Derk Pik
Amstelveen
drpik@xs4all.nl

Boekbespreking

Vanuit het gezichtspunt van de muziek

De laatste jaren wordt er erg veel over wiskunde en muziek gepubliceerd. Twee jaar geleden is er zelfs een wetenschappelijk tijdschrift voor in het leven geroepen. Hoe serieus zijn deze activiteiten eigenlijk? Tooit de muziek zich met wetenschappelijke rechtvaardiging en wordt gebrek aan inspiratie en talent gemaskeerd met wetenschappelijke diepte? En omgekeerd: hoeveel verstand hebben wiskundigen werkelijk van muziek? Zijn al die wiskundige formalismes echt van belang? Derk Pik, professioneel musicus en wiskundige, geeft zijn mening over drie nieuwe boeken op dit gebied.

De relatie tussen kunst en wetenschap is ongemakkelijk. Waar wetenschap bestaat uit zekerheden, daar is kunst gemaakt van illusies. De onderzoeker verwacht van zijn gehoor een zo kritisch mogelijke houding; de kunstenaar richt zich op totale overgave en verwacht op zijn minst een zekere meegaandheid van zijn publiek.

Het contrast zou wel eens het sterkste kunnen zijn tussen wiskunde en muziek, omdat geen enkele kunstvorm zo appelleert aan abstracte, slecht benoembare emoties. Dit maakt het schrijven van een boek over muziek en wiskunde tot een hachelijke onderneming.

Alhoewel muziek en wiskunde hun abstracte karakter delen, is het doel van onderzoek op het gebied van wiskunde en muziek nogal verschillend. De wiskundige die onderzoek verricht op dit gebied zoekt naar algemene principes. Neem bijvoorbeeld het ontstaan van de twaalftoons equidistante stemming. Een typisch wiskundige vraag is: waarom twaalf? Een musicus of componist benadert het probleem van de stemming vanuit een totaal ander gezichtspunt: hij zoekt naar het bijzondere, naar de speciale eigenschappen van die stemming. Hij doet ook onderzoek: zijn doel is het vinden van nieuwe interessante intervallen, nieuwe stemmingen, nieuwe kleuren. In het verleden heeft wiskunde daar steeds een grote rol in gespeeld.

Wiskundige overwegingen hebben bijvoorbeeld herhaaldelijk geleid tot de ontdekking van nieuwe stemmingen. Wat betreft dit onderwerp is een componist dan niet zozeer op zoek naar een wetenschappelijke verklaring voor het verschijnsel dat vele (Pythagoreïsche, reine, getempereerde) stemmingen steeds de Westerse twaalftoonstoonladder benaderen, als wel naar nieuwe samenklanken.

In de twintigste eeuw verschoof het gebruik van wiskunde in muziek. Vele componisten raakten geïnteresseerd in combinatorische en symmetrische principes, en meer recent, in ruis en algoritmisch componeren. Melodie en harmonie waren niet langer de primaire drijfveren; de emancipatie van het ritme veranderde de klassieke muzikale wereld ingrijpend.

Technische ontwikkelingen hebben ook hun invloed gehad. Synthesizers en computers creëren grote mogelijkheden voor elektronische muziek. Doordat bijna alle muziek nu wordt opgeslagen en verspreid in digitale vorm, heeft wiskunde nog een andere belangrijke rol gekregen in muziek.

Recent zijn er drie boeken op het gebied van wiskunde en muziek verschenen. *The Math behind the Music* van Leon Harkleroad [1], bedoeld voor algemeen publiek, *Music and Mathematics: from Pythagoras to Fractals*, een compilatie van speciaal voor deze bundel geschreven artikelen, verzameld en geredigeerd door John Fauvel, Raymond Flood and Robin Wilson [2], en *Music, a Mathematical Offering* van David J. Benson [3], voor een publiek met enige wiskundige achtergrond.

Voorafgaand aan de bespreking van deze boeken geven we een introductie over de historische rol die wiskunde in de muziek heeft gespeeld. We doen dit zoveel mogelijk vanuit het standpunt van de musicus. Zo zijn we in staat om gedetailleerd in te gaan op de werkelijke betekenis van deze drie boeken.

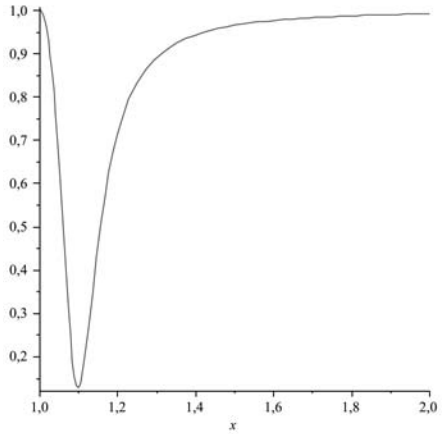
Historisch overzicht

Alhoewel consonantie niet het enige gebied is geweest waar wiskunde een prominente rol heeft gespeeld, is het historisch gezien wel het belangrijkste. Theorieën over samenklank bestaan al op zijn minst enkele duizenden jaren.

Consonantie, het samenklinken van stemmen of instrumenten, is een gecompliceerd onderwerp, waarbij natuurkunde, de fysiologie van het oor en deelbaarheid van getallen samenkomen. In de Middeleeuwen, Renaissance en Barok probeerden theoretici er achter te komen welke stemming het beste was voor hun koor of instrument. Tot op heden zoeken componisten naar nieuwe intervallen, nieuwe akkoorden met nieuwe mogelijkheden. De tonen waaruit de 'gewone' hedendaagse populaire muziek bestaat, bevat daarentegen al meer dan honderd jaar dezelfde gelijkgestemde twaalf tonen. Het muzikale materiaal verandert maar langzaam.

Consonantie

Twee snaren waarvan de lengtes in eenvoudige verhouding staan, klinken goed samen. Deze ontdekking is vanaf de Middeleeuwen



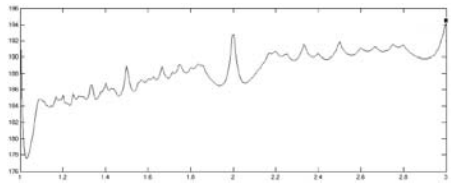
Figuur 1 Consonantiekromme voor twee sinustonen, een met constante frequentie van 220 Hz en de andere stijgend van 220 tot 440 Hz.

toegeschreven aan Pythagoras. Dit is overigens niet correct, daar stemmingen op basis van eenvoudige verhoudingen al zijn gevonden in Babylonische teksten van 3500 voor Christus. Aan het eind van de zestiende eeuw ontdekten Mersenne en Galilei onafhankelijk van elkaar dat de toonhoogte en de frequentie van de trillende snaar gerelateerd zijn: een eenvoudige frequentieverhouding resulteert in consonantie.

De componist Georg Andreas Sorge (1703 – 1778) ontdekte dat twee tonen dissonant klinken als ze *partiëlen* (boventonen) hebben die dicht bij elkaar liggen, maar net niet hetzelfde zijn (*Vorgemach der musicalischen Composition* (1745 – 1747)). Hermann von Helmholtz gaf hiervoor de eerste fysiologische verklaring in zijn invloedrijke werk *Die Lehre von den Tonempfindungen* [4]. Het bleek dat sinusfuncties een sleutelrol speelden.

Een typisch experiment gaat als volgt: neem twee sinustonen, de ene met een constante frequentie van bijvoorbeeld 220 Hz en de andere met een frequentie die geleidelijk stijgt van 220 Hz naar 440 Hz. Eerst hoort men zuivere consonantie, het zijn dezelfde tonen, maar spoedig verschijnt er een ratelend geluid en worden de twee tonen als sterk dissonant ervaren. Als het frequentiequotiënt groter wordt dan $1\frac{1}{6}$ verdwijnt het onaangenaam ratelende gevoel in het oor. Dit experiment kan schematisch worden weergegeven in een grafiek (figuur 1). Natuurlijk heeft deze kromme een subjectief karakter. De kromme is in 1877 geïntroduceerd door Helmholtz; in de zestiger jaren hebben R. Plomp and W.J.M. Levelt het effect statistisch getoetst voor verschillende tonen en akkoorden en hebben ze er een verfijnde theorie omheen gebouwd [5].

Het feit dat sinustonen die verder uit elkaar liggen niet dissonant klinken is verrassend voor veel musici. Zij verwachten dat twee sinustonen die een grote septiem van elkaar vandaan liggen erg dissonant zullen klinken. Sinustonen en tonen, voortgebracht door trillende objecten zoals muziekinstrumenten, zijn dan ook erg verschillend. Natuurlijke tonen zijn opgebouwd uit vele sinustonen: ze bevatten vele tientallen *partiëlen* of boventonen.



Figuur 2 Consonantiekromme voor twee tonen met 14 partiëlen

Wat gebeurt er als we hetzelfde experiment nog eens uitvoeren, maar nu met twee computergegenereerde samengestelde tonen? We nemen twee samengestelde tonen waarvan de partiëlen eenvoudige verhoudingen hebben met de grondtoon. Eén toon is weer constant, met de frequenties (in Hz):

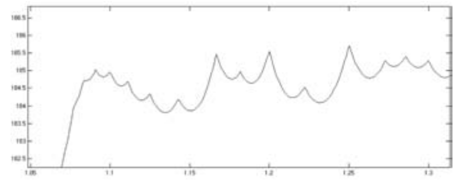
$$110\ 220\ 330\ 440\ 550\ 660\ 770$$
$$880\ 990\ 1100\ 1210\ 1320\ 1430\ 1540.$$

De andere toon, startend met dezelfde 14 frequenties beweegt langzaam naar een toon met de frequenties (in Hz):

$$220\ 440\ 660\ 880\ 1100\ 1320\ 1540$$
$$1760\ 1980\ 2200\ 2420\ 2640\ 2860\ 3080$$

Op elk moment zullen er partiëlen zijn die dissonantie veroorzaken. We kunnen de som van deze dissonanties weer in een grafiek weergeven (figuren 2 en 3).

De consonantiekromme vertoont een groot aantal pieken. Deze pieken verschijnen bij de verhoudingen van de grondtoonfrequenties



Figuur 3 Detail van consonantiekromme: in de buurt van de verhouding $9/8 = 1.125$ zijn vele pieken. Dit interval kan op vele manieren zuiver gespeeld worden.

$$1, 1.1, 1.111, 1.125, 1.143,$$
$$1.167, 1.20, 1.222, 1.25, 1.325,$$
$$1.4, 1.5, 1.666, 1.75, 1.83, 2, \ldots$$

We herkennen hierin de verhoudingen

$$1, 11/10, 10/9, 9/8, 8/7, 7/6, 6/5, 11/9, \ldots$$

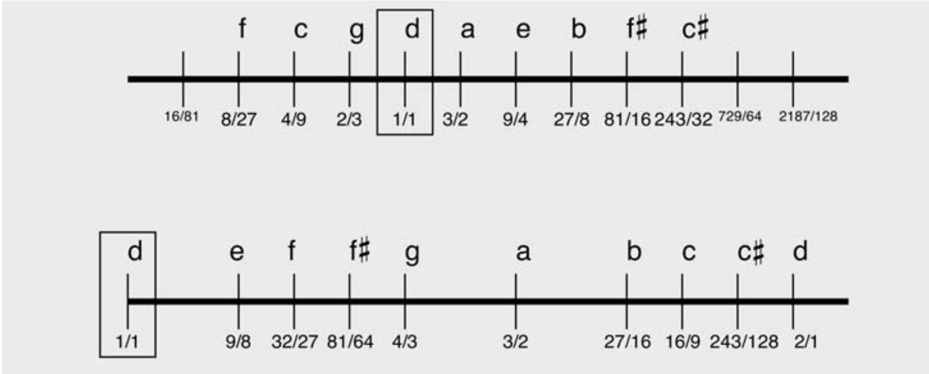
Een aantal van deze verhoudingen wordt in de Westerse muziek gebruikt: onze toonladders zijn er op gebaseerd. Andere ratio's zijn ongebruikt. Bekendheid met dergelijke intervallen biedt perspectieven voor hedendaagse muziek.

Er kan nog iets anders van deze grafiek worden afgelezen. Als we inzoomen op de plaats bij de verhouding $9/8$ (op de piano is dit de afstand tussen een a en een b, een grote secunde) zien we vele pieken dicht bij elkaar. Dit suggereert dat in de nabijheid van dit interval vele zuivere intervallen zitten. Zuiver zingen en spelen kan op vele manieren.

Toonladders

Westerse muziek, de muziek die we dagelijks om ons heen horen en waar we aan gewend zijn, heeft een nogal gecompliceerde structuur. Gewone akkoorden in populaire muziek bevatten vele verschillende tonen. In het verleden was dit niet altijd het geval. Tot ver in de Renaissance accepteerde men maar een beperkt aantal samenklanken. De stemming was geheel gebaseerd op twee intervallen: het octaaf (frequentieverhouding $2/1$) en de

Figuur 4 Het octaaf, de kwint en de grote terts op een piano. Deze intervallen corresponderen achtereenvolgens met frequentieverhoudingen exact $2/1$, ongeveer $3/2$ en ongeveer $4/3$. Merk op dat het octaaf acht witte toetsen omvat, de kwint vijf en de grote terts drie.



Figuur 5 De toonladder van het *Kyrie* van de *Messe de Nostre Dame* van *Guillaume de Machaut*. Op de bovenste regel zijn de tonen weergegeven, geconstrueerd met gebruikmaking van alleen maar kwinten, dus met frequentieverhouding $3/2$. De frequentieratio van de *a* en de *d* bedraagt $3/2$. De tonen behorende bij de klein gedrukte verhoudingen komen in het *Kyrie* niet voor. De verhouding van de Middeleeuwse $f\sharp$ en de *d* is gelijk aan $81/16$. Op de onderste lijn zien we dezelfde tonen, maar dan met hulp van octaafsprongen (verhouding $2/1$) zo dicht mogelijk bij de grondtoon *d*. Bijvoorbeeld: op de bovenste lijn hebben de *e* en de *d* verhouding $9/4$; op de onderste lijn liggen de *e* en de *d* naast elkaar met verhouding $9/8$.

reine kwint (verhouding $3/2$). De grote terts, het meest voorkomende interval in de populaire muziek, werd toen als vals beschouwd.

Pythagoreïsche stemming

De Middeleeuwse gevoeligheid voor zuivere intervallen legde grote beperkingen op aan componisten van vocale muziek. Neem bijvoorbeeld het *Kyrie* uit de *Messe de Nostre Dame* van Guillaume de Machaut (1300–1377). In dit werk voor a capella koor worden negen van de twaalf tonen gebruikt en deze zijn allemaal geconstrueerd vanaf de grondtoon d, waarbij alleen octaaf- en kwintsprongen worden gebruikt.

Een stemming waarbij alle tonen geconstrueerd zijn door de ratio's $3/2$ en $2/1$ heet een *Pythagoreïsche stemming*. In deze stemming zijn kwinten (verhouding $3/2$) zuiver en is de grote terts (verhouding $81/64$) wat minder zuiver. De *Messe de Nostre Dame* die in Pythagoreïsche stemming gezongen moet worden, bevat desondanks enkele grote tertsen. Deze verschijnen echter alleen in het midden van melodische zinnen en veroorzaken een zekere spanning.

Reine stemmingen

Drie intervallen in de Pythagoreïsche toonladder hebben een frequentieverhouding die grote getallen bevat. De Pythagoreïsche toonladder met grondtoon *c* heeft de verhoudingen

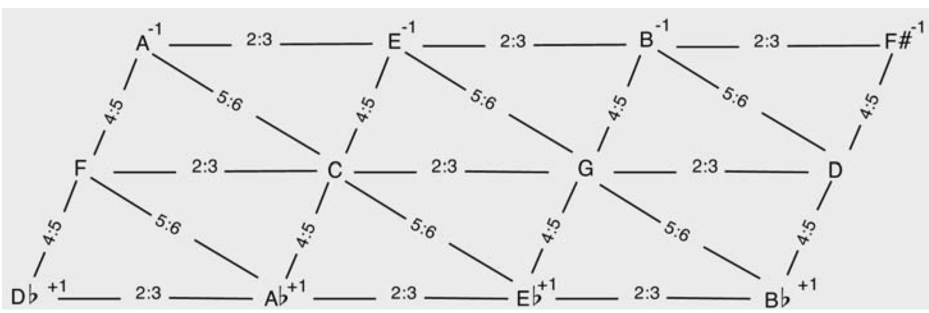
toon	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*a*	*b*	*c*
ratio	$\frac{1}{1}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	$\frac{2}{1}$

We kunnen de verhouding van de toon *e* $(81/64)$ met een fractie van $80/81$ verlagen waarmee we het eenvoudiger quotiënt

$$\frac{81}{64}\cdot\frac{80}{81} = \frac{5}{4}.$$

verkrijgen. De breuk $80/81$ heet de *syntonische komma*. Als we dezelfde verlaging uitvoeren op de *a* en de *b*, vinden we de eenvoudiger tabel

toon	*c*	*d*	$e^{\sim}$	*f*	*g*	$a^{\sim}$	$b^{\sim}$	*c*
ratio	$\frac{1}{1}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{2}{1}$



Figuur 6 Stemschema uit *Les raisons des forces mouvantes avec diverses machines*, 1615, van Salomon de Caus. (Dit stemschema verscheen ook in 1636 als Spinetstemming nr. 1 in *Harmonie Universelle* (1636–1637) van Marin Mersenne.) De tonen staan aangegeven met kruis of mol: $D\flat$ staat voor een *Des* en $F\sharp$ staat voor een *Fis*. Op elke horizontale lijn staan de reine kwinten $(3/2)$; als we naar boven naar rechts gaan vinden we de zuivere grote terts $(4/5)$, en naar beneden naar rechts staat de zuivere kleine terts $(5/6)$. Vanaf het einde van de vijftiende eeuw kan men dergelijke stemmingsschema's vinden in theoretisch werk van de wiskundigen Keppler, Mersenne, Euler en van verscheidene musici. De notatie is modern en komt uit het hier besproken boek *Music, a mathematical offering* van David Benson. De in dit voorbeeld gebruikte notatie is toegeschreven aan Carl Eitz (1848–1924) en Hugo Riemann (1849–1919).

De laatste tabel is een voorbeeld van een *reine stemming*, of met de veelgebruikte Engelse term: *just tuning*. In deze stemming klinken alle intervallen zuiver ten opzichte van de grondtoon *c*. Merk op dat het priemgetal 5 in de breuken is verschenen.

Stemschema's

Zoals we zien in figuur 4 heeft de piano twaalf verschillende zwarte en witte toetsen. In de bovenstaande tabel toonden we de zeven tonen (*c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *a*, *b*). De ontbrekende vijf zijn precies de zwarte toetsen van de piano (*cis*, *dis*, *fis*, *gis*, *aïs*). We kunnen deze tonen aan het schema toevoegen met gebruik van de verhoudingen $3/2$ en $5/4$. Zo ontstaat het stemschema in figuur 6.

Wat zijn de goede en de slechte eigenschappen van zo'n stemschema? Intervallen die in het schema met enkele stappen bereikt kunnen worden klinken zuiver. Dit geldt ook voor akkoorden. In het bijzonder klinken alle grote en kleine drieklanken die als driehoek in het stemschema te vinden zijn, zuiver. Men betaalt echter een prijs voor de zuiverheid: de 'kwint' $F\sharp^{-1} - D\flat^{+1}$ klinkt zeer vals. Uit figuur 7 concluderen we dat

$$\frac{\text{hoge } G\flat^{+1}}{\text{hoge } D\flat^{+1}} = \frac{2}{3} \approx 0,667$$

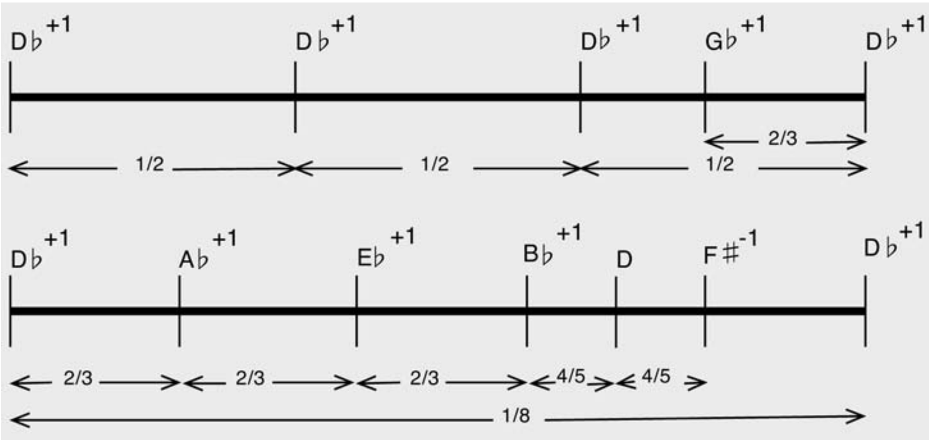
$$\frac{\text{hoge } F\sharp^{-1}}{\text{hoge } D\flat^{-1}} = \frac{5}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{8} = \frac{675}{1024} \approx 0,660,$$

een afwijking van meer dan $1/100$. Het verlagen van $F\sharp^{-1}$ zou het interval $F\sharp^{-1} - D\flat^{+1}$ verbeteren.

We kunnen alle kwinten die nu zo zuiver mogelijk zijn met verhouding $3/2$, een klein beetje kleiner maken, zodat de onzuiverheid over meerdere intervallen verdeeld wordt. Dergelijke stemschema's heten *getempereerd*. Verschillende musicologen denken dat Bach meerdere getempereerde stemmingen gebruikte voor *Das Wohltemperierte Klavier* en niet een en dezelfde stemming voor alle 48 preludes en fuga's. Al enige jaren wordt er een discussie gevoerd of er bovenaan de eerste pagina van het manuscript van Bach een stemschema staat. Hier is namelijk een versiering getekend met allerlei krullen die de mate van verhoging of verlaging zou kunnen betekenen. Op het eerste gezicht lijkt dit een theoretische discussie, maar verschillende stemmingen hebben in de praktijk verschillende kleuren.

Equidistante stemming

Als we 12 reine kwinten op elkaar stapelen,



Figuur 7 Ideaal zou $G\flat^{+1}$ – $D\flat^{+1}$ gestemd moeten worden als reine kwint: verhouding $2/3$. Met het stemmingschema van figuur 6 wordt de toon $G\flat^{+1}$ als $F\sharp^{-1}$ gestemd. Dit geeft de verhouding $675/1024$: veel kleiner dan $2/3$.

dan is de totale afstand ongeveer 7 octaven. In frequentieverhoudingen:

$$(3/2)^{12} = 129,7 \approx 128 = (2/1)^7.$$

Het quotiënt van deze frequentieverhouding, $3^{12}/2^{19}$ heet de *Pythagoreïsche komma*.

Aan het einde van de achttiende eeuw werd de behoefte om een stuk te transponeren, dit betekent op een andere toonhoogte te spelen, zo groot, dat men alle intervallen gelijk ging stemmen. Het idee achter deze stemming is toegeschreven aan Vincenzo Galilei (1520–1591), de vader van Galileo Galilei. Het bleef eeuwenlang ongebruikt.

Er zijn twaalf tonen in een octaaf. Veronderstel dat de frequentieverhouding tussen twee naastgelegen tonen gelijk is aan r. Dan is de ratio tussen twee tonen die een octaaf van elkaar verwijderd liggen:

$$1/2 = \frac{c}{c'} = \frac{c}{c\sharp} \cdot \frac{c\sharp}{d} \cdot \frac{d}{d\sharp} \cdot \frac{d\sharp}{e} \cdot \frac{e}{f} \cdot \frac{f}{f\sharp} \cdot \frac{f\sharp}{g} \cdot \frac{g}{g\sharp} \cdot \frac{g\sharp}{a} \cdot \frac{a}{a\sharp} \cdot \frac{a\sharp}{b} \cdot \frac{b}{c} = r^{12}.$$

Hieruit volgt dat de kleine secunde in de *equidistante stemming* gestemd moet worden met verhouding $r = \sqrt[12]{1/2} \approx 0.943874$.

Hedendaagse instrumenten zijn gestemd met dit interval als basis. De kwinten klinken nogal dun: $r^7/1 \approx 1/1.4983$. Tegenwoordig zijn we volledig gewend aan deze niet-reine stemming. Enkel als we gedurende een langere periode Middeleeuwse muziek zingen of beluisteren, kan de terugkeer naar onze alledaagse equidistante stemming een ongemakkelijk gevoel geven.

Andere equidistante stemmingen

Vele musici en wetenschappers hebben gezocht naar andere equidistante stemmingen. Een van de eersten was Nicola Vicentino, die in 1555 de 31-toons equidistante stemming introduceerde, welke in 1691 werd opgepakt door Christiaan Huygens. Huygens bestudeerde ook de 19-toons equidistante stemming. Anton Fokker heeft in 1950 een 31-toons orgel gebouwd, dat zich lange tijd in het Teylers museum in Haarlem bevond. (Het orgel is onlangs grondig gerenoveerd en wordt nu in het Muziekgebouw aan 't IJ geplaatst. Op 17 mei van dit jaar vond daar een inwijdingsconcert plaats.) In 1876 construeerde Robert Bosanquet een harmonium voor 53-toons equidistante stemming. In [6] is een gedetailleerd historisch overzicht te vinden van equidistante stemmingen.

De kwaliteit van dergelijke n-toons equidistante stemmingen wordt bepaald door het aantal belangrijke intervallen dat op een acceptabele manier wordt benaderd. Expliciet: voor welke p en q is $(2^{1/q})^p \approx 3/2$, of: $p/q \approx \log_2(3/2)$? Als we een goede benadering p/q kunnen vinden, hebben we een goed benadering voor de kwint. Nog belangrijker: bestaan er goede gelijktijdige benaderingen zoals

$$p_1/q \approx \log_2(3/2),$$
$$p_2/q \approx \log_2(4/3),$$
$$p_3/q \approx \log_2(5/4).$$

Als we dergelijke q kunnen vinden, hebben we een equidistante stemming die tegelijkertijd de kwint, de kwart en de grote terts goed benadert.

Het probleem om een logaritme te benaderen door een rationaal getal is goed te begrijpen door middel van kettingbreuken. Gelijktijdige approximatie van meerdere logaritmen heeft echter geen constructieve oplossing (zie [3], p. 221).

Harmonie

Tot op heden is er geen goede verklaring voor de werking van de traditionele Westerse harmonie. Natuurlijk is het een subtiel en rijk spel van spanning en ontspanning, van dissonantie en consonantie, maar ook van akkoordprogressies die men juist wel of juist niet verwacht; akkoorden die in een bepaalde toonladder passen of juist niet.

Het is verleidelijk om schema's te maken van toegestane akkoordopeenvolgingen. Deze opeenvolgingen kan men namen geven: dit is in het verleden vaak gedaan en de meeste harmonieleren hebben dergelijke schema's als hoofdonderwerp.

Deze schema's zijn wel tijds- en stijlafhankelijk. Grote componisten uit alle tijden hebben telkens weer geprobeerd om nieuwe akkoorden te vinden, nieuwe progressies. Een beroemd voorbeeld van een nieuwe progressie is het dubbelverminderde septiemakkoord bij Mozart, om op een onverwachte wijze op een dominant uit te komen. Zo'n uitvinding is sindsdien terug te vinden bij vele componisten en het schema van toegestane akkoordopeenvolgingen is er vanaf toen mee uitgebreid. Het schema van toegestane progressies is dus afhankelijk van het tijdperk en de muzikale stijl.

Dan maakt het ook nog uit welke stemming gebruikt wordt. In reine stemming klinken vele akkoorden dissonant en zijn er dus minder akkoorden toegestaan dan in onze huidige equidistante stemming, waar alle akkoorden enigzins vals klinken. In deze stemming zijn de dissonante akkoorden daarentegen minder dissonant en ontstaat er een enorme mogelijkheid tot het creëren van nieuwe akkoorden.

Elk nieuw akkoord leidt tot nieuwe akkoordprogressies. Telkens raakt het publiek er weer aan gewend. De nieuw geïntroduceerde akkoorden akkoorden worden steeds dissonanter en hoe dissonanter een akkoord, des te meer akkoorden kunnen dienen als ontspannende opvolger. Neem bijvoorbeeld het beroemde Tristanakkoord uit *Tristan und Isolde* van Wagner: dit akkoord kan oplossen naar bijna alle drieklanken op een acceptabele manier.

Omdat de nieuwe, meer en meer gecompliceerde akkoorden steeds minder richting gaven — ze losten naar alle kanten op — werd hun betekenis ook steeds dubbelzinniger en minder dwingend. Aan het einde van de negentiende eeuw had de harmonie voor veel componisten zijn stuwende kracht verloren. Deze componisten zochten en vonden andere manieren om hun muziek te structureren.

Na 1900

Schönberg en zijn volgelingen braken radicaal

Figuur 8 Maat 35 tot en met 44 uit de pianosonate KV 533 van Mozart. In maat 40 is het tweede akkoord het dubbelverminderde septiemakkoord, dat naar de dominant g-groot leidt in maat 41.

met de plichtmatige harmonische clichés. Alhoewel Schönberg een grote kenner was van de traditionele harmonieleer — hij schreef een gezaghebbende aan Mahler opgedragen *Harmonielehre* en componeerde een aantal 'harmonische' meesterwerken (zoals de *Gurrelieder* en *Verklärte Nacht*) — bereikte hij een grote mate van concentratie met de ontwikkeling van de dodecafonische techniek.

De componist kiest een volgorde van de twaalf verschillende tonen, waarmee meteen de volgorde van de motieven en melodiëen van het muziekstuk vastligt. De enige toegestane variaties bestaan in het spiegelen van de volgorde (opgeschreven op een notenbalk betekent dit: spiegelen in een verticale lijn) en het omkeren van de intervallen (in een horizontale lijn spiegelen). Deze operaties laten de motivische inhoud intact en geven de muziek een sterke eenheid. Een interessante wiskundige vraag is hoe veel variatie er bestaat in de keuze van twaalftoonsrijen.

Bestaat er eigenlijk wel genoeg variatie? Te weinig, vond Igor Strawinsky. Hij ervoer de twaalftoonstechniek als beperkend: in zijn dodecafonische muziek ontwikkelde hij nog andere manieren dan spiegeling om toonrijen te manipuleren waarbij wel steeds de motivische samenhang blijft bestaan (zie bijvoorbeeld zijn Pianoconcert).

De harmonie verloor ook op andere manieren terrein. De meeste vroegtwintigsteeeuwse componisten plaatsten ritme en melodie op de voorgrond, ten koste van harmonie. Deze herwonnen vrijheid vereiste nieuwe structurerende middelen. Deze kunnen vaak op eenvoudige wiskundige wijze worden beschreven. Bijvoorbeeld het additieve ritme (het aan elkaar schakelen van ritmische motieven) tegenover delingsritmes (het traditionelere onderverdelen van ritmische eenheid in kleinere). *Le Sacre du Printemps* van Strawinsky bevat hier talloze voorbeelden van (zie [8]).

Symmetrie

Vele componisten stellen er eer in om bijvoorbeeld een motet te schrijven dat van voor naar achteren precies hetzelfde klinkt als van achteren naar voren. Machaut, Haydn, Rachmaninoff en vele anderen, verwerkten overvloedig veel symmetrie in hun composities. Symmetrie speelt dus een belangrijke rol in muziek. Maar waarom?

Alhoewel het moeilijk is hierop een gefundeerd antwoord te vinden, is het de belangrijkste vraag voor elke auteur die schrijft over symmetrie in muziek.

In de twintigste eeuw werd symmetrie door het wegvallen van conventionele harmonische structuur opnieuw een belangrijk stijlmiddel. Componisten verwerkten daarom allerlei soorten wiskunde in hun muziek, soms met groot effect, maar ook vaak onnodig, pretentieus, modieus en soms zelfs gewoon niet om aan te horen en onzinnig.

In de zeventiger jaren is geprobeerd fractals in muziek te verwerken. Fractals, die al meer dan een eeuw bestonden, raakten in de mode omdat ze met computers zichtbaar konden worden gemaakt. Een fundamentele eigenschap van een fractal is het bestaan van symmetrie die zich op steeds kleinere schaal herhaalt. In muziek is de tijd een van de dimensies: de micro-symmetrie is spoedig niet meer met het oor waarneembaar — *épater les bourgeois*.

Er waren echter ook veel positieve ontwikkelingen. Olivier Messiaen introduceerde seriële muziek in de pianostukken *Cantyodyaja* en in het 'Mode de valeurs et d'intensités' uit de *Quatre Études de Rhythme*.

In de seriële stijl worden muzikale parameters, zoals duur, positie in tijd, klanksterkte, toonhoogte, klankkleur, aan elkaar verbonden. In eerste instantie wordt hierdoor de toonhoogte en toonduur aan elkaar gekoppeld, zodat de toehoorder het groot aantal verschillende tijdsduren beter kan herkennen. Op dit terrein hebben Messiaen en zijn volgelingen hun doel royaal bereikt. Nu, vijftig jaar later, kunnen bijvoorbeeld vele pianisten een goede uitvoering geven van ritmisch excessief moeilijke muziek, zoals de tweede Sonate van Boulez. Toen deze muziek geschreven werd, was daartoe bijna niemand in staat.

Stemming in de twintigste eeuw

Een andere manier om uit de harmonische ineenstorting te komen was het experimenteren met nieuwe stemmingen. De Amerikaan Harry Partch (1901–1974) ontwikkelde nieuwe toonstelsels, geheel gebaseerd op rationale verhoudingen. Hij componeerde muziek in een 43-toons toonladder, waar de toonhoogtes ongelijk verdeeld waren. Om de klanken te realiseren ontwierp hij speciale instrumenten. Een aantal composities is op cd verkrijgbaar, veel meer is te vinden op YouTube.

De Amerikaanse componist La Monte Young (1935) heeft ook substantiële bijdragen geleverd op het gebied van alternatieve stemmingen. Zijn compositie *The well-tuned piano* is een zes uur durende improvisatie op een speciaal geprepareerde Bösendorfer concertvleugel. De piano wordt een week lang zeer precies gestemd in een speciale rationale stemming, die nogal verschilt van de gewone equidistante stemming. De improvisatie mediteert op lang volgehouden consonante klanken en bijzondere tremoli. De stemming is zodanig dat in de tremolowolken nieuwe tonen ontstaan, die niet op de toetsen worden gespeeld. Men kan dit zelf ervaren door een dvd bij de componist te bestellen [7].

In traditionele muziek uit het Midden-Oosten wordt al lange tijd een 24-toons equidistante stemming gebruikt; in de Westerse muziek sinds de twintigste eeuw. Componisten zoals Ivan Vishnegradski en Charles Ives deelden de toonladder op in kleinere stukken, in het bijzonder in 24 kwarttonen. Deze stemming leidt niet tot meer consonantie maar biedt allerlei mogelijkheden voor glissandi en vreemde akkoordkleuringen, zoals in *Music For Flute, Strings, Percussion* van Sofia Gubaidulina.

Vele belangrijke twintigste-eeuwse componisten werkten met alternatieve stemmingen. Bartok, Ligeti (in allerlei stukken, waaronder zijn hoorntrio), Stockhausen (bijvoorbeeld in *Mantra* voor twee piano's, waar de toonhoogte en klankkleur wordt beïnvloed door een elektronisch feedbacksysteem) en Gérard Grisey die met moderne hulpmiddelen de spectra van muziekinstrumenten analyseerde om nieuwe consonanties te vinden.

In de tachtiger jaren zijn computers zo

Figuur 9 Het begin van *Night Fantasies* van Elliot Carter is een goed voorbeeld van het gebruik van symmetrie in muziek. Het stuk is gebaseerd op twee akkoorden die alle intervallen bevatten (zie rechter notenvoorbeeld). Een dergelijk akkoord bevat alle 12 verschillende tonen en alle 11 verschillende intervallen. Het eerste akkoord bevat, van beneden naar boven) de tonen $f\sharp, g\sharp, d\sharp, g, a\sharp, b, f, e, c\sharp, a, d, c$, en de opeenvolgende intervallen $2, 7, 4, 3, 1, 6, 11, 9, 8, 5, 10$, genoteerd in aantallen kleine secundes. Het tweede akkoord wordt uit het eerste verkregen door van onder tot boven te spiegelen. Hoe worden deze akkoorden gebruikt? Het eerste akkoord verschijnt gedeeltelijk in maten 3 – 8: in maat 3 zien we $f\sharp, g, d, c$ en verderop $c\sharp$, in maat 5 is een f is toegevoegd, en in maat 8 verschijnen de tonen e en b; dit zijn de eerste tonen van het eerste akkoord. Tien noten van het gespiegelde akkoord zien we in maten 10 – 13. Aan de ene kant is het stuk stevig gestructureerd door deze twee akkoorden; aan de andere kant lijkt het alsof de componist de melodielijnen en nieuwe akkoorden improviseert. Een muzikaal relevante vraag is: hoeveel verschillend akkoorden bestaan er die alle intervallen bevatten?

krachtig geworden dat werkelijk elke denkbare klank, met elk gewenst artificieel spectrum gegenereerd kan worden. Dit opent enorme mogelijkheden voor componisten. Ook is het experimenteren met auditieve perceptie zeer veel gemakkelijker geworden. In dit nieuwe onderzoeksgebied speelt wiskunde een grote rol alleen al bij het ontwerpen van de klanken.

Drie boeken over wiskunde en muziek

In bovenstaande historische schets zagen we het belang van wiskunde voor de muziek vanuit het oogpunt van de musicus. De hier besproken boeken richten zich op een algemeen, eventueel wiskundig onderlegd publiek, en ze zijn geschreven door wiskundigen. Wat is de betekenis van deze boeken?

From Pythagoras to Fractals

De modieuze titel verbergt een mooie verzameling artikelen met zeer veel nieuw materiaal. Het boek bestaat uit vier gedeelten, het eerste over muziek en wiskunde in de geschiedenis, twee delen over wiskundige structuren in muziek, en één deel over hedendaagse muziek, in het bijzonder over algoritmisch componeren.

De twee historische artikelen zijn prachtig. Het eerste, door Neil Bibby over stemming en temperament, geeft een gedetailleerd historisch overzicht van de verschillende stemsystemen vanaf de oudheid. Het artikel bevat een weelde aan kleine wetenswaardigheden. De annotatie had wel verzorgder gekund. De auteur vertelt ons bijvoorbeeld over Handel die een 31-toons orgel bespeelde in Nederland: we hadden graag geweten welk orgel dat geweest is.

Het tweede artikel beschrijft de manier waarop Keppler de harmonieleer uit de muziek gebruikte om de structuur van het universum en de bewegingen van de planeten te verklaren. In het artikel wordt ook beschreven hoe zijn werk *Harmonie Universelle* van invloed is geweest op de monnik Marin Mersenne en de Jezuiet Kircher.

Keppler verzamelde data die de bewegingen van de planeten ten opzichte van de zon beschreven. Deze gegevens koppelde hij aan de harmonieleer. Hij vond de verhoudingen tussen de snelheden van de planeten zo mooi, dat hij deze in resonanties probeerde te herformuleren. Voor ons lijkt dit nogal onzinnig, maar in zijn tijd waren dergelijke analogieën algemeen. Ook dit artikel bevat smakelijke details. Mersenne wijdde vijftien pagina's in zijn omvangrijke muziektheoretische tractaat aan de perfecte horoscoop van de musicus om daarna te concluderen dat horoscopen waardeloos zijn. Ondanks dergelijke uitwijdingen is dit werk van Mersenne van belang, al was het alleen al vanwege de vele unieke muziektranscripties die het bevat.

In het derde artikel, van Charles Taylor, worden fysische eigenschappen van instrumenten gekoppeld aan het spectrum van hun

Figuur 10 De openingsscène van The Sound of Music

geluid. Het is een lezenswaardig artikel, maar het onderwerp is veel te groot voor deze bundel. Het standaardwerk op dit gebied — echt interessant voor de fysisch geïnteresseerde lezer — is *The Physics of Musical Instruments* [9].

Het vierde artikel, van Ian Stewart, is de meest verbazingwekkende bijdrage. Het gaat over een Zweedse gitaarbouwer, niet in wiskunde getraind, die een opmerkelijk goede constructie uitvond om fretten op de gitaarhals te plaatsen. In 1743 probeerde hij zijn uitvinding te publiceren in de *Proceedings van de Zweedse Academie*. Jacob Faggot, een meetkundige, econoom en constitutioneel lid van de Academie berekende dat de maximale fout van de constructie 1,7 % bedroeg en verklaarde de methode inaccuraat. Het duurde tot 1957 voordat J.M. Barbour een fout in de driehoeksmeetkunde van Faggot ontdekte en zo de Zweedse gitaarbouwer eerherstel bezorgde. Het artikel legt de constructie uit, waarbij gebruik wordt gemaakt van de vergelijking van Pell en kettingbreuken.

Het vijfde artikel beschrijft de wetenschappelijke controverse die nog steeds bestaat omtrent de oorzaak van combinatietonen. Als iemand naar twee luide sinustonen met frequentie f_1 en f_2 luistert, is er een derde toon hoorbaar met frequentie $f_1 - f_2$: een voorbeeld van een combinatietoon. Helmholtz schreef het verschijnsel, dat plaatsvindt in het oor en niet in de lucht, toe aan de gekromde vorm van het tweedimensionale trommelvlies, dat kwadratisch niet-lineair gedrag veroorzaakt. In feite is het gecompliceerder en zijn verschiltonen onderwerp van hedendaags onderzoek. Een beschrijving van Helmholtz consonantietheorie besluit dit deel.

De hoofdstukken 6 en 7 behandelen symmetrie. Het artikel 'The geometry of music' van Wilfrid Hodges geeft een overzicht van alle mogelijke types symmetrie in muziek. Elementaire rotaties, spiegelingen en strookpatronen worden met voorbeelden uit de muziek besproken. Op verschillende plaatsen is het artikel erg oppervlakkig. Hij schrijft dat het woord 'spiegeling' in titels van menig twintigste-eeuws muziekstuk voorkomt, zoals *Reflets dans l'eau* van Debussy. Dergelijke opmerkingen geven het artikel een nodeloos triviaal karakter. De vraag waarom symmetrie zo overvloedig voorkomt in muziek wordt nauwelijks aangeroerd.

Het zevende artikel beschrijft de structuur van het zogenaamde 'change ringing'. Hier ligt het verband met grafentheorie voor de hand. Daarop volgt nog een kort artikel *Composing with numbers: sets, rows and magic squares* van Jonathan Cross, waarin de dodecafonische stijl van de tweede Weense school wordt uitgelegd.

Het minst overtuigende deel van het boek gaat over symmetrie en fractals. Zware terminologie wordt geïntroduceerd om een melodie te verschuiven, en dit alleen om op te merken dat het tweede thema van de Waldsteinsonate van Beethoven drie hele tonen is opgeschoven. De auteur laat na om op te merken dat in vrijwel elke andere sonate in grote terts het tweede thema vijf tonen (een kwint) opschuift. En juist dit maakt een enorm verschil.

In de Waldsteinsonate, in C grote terts, is het tweede thema in E-groot, waarmee vier kruisen worden toegevoegd: vier toonladdervreemde elementen. In de traditionele klassieke sonatevorm zou het tweede thema in G-groot staan, waarmee slechts één nieuwe toon wordt toegevoegd. Geen symmetrie en geen algebra, maar gewoon vier nieuwe tonen die ons naar een nieuwe wereld leiden.

De redacteuren van deze bundel hebben helaas de pretentieuze onzin niet doorzien.

The math behind the Music

Het eerste deel van het boek *The math behind the Music* bevat een waardevolle uiteenzetting over de oorsprong van toonhoogte en consonantie. Alles is eenvoudig geformuleerd, uitstekend voor de leek. In het bijzonder wordt de introductie van de sinusfunctie als unificerende bouwsteen van bron en ontvanger op een heldere manier verwoord met een minimum aan technische details.

Het is echt jammer dat de auteur deze eenvoud niet kan vasthouden in de rest van het boek. In de tweede helft, beginnend bij hoofdstuk 4, worden symmetriegroepen geïntroduceerd. Weer wordt het niet duidelijk wat deze werkelijk betekenen voor muziek. Het hoofdstuk over waarschijnlijkheidsrekening gaat slechts over het triviale onderwerp op hoeveel manieren een vast aantal muziekstukken is te rangschikken. Dit is onvoorstelbaar voor een uitgave van Cambridge University Press.

De auteur wijdt één enkele zin aan seriële muziek, die hij ziet als gevolg van dodecafonische muziek. Dit is een veel gehoorde opvatting die historisch niet correct is. Hij vervolgt: "Many composers found this [de seriële muziek] too rigid and confining. To relinquish all that regimentation and turn over the reins of chance seems like a liberation to some composers." Helaas vertelt hij er niet bij over welke componisten hij het heeft. De componist Xenakis, waar Hackleroad later aan refereert, is zijn stochastische compositietechniek in elk geval niet begonnen als reactie op seriële muziek.

Over deze componist weet de auteur ook nog te vertellen dat "Unfortunately, his writings about mathematical aspects of his music tend to be obscure, rather than clarify, his methods". Dit is een veel te hard oordeel over deze invloedrijke pionier: veel musici zijn blij dat hij zijn technieken en ideeën publiceerde in zijn boek *Musiques Formelles* (1962) en electronische muziek is zonder hem ondenkbaar.

Het ergste komt nog: in het hoofdstuk *Pattern, pattern, pattern* over harmonische sequensen, het tweede voorbeeld op pagina 94, bekritiseert hij het openingslied van de *Sound of Music*. Hij schrijft: "If that song were written in the key of C [...] its accompaniment would also begin with a C chord. That C persists throughout: 'The hills are alive with the sound of'. But on the word 'music' the harmony changes to a $B\flat$ chord. Although *The sound of music* is not really one of my favorite things, I will admit that the C–$B\flat$ progression works quite effectively in that opening passage." Voor elke musicus is het duidelijk, zelfs zonder partituur, dat het hier een C–B progressie betreft.

De B heeft namelijk een tegenovergestelde functie: de conventionele C–$B\flat$ progressie dwingt de melodie naar beneden, terwijl de B, de echte noot in het lied, onverwacht is en daarmee de melodie sterk naar boven dwingt, terug naar C. De auteur zou er goed aan doen de partituur te bestuderen, in plaats van minachtende opmerkingen te maken over populaire muziek.

Of het nu Xenakis is of The Sound of Music, Hackleroad heeft geen idee waar hij over schrijft.

Music, a Mathematical Offering

David Benson heeft met het schrijven van dit boek een nieuwe standaard gezet. De tekst stond al vele jaren gratis beschikbaar op internet; het veranderde vaak en werd steeds uitgebreid. Deze internetversie heb ik onder andere gebruikt bij een cursus die ik aan het Koninklijk Conservatorium in Den Haag heb gegeven.

Het boek is down to earth en tegelijkertijd idealistisch. Benson gaat vaak diep op zijn onderwerp in; toch verliest hij het volgende niet uit het oog: "Music is not mathematics. While we're discussing mathematical aspects of music, we should not lose sight of the evocative power of music as a medium of expression for moods and emotions. About the numerous interesting questions this raises, mathematics has little to say."

Hij voert ons langs de fysiologische verklaring voor de werking van het oor, de natuurkundige principes die ten grondslag liggen aan trillingen van een- en tweedimensionale oppervlakken. Er volgt een korte en duidelijke introductie in de Fouriertheorie, vanaf het begin al gekoppeld aan het spectrum van het geluid.

Het interessantste en ook uitgebreidste deel van het boek gaat over de verschillende verklaringen van consonantie. Benson doet

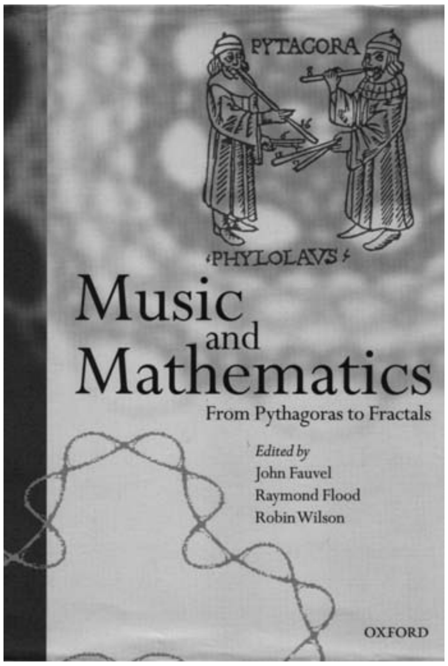
Foto: Physics Dept, Case Western Reserve University

Figuur 11 Helmholtz was vindingrijk in het ontwikkelen van instrumenten waarmee hij geluid kon bestuderen. Het hier afgebeelde object is bedoeld om lage tonen te kunnen onderscheiden. Op pagina 43 van [4] beschrijft hij deze resonator, die met de tuitvormige bovenkant in het oor dient te worden gezet. Het geluid komt door de cirkelvormige, open onderkant naar binnen. De tuitvormige bovenkant wordt ingesmeerd met hete was die men laat afkoelen totdat aanraking met het oor te verdragen is. Op deze manier ontstaat er een luchtdichte verbinding met het instrument. Op deze manier bestudeerde Helmholtz de laagste tonen, bijvoorbeeld in het geratel van koetswielen en in opspattend water.

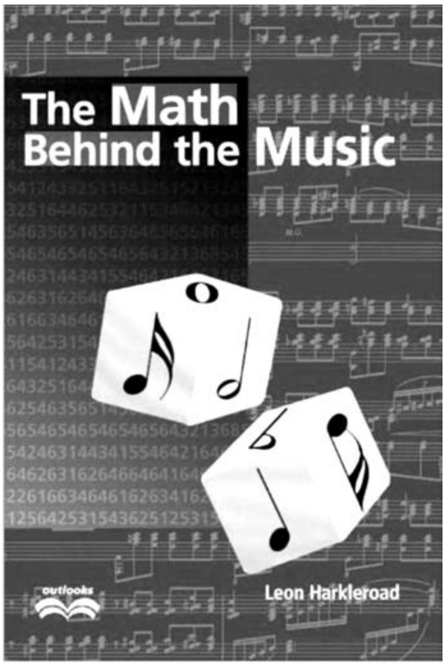
gedetailleerd verslag van de verschillende manieren waarop je kunt stemmen en consonante intervallen verkrijgt. Hij besteedt veel aandacht aan alternatieve stemmingen zoals de 43-toons stemming van Harry Partch. Andere onderwerpen zijn synthetisch gegenereerde tonen met een artificieel spectrum en verschillende akoestische illusies gegenereerd door de computer. Twee hoofdstukken over digitale synthesizers besluiten dit gedeelte.

Het laatste deel van het boek is gewijd aan symmetrie. Ook dit hoofdstuk brengt ons verder dan alle andere werken op dit gebied. Een aantal van de besproken fenomenen verscheen wel eerder in de literatuur, vooral in de *American Mathematical Monthly*. Burnsides lemma wordt gebruikt om het aantal echt verschillende twaalftoonsreeksen te berekenen (9985920). Dit werpt de vraag op hoeveel twaalftoonsreeksen er zijn die dezelfde eigenschappen hebben, zoals bijvoorbeeld geen tertsafstand, geen kleine secunde, of met een bepaald motief. Na lezing van het hoofdstuk is de lezer voldoende toegerust om deze problemen zelf op te lossen.

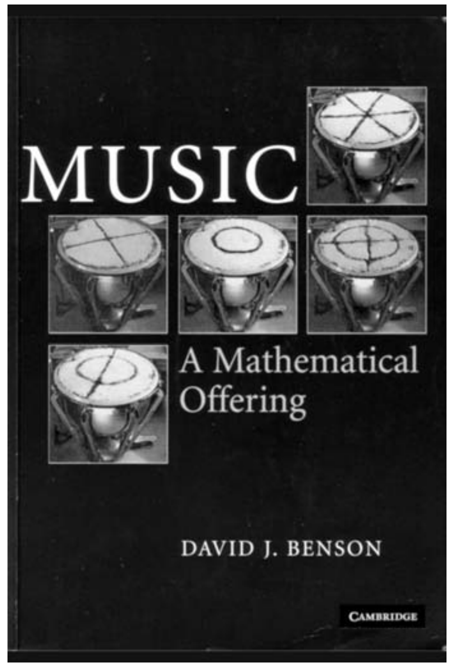
Eliot Carter compileerde voor eigen gebruik een atlas met daarin alle mogelijke akkoorden van drie tot en met twaalf tonen. Hij was in het bijzonder geïnteresseerd in twaalf-



John Fauvel, Raymond Flood, Robin Wilson editors, *Music and Mathematics: from Pythagoras to fractals*, Oxford University Press, Oxford, 2003.



Leon Harkleroad, *The Math behind the Music*, Cambridge University Press, New York, 2006.



David J. Benson, *Music, a mathematical offering*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

toonsakkoorden, die tevens de elf verschillende intervallen bevatten, zoals het eerste akkoord in het pianowerk *Night Fantasies* (zie figuur 11). Een dergelijk akkoord vind je niet zomaar: hoeveel bestaan ervan? Eliot Carter gebruikt zo'n akkoord om zijn muziek een overkoepelende structuur te geven. Tevens is het een rijke bron van motieven en kleinere akkoorden.

Het boek bevat een fantastische bibliografie. In de online versie zijn diverse items verrijkt met zijn persoonlijke commentaar. Dat zou ook interessant zijn voor andere wetenschappelijke boeken! Het is overigens begrijpelijk dat Cambridge Publishers deze commentaren heeft verwijderd, ook al was het leuk leesvoer: "A huge work. It doesn't go far enough with technical aspects", "Hard to understand and not very enlightening".

Samenvattend heeft David Benson een uitzonderlijk boek geschreven, dat ook gebruikt kan worden als beginpunt van onderzoek in allerlei richtingen. En nog belangrijker: het is goed te gebruiken voor professionele musici, zelfs als ze bijvoorbeeld niet alle Fourieranalyse begrijpen. Exacte informatie, die ook nog eens helder is opgeschreven. Het biedt voor musici een wereld aan mogelijkheden.

Referenties

1 Leon Harkleroad, *The Math behind the Music* (2006), Cambridge University Press, New York.

2 John Fauvel, Raymond Flood, Robin Wilson editors, *Music and Mathematics: from Pythagoras to fractals* (2003), Oxford University Press, Oxford.

3 David J. Benson, *Music, a mathematical offering* (2007), Cambridge University Press, Cambridge.

4 Hermann von Helmholtz, *On the Sensations of Tone* (1954), Dover; vertaling van: *Die Lehre von den Tonempfindungen* (1877).

5 W.J.M. Levelt, R. Plomp, 'Tonal Consonance and Critical Bandwidth', *Journal of the Acoustical Society of America* (1965), http://hdl.handle.net/2066/15398; W.J.M. Levelt, J.P. van de Geer, R. Plomp, 'Triadic Comparisons of Musical Intervals', *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology* **19**(2), (1966), pp. 163–179, http://hdl.handle.net/2066/15409 .

6 Jan van de Craats, Floris Takens, 'De juiste toon, de juiste stemming', *Nieuw Archief voor Wiskunde* (juni 2001), vijfde serie, deel 2, nummer 2, Leiden.

7 Website http://www.melafoundation.org/lmy.htm van La Monte Young waar cd's en dvd's van deze componist kunnen worden besteld.

8 Ton de Leeuw, *Music of the 20th Century* (2006), Amsterdam University Press, Amsterdam; translation of: *Muziek van de twintigste eeuw* (1964), Utrecht.

9 Neville H. Fletcher, Thomas D. Rossing, *The Physics of Musical Instruments* (2008), Springer, Corr. 5th printing edition.

10 Website http://bach.tuning.googlepages.com waar Bachs stemmingsinstructies voor *Das Wohltemperierte Klavier* worden besproken.