen, liep zijn voordracht beter dan ooit en kreeg hij er zoals gezegd veel complimenten voor. Meteen daarna lag zijn servet als bonus bij die van Felix Otto en Bernhard Fiedler, twee coryfeeën met wie het goed toeven is. Met recht een hoogtepunt om met plezier op terug te kijken! ←