De derde wet

| Solicited Comments

In deze rubriek worden lezers door de redactie uitgenodigd te reageren op recent in dit blad verschenen artikelen.
Redacteur: Ferdinand Verhulst
e-mail: f.verhulst@uu.nl

Het onderstaande is een reactie op het artikel 'Wat reeksen zijn, is niet te zeggen' [1] van Hessel Pot.

Wat reeksen zijn, is niet te zeggen

Ik ben het helemaal eens met wat Pot naar voren brengt omtrent de onhoudbaarheid van de gangbare definities van 'reeks', maar ik schrijf deze reactie vanuit een ander gezichtspunt. Mij gaat het om de problemen van de student die met zo'n definitie geconfronteerd wordt.

Ik open met hetzelfde citaat uit het calculusboek van Stewart waarmee ook Pot zijn artikel begint:

"If we try to add the terms of an infinite sequence $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ we get an expression of the form

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

which is called an *infinite series* (or just a *series*)."

"Glashelder" suggereert Pot in de rol van advocaat van de duivel. En Stewart vindt het vermoedelijk inderdaad glashelder. Mijn eerste reactie is: "nonsens", en voor mij is de kous daarmee af; dat kan ik me permitteren. Dat kan niet de student die het vak nog moet leren en niet weet wat de bedoeling is. Die wordt geconfronteerd met een bewering waar kop noch staart aan te vinden is.

Want zo is het toch. Mijn "nonsens" is niet een opwelling van ongenoegen maar een oordeel. De definitie die Stewart geeft is voos, omdat de uitdrukking '$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$' zonder betekenis is. (Let wel, we hebben het niet over de som. Die komt pas later aan de orde, en $1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots$ is ook een reeks, al bestaat de som niet.)

Varianten op de passage van Stewart tref je aan in allerlei calculusboeken. Meestal directer, zoals "An infinite series is an expression of the form $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 \cdots + a_n + \cdots$", of helemaal lapidair als "Consider the infinite series $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$ which is also denoted by $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ or $\sum a_k$". Jawel, dit is de introductie van het begrip. Wat moet een student met zoiets?

In de praktijk hoeft hij er niets mee: De definitie speelt voor hem geen enkele rol. Als je maar weet wat "de reeks $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ heeft som s" betekent, is er niets aan gelegen wat een reeks voor een ding is. Net zoals je geen definitie hoeft te hebben voor vergelijking of variabele, als je ze maar herkent wanneer je ze tegenkomt.

Maar waar is de definitie dan goed voor? Net als Pot concludeer ik dat je hem beter kunt schrappen.

Zelf heb ik vele jaren een eerstejaars-analysecollege gegeven zonder het woord 'reeks' te gebruiken. In plaats van convergente reeksen heb je dan sommeerbare rijen, en alles is in orde. Een bonus is dat je het woord 'convergent' niet in twee betekenissen gebruikt. Om de studenten voor te bereiden op de boze wereld buiten het schoolplein, waar ze ongetwijfeld machtreeksen e.d. tegen zullen komen, dien je ze wel te vertellen hoe andere mensen met hun *taal* omspringen, maar dat doe je later, wanneer de *begrippen* verwerkt zijn.

Een andere oplossing is, het woord 'reeks' alleen in context te definiëren. Voor een gegeven rij $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ spreek je dan af wat je bedoelt met, bijvoorbeeld, de zin "de reeks $\sum a_n$ divergeert", zonder dat je aan het symbool $\sum a_n$ betekenis geeft.

In deze stijl komt in de literatuur ook wel voor dat 'reeks' niet zelfstandig gedefinieerd wordt, maar wel "de reeks die behoort bij de rij $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$". Meestal is dat dan de rij der partiële sommen. In principe kun je het zo doen, maar ik heb geen tekst gevonden die deze definitie geeft en er consequent mee omgaat. Logischerwijze is de derde term van de reeks $\sum a_n$ op deze manier $a_1 + a_2 + a_3$, maar in de boeken is hij steevast a_3.

Nu gaat het mij er niet om, de bestaande boeken in de hoek te zetten; wat ik wil graag weten is wat er in feite met onze studenten gebeurt. Daarom richt ik me hier tot de docenten die bij het calculus-onderwijs betrokken zijn. Hoe gaat u met dit probleem om? Gebruikt u teksten waarin reeksen wél goed ingevoerd worden? Of laat u een definitie achterwege? Of staat u heel anders tegenover de hele kwestie dan ik?

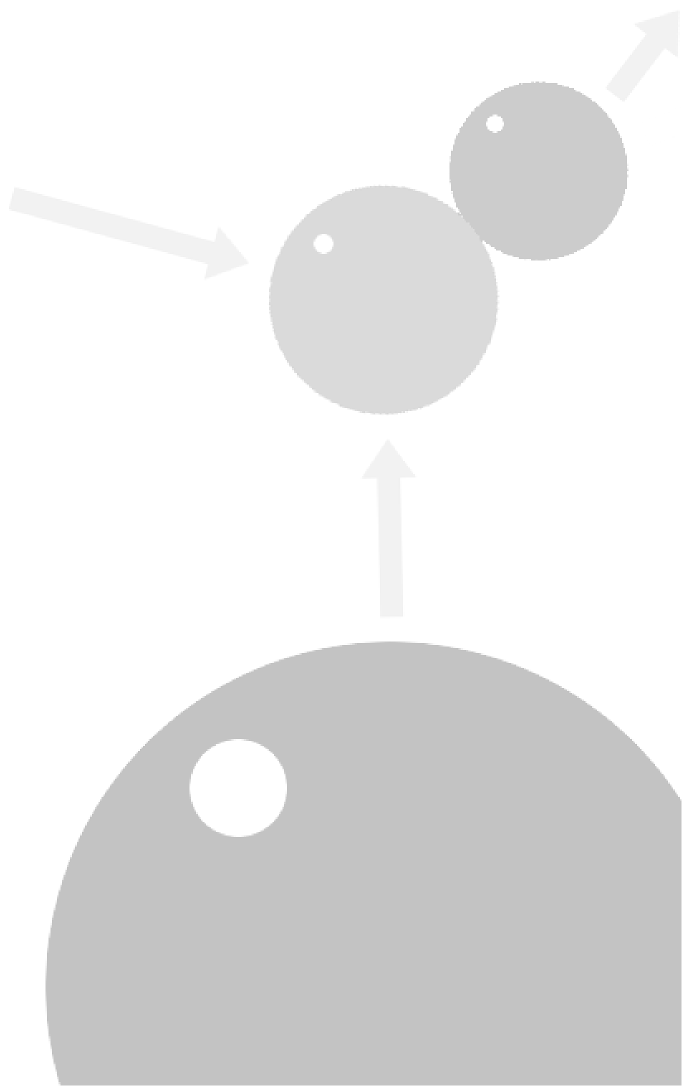
Ik kan de verleiding niet weerstaan om de opvattingen van menig calculusboek te illustreren door een zinnetje uit *Calculus for Engineers* van Donald Trim (blz. 651), al gaat dat over rijen en niet over reeksen: “Now that we know what it means for a sequence to have a limit [....] we can be more precise”, gevolgd door de definitie van ‘limiet’. Wat Trim bedoelt kan ik wel vermoeden. Wat hij ermee beoogt ontgaat me, maar dat geeft niet. Wat hij ermee bereikt is alleen dat de lezer zijn schouders ophaalt.

Arnoud van Rooij (Radboud Universiteit Nijmegen)

Referenties

1. H. Pot, ‘Wat reeksen zijn, is niet te zeggen’, *Nieuw Archief voor Wiskunde* **9**, nr 4 (2008), pp. 285–286.

Het onderstaande is een voortzetting van de discussie over zinvol computergebruik in wiskundeonderwijs. Zie NAW-artikelen ‘Computergebruik en demathematisering’ van Henk Broer [1] en ‘Dynamische systemen: aanzet tot een curriculum’ van Edwin Savelsbergh [2], de reacties van Paul Bezembinder en Joost Hulshof in het NAW-maartnummer van 2008, en de reactie van Edwin Savelsbergh in het NAW-decembernummer van 2008.



Dynamisch modelleren: gevaarlijke aandacht voor de computer

De kritiek die ik heb geuit op de Drijvers/Savelsbergh module is al eerder op een voorlichtingsbijeenkomst voor leraren door Drijvers samengevat als "teveel ICT". Ook Savelsbergh gebruikt in zijn brief in het decembernummer van NAW nu deze dooddoener om inhoudelijke discussie te vermijden. Ik memoreer dat een eerdere nota over Dynamisch Modelleren, besproken in een bijeenkomst op de VU met Savelsbergh, vanaf regel 3 over ICT ging.

Het is niet zo dat ik of wij een angst voor de computer hebben. Maar wat wij constateren is dat de heren niet meer kunnen denken over de mogelijkheid om iets zonder de computer te doen. En dat is een gevaarlijke ontwikkeling, op elk niveau waarop wetenschap bedreven wordt, of je nou twee of honderd bent, of ergens daartussen; scholier of hoogleraar; in onderwijs of in onderzoek.

Wat Dynamisch Modelleren zelf betreft, Dynamisch Modelleren, Dynamische Systemen en Systeem Dynamica zijn verschillende dingen. Zoals de onderwijsmodules van Drijvers en Savelsbergh er nu uitzien, gaat alle aandacht naar het gebruik van computerprogrammatuur. Dat vloeit voort uit de eerder door Drijvers verkondigde mening dat Systeem Dynamica de wereldstandaard is op het gebied van Dynamisch Modelleren. Ach ja. ‘Knoppen-drukken’ is niet iets waar je wiskunde of wetenschap van leert, en het leidt niet tot Inzicht waarmee later het het spelen met de computer wel stimulerend kan worden. Ook niet bij *Natuur, Leven en Technologie*, waarvoor deze module dankzij het onder één hoedje spelen op het Freudenthal Instituut nu geaccrediteerd is.

Joost Hulshof (Vrije Universiteit)

Referenties

1. H. Broer, ‘Computergebruik en demathematisering’, *Nieuw Archief voor Wiskunde* **8**, nr 3 (2007), pp. 201–205.
2. E. Savelsberg, ‘Dynamische systemen: aanzet tot een curriculum’, *Nieuw Archief voor Wiskunde* **8**, nr 3 (2007), pp. 207–213.