Wieb Bosma
*Radboud Universiteit Nijmegen*
*Institute for Mathematics, Astrophysics and Particle Physics*
*Postbus 9010*
*6500 GL Nijmegen*
*bosma@math.ru.nl*

## Een rubriek van P.H. Schoute in Eigen Haard, 1882–84

# Wiskundige Verpoozingen

**Het gebeurt niet zo heel vaak dat je bij wiskundig onderzoek stuit op verwijzingen naar Nederlandstalige artikelen. Wieb Bosma vond bij toeval binnen een paar jaar relevante verwijzingen naar twee artikelen van dezelfde auteur. Beide in hetzelfde obscure — althans voor wiskundigen — tijdschrift Eigen Haard.**

Tijdens een (vergeefse) poging het mijne bij te dragen aan de analyse van de Torens van Hanoi, vond ik een verwijzing [1] naar een artikel van P.H. Schoute in het tijdschrift *Eigen Haard*. Uit de context van de verwijzing was wel duidelijk wat de auteur in dat artikel had gedaan, en ik nam niet de moeite om deze referentie na te trekken. Maar toen ik een paar jaar later bij het voorbereiden van een college Discrete Wiskunde een verwijzing naar een ander artikel van Schoute vond (over koninginnen op een schaakbord [2]), weer in *Eigen Haard*, besloot ik eens op zoek te gaan naar die artikelen, naar het tijdschrift met die intrigerende naam, en naar hun auteur.

### Eigen Haard

Volgens de catalogus van de Nijmeegse universiteitsbibliotheek verscheen *Eigen Haard*, met als ondertitel Geïllustreerd Volkstijdschrift, van 1875 tot 1941 en is de eerste helft van die jaargangen er vrijwel compleet aanwezig. Dat was goed nieuws, want mijn verwijzingen waren naar de jaren 1882 en 1884. Het kostte me dan ook vrij weinig moeite om elf bijdragen van P.H. Schoute te lokaliseren (en ik ben er vrij zeker van dat dit de complete verzameling is). Vanwege aard en omvang van het tijdschrift verschenen sommige bijdragen in twee delen, elk van twee of drie bladzijden. Op de laatste bijdrage na — juist degene over de Torens van Hanoi — verschenen alle afleveringen als rubriek onder de titel ‘Wiskundige Verpoozingen’; de eerste zeven waren nog genummerd I–VII.

### Wiskundige Verpoozingen

De eerste Verpoozing, verschenen in aflevering 24 van jaargang 18 (1882), begint zo:

“Onder het groot aantal lezers van *Eigen Haard* zullen er waarschijnlijk velen gevonden worden, die in het praedicaat ‘wiskundige’ van den titel van dit stukje aanleiding vinden om het zonder eenige aarzeling over te slaan. Want ook nog in dezen tijd wordt alles, wat zich als wiskundig komt aanmelden, door het groote publiek onverbiddelijk uit de conversatiezaal gebannen en naar de studeerkamer verwezen. In de schatting van velen is de wiskunde nog steeds “een moderne zwarte kunst, alleen onder de bevatting van wezens met een afzonderlijken aanleg”. Zeker is het hier de plaats niet te onderzoeken, wat de oorzaak is van dit verschijnsel en hoe de nadeelige werking er van kan worden tegengegaan. Veeleer ligt het — en het hoofdwoord ‘verpoozingen’, dat op het praedicaat ‘wiskundige’ volgt, wijst dit reeds aan — in mijne bedoeling te ontspannen; alleen zoek ik daarbij mijn materiaal op wiskundig terrein.”

De volgende alinea maakt direct duidelijk waar het materiaal op gebaseerd is, en ook de ambitie van de auteur om iets nieuws toe te voegen:

“Aanleiding tot het schrijven van dit stukje was mij de verschijning van een zeer lezenswaardig werk: Récréations mathématiques (wiskundige uitspanningen) in het begin van dit jaar. De schrijver, E. Lucas, leeraar aan een der instellingen van Parijs, is boven mijn lof verheven. Voor zoover ik het genoegen had dezen wiskundige bij onze samenkomsten te leeren kennen, is zijn boek de getrouwe afspiegeling van geheel zijn wezen, tintelend van vernuft en tot in de uiterste consequentie de volkomen uitdrukking van den franschen landaard. In verschillende hoofdstukken worden de schijnbaar meest verschillende, maar toch in werkelijkheid nauw met elkaar samenhangende onderwerpen op een frissche en ongedwongen wijze behandeld; telkens blijkt het talent van den schrijver om ingewikkelde zaken helder, en bijna altijd voor het groote publiek verstaanbaar, uiteen te zetten opnieuw. Alleen met zulk een gids durf ik het wagen wiskundige beschouwingen, zijn het dan ook verpoozingen, aan *Eigen Haard* ter plaatsing aan te bieden. Echter zal ik hem niet blindelings kunnen volgen. Vooreerst dwingt de ruimte, die ik mij stel, tot besnoeiing. Dan is het noodig enkele onderwerpen, die ons als Hollanders minder belang inboezemen door andere van meer nationalen aard te vervangen of weg te laten. En eindelijk wensch ik aan zijne beschouwingen enkele nieuwe hoofdstukken toe te voegen.”

Schoute wijdt tenslotte een alinea aan het nut van deze beschouwingen. Ik citeer deze inleiding zo uitvoerig vanwege de herkenbaarheid, en om iets van de in onze ogen misschien wat archaïsche, maar toch rake stijl te laten zien:

“Hebben deze beschouwingen haar nut? Het zij mij vergund met een aanhaling van onzen schrijver hierop te antwoorden: ‘Waaraan heeft men al niet het verwijt toegevoegd geen rechtstreeksch nut op te leveren?’ Toen een fransch wiskundige een belangrijke toelichting gegeven had op een geschrift der oudheid, vroeg Malherbe: “Of hierdoor nu het brood goedkooper worden zou?” In de gulden eeuw van het treurspel riep Roberval bij het uitgaan van den schouwburg: “Maar wat bewijst dit spel?” Altijd waren er, en zullen er geleerden zijn, die de kracht der verbeelding miskennen, en dichters, die vragen waartoe de wetenschap dient. En dat is wel gelukkig. Onderstelt niet de verdeeling van den arbeid, deze laatste vrucht der beschaving, en de ontwikkeling van den hoofdaanleg, dit grondgebod van den modernen schoonheidszin, in het individu onbekwaamheden en verblindingen, die voor onze hersenen, even als het ledige vakje bij het *Vijftienspel*, de ruimte uitmaken, welke tot ontwarring en schikking der denkbeelden noodig is, de ruimte zonder welke al de verleiding der stelsels, al de werkkracht der onverdraagzaamheden, al de wonderen der specialiteiten zich zouden oplossen in de stelselloosheid van den onnoozele en de gevoelloosheid van den redelooze? Maar laat ik thans tot het onderwerp zelf overgaan.”

**Boten en bruggen**

In de eerste Verpoozing, getiteld ‘De overvaart’, behandelt Schoute enkele problemen van het type *de wolf, de geit, en de kool*, ook nu nog in zwang als puzzel. Beslist onaanvaardbaar zou het tegenwoordig echter in een publiekstijdschrift zijn om de oplossing in Latijnse versregels te vervatten en er bij op te merken dat het geheel overbodig is daaraan een vertaling toe te voegen. Schoute deed dat met een variatie van de puzzel, over het overvaren van drie echtparen met jaloerse mannen in een roeibootje. Hij maakt van dit probleem vervolgens wiskunde, door de vraag op te werpen hoeveel personen het bootje moet kunnen bevatten om $n$ paren over te zetten zonder dat vrouwen bij afwezigheid van hun man in gezelschap van een vreemde man verkeren. Met als variant een versie waar in de rivier een eiland kan worden aangedaan; in dat geval volstaat altijd een bootje met maar twee zitplaatsen! En het kan altijd met $7(n-1)$ vaarten ... maar of dit minimaal is laat Schoute in het midden, want ‘ik mag niet te veel van het geduld van mijn lezers vergen’. Maar, werpt Schoute in deel II op, “Is dat nu wiskunde? [...] behooren zulke raadseltjes niet eerder in de kinderkamer thuis?”. Het antwoord dat hij zelf geeft is dat hij enerzijds eenvoudig wil beginnen en allengs ingewikkelder onderwerpen zal aansnijden “zonder de grenzen van het gewone gezond verstand, dat geen bijzondere ontwikkeling op het gebied van de ‘moderne kaballa’ bezit, te overschrijden”. Anderzijds wijst hij op een grote geest als Euler, die zich hier niet te goed voor achtte. Daarmee een mooi bruggetje leggend naar het onderwerp van deze Verpoozing: graphentheorie, in de vorm van Hamiltoncykels en het Koningsberger bruggenprobleem, het tekenen van figuren zonder het potlood van papier te halen, en de vraag over het minimale aantal knopen dat bij het ontwarren van een getekende Gordiaanse knoop overblijft — maar die vraag “voert óf op het gebied der hoogere wiskunde, [...] óf op dat der dameshandwerken”.

**Dwalen en toveren**

Voortdurend is duidelijk dat Schoute niet aarzelt over de geschiedenis — klassiek of van de wiskunde — te beginnen, of over onze nationale identiteit. Hij citeert beroemde auteurs, en rept over diepgang, nut en bewijzen van zijn wiskunde. Zo leidt hij ook de derde aflevering in — waarin hij bewijst dat het in elk doolhof mogelijk is een weg te vinden die alle paden in het doolhof in beide richtingen precies één maal doorloopt — met een uitvoerige beschouwing over de historie van doolhoven, inclusief een beschrijving van het gangenstelsel onder de Maastrichtse Sint Pietersberg. De, als algoritme geformuleerde, oplossing laat “uit theoretisch opzicht niets te wensen over”. In de vierde Verpoozing gaat het over magische vierkanten, ook nu weer populair. Uitgangspunt is het dan juist een eeuw eerder verschenen fameuze artikel (in het Frans) van Euler in de *Verhandelingen van het Zeeuwsch Genootschap*. “Zeker is het een merkwaardig feit dat een in Petersburg woonachtige Duitser zich, ter plaatsing van zijn fransch geschrift, tot een sedert korten tijd in een der kleinere steden van ons land opgericht genootschap wendt.” Kom daar nu reis om, verzucht Schoute met Stastok van Beets; “Waarschijnlijk is het verschijnsel nog een naflikkering van het licht waarmeê de goede naam van ons volk op elk gebied van ontwikkeling vroeger naar buiten heeft gestraald.”

**Paarden en dames**

In deel V gaan de beschouwingen verder met de paardesprong: is het mogelijk een ‘gesloten kringloop’ over het hele schaakbord te maken met een paard? en in deel VI gaat het over het probleem acht koninginnen zo op het schaakbord te plaatsen dat zij elkaar niet aanvallen. In de eerste helft beschrijft Schoute, onder verwijzing naar brieven van Gauss, de symmetrieën en het aantal verschillende oplossingen; in het tweede deel beschrijft hij een paar methoden om alle oplossingen te bepalen, waaronder het backtracken. “Zo heeft Laquière een kind op een achtermiddag al de oplossingen laten opschrijven, en bij het nazien waren er maar 3 fouten in; een oplossing was weggelaten en in twee waren de cijfers onjuist neergezet.”, Schoute geeft alle (92) verschillende oplossingen op het gewone $8 \times 8$ schaakbord, en past één methode ook toe op het $9 \times 9$ schaakbord, met als resultaat het aantal van 348 verschillende oplossingen. Dit aantal moest in de rubriek Correspondentie later nog gecorrigeerd worden tot 352, maar niettemin: het schijnt een primeur voor Eigen Haard geweest te zijn (!) en het wordt ook nu nog geciteerd in de vakliteratuur.

**Eenzaam en tweetallig**

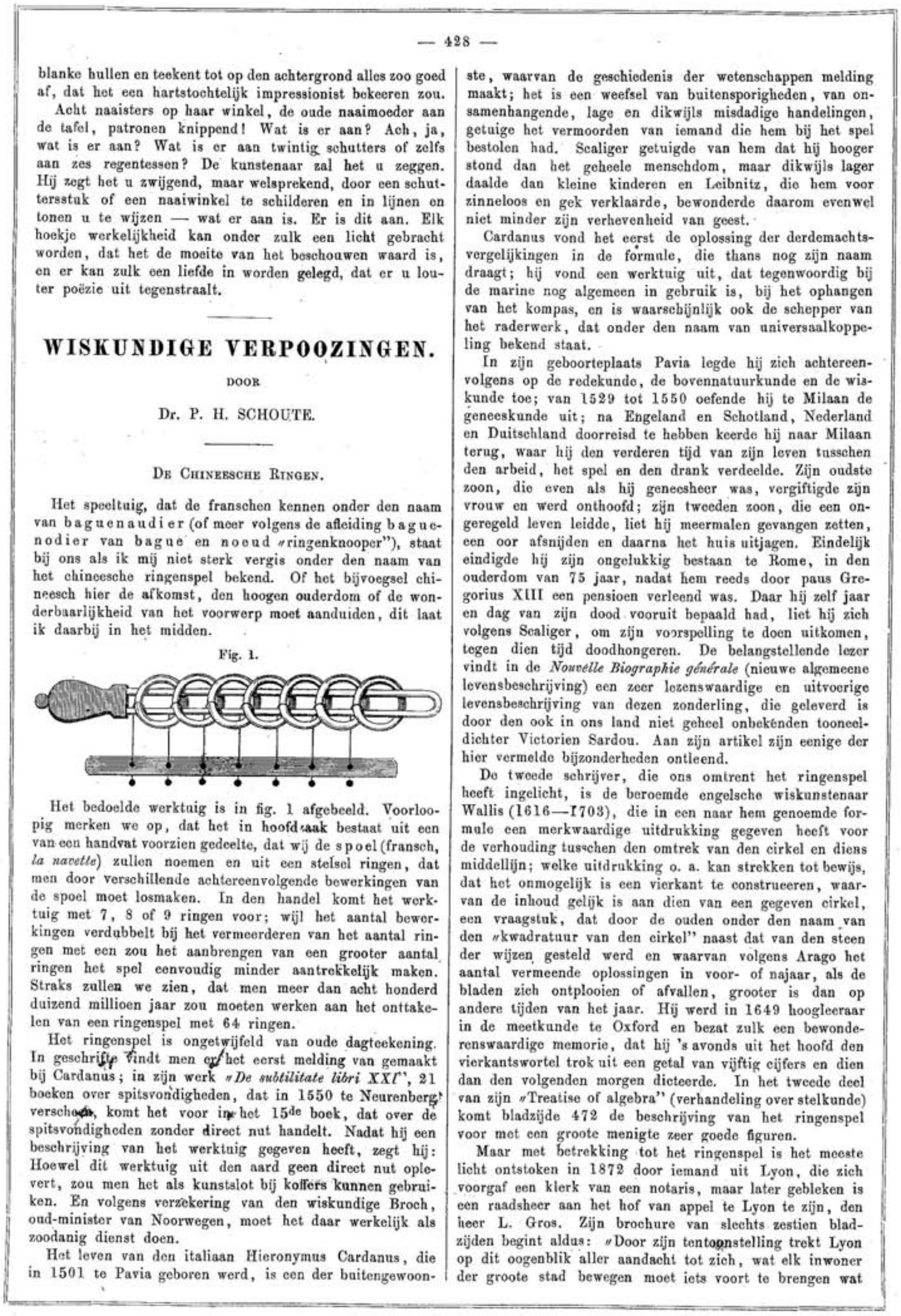
In zijn behandeling van het *eenzaamheidsspel*, tegenwoordig meestal met *Solitaire* aangeduid, wordt naar een artikel van Leibniz verwezen, om te laten zien dat het in ieder geval in het begin van de achttiende eeuw in Europa bekend was. Het eerste deel bestaat verder uit een groot aantal opgaven met oplossingen, waarin een deel van het bord gebruikt wordt, of het doel is een bepaald patroon over te laten. De tweede aflevering van Verpoozing VII beschrijft dan uitvoerig alle oplossingen van het hele spel, met enkele varianten in de bordvorm. Overigens zonder details van de afleidingen te geven, want “hoe vernuftig de theorie van het spel ook door wiskundigen van naam als wijlen Reiss en Hermay, een kapitein bij het fransche leger, moge behandeld zijn, zoo moet ik mij hier toch het genoegen ontzeggen deze beschouwingen te ontwikkelen; want de ontwikkeling dezer theorie zou mij noodzaken te veel te vergen van het voorstellingsvermogen der lezers van *Eigen Haard*”. Er volgen dan 2 verwijzingen voor de ‘wiskundi-

**Figuur 1** P.H. Schoute, geschilderd door Thérèse van Duyl-Schwartze in 1911. Het schilderij hangt in het Academiegebouw van de Rijksuniversiteit Groningen.

ge lezer'. In de achtste rubriek, *Het tweetallig talstelsel* worden enkele historische opmerkingen bij andere dan het decimale stelsel gemaakt. Er wordt ook uitgelegd hoe de kruidenier met een balansweegschaal en gewichtjes van $3^n$ gram (voor $n = 0, 1, 2, \ldots$) alle mogelijke gewichten in grammen kan bepalen (met andere woorden: hoe het drietallig stelsel met cijfers $-1, 0, 1$ werkt) en hoe de melkboer met drie kannen, waarvan de inhouden opeenvolgende termen uit de Fibonacci reeks zijn, door overgieten elke gehele inhoudsmaat kan bepalen. Afgezien van de context (melkboer, balansweegschaal) die in Schoutes expositie een ondergeschikte rol speelt, een zelfs nu voor de man in de straat volkomen heldere uitleg! Ook de 'volmaakte' getallen (wij noemen zulke getallen, die gelijk zijn aan de som van hun echte delers, nu meestal 'perfect') komen in deze drie pagina's aan bod, omdat hun binaire schrijfwijze bestaat uit $p$ enen gevolgd door $p-1$ nullen, voor zekere priemgetallen $p$ (dat wil zeggen: de even volmaakte getallen zien er noodzakelijkerwijs zo uit, er zijn geen oneven voorbeelden bekend). Het lijstje $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31$ van Schoute geeft de stand van zaken rond de tijd van het verschijnen van de rubriek weer, hoewel Pervouchine juist in 1883 had laten zien dat ook $p = 61$ tot het lijstje behoort, omdat $2^{61} - 1$ priem is. In feite had Lucas, met een mooie, later naar hem en Lehmer vernoemde methode, in 1877 ook laten zien dat $p = 127 = 2^7 - 1$ tot het lijstje behoort, maar hij was daar zelf niet eens helemaal door overtuigd, omdat hij de grote berekening slechts één keer had voltooid. Schoute geeft het verband tussen de primaliteit van $2^p - 1$ en het volmaakt zijn van $2^{p-1}(2^p - 1)$ zelfs helemaal niet, behalve in het intrigerende zinnetje: "Ook zou het stelsel, wanneer men tegenwoordig niet de bewonderenswaardige rekenmachine van Thomas (van Kolmar) bezat, zich veel gemakkelijker dan ieder ander tot het samenstellen van zulk een werktuig leenen. En bij het zoeken van groote ondeelbare getallen heeft het groote diensten bewezen." De arithmometer van Thomas de Colmar was de eerste in serie (van enige omvang) geproduceerde rekenmachine: er kon mee worden opgeteld, afgetrokken, vermenigvuldigd en, met wat meer moeite, gedeeld. Een exemplaar bevindt zich in het Museon in Den Haag. Ook Van Schooten wordt nog even genoemd, als vinder van twee paren bevriende getallen (die elkaars som van echte delers zijn), hoewel de paren al door Fermat en Descartes, en nog veel eerder door Arabische wiskundigen, gevonden waren.

### Chinezen en schuiven

Eigenlijk is die hele achtste rubriek bedoeld als inleiding op de volgende, over De Chineesche Ringen. Dit speelgoed bestaat uit een handvat met een spoel en daarop een aantal van $n$ ringen, die via staafjes aan een plankje vastgemaakt zijn. Doel is om de ringen, die via de staafjes aan elkaar en de spoel geschakeld zijn, los te maken. In 1872 had Gros laten zien hoe de beginstand van de puzzel zich laat vertalen naar een binair geschreven getal $N$ van $n$ bits (namelijk $1010\cdots$). Het oplossen ervan bestaat uit het doorlopen van standen corresponderend met $N$ tot en met de stand corresponderend met 0, in $N$ stappen dus. En passant vond Gros uit wat later de Graycode is gaan heten: een Hamiltonpad in de $n$-dimensionale kubusgraaf, waarin de hoekpunten corresponderen met $n$-tallen bits, en twee hoekpunten verbonden zijn dan en slechts dan als hun binaire schrijfwijze op precies één plaats verschilt. Aan de geschiedenis van dit spel hangt Schoute nog enkele beschouwingen over Cardano en Wallis op. Het *Vijftienspel*, dat eerst in Amerika, en kort daarna in Europa, rond 1880 kennelijk een enorme rage vormde, is het bekende schuifpuzzeltje met 15 genummerde vierkante blokjes en 1 open vakje in een $4 \times 4$ opstelling. "Al brengt nu ook de amerikaansche geest van humbug en reclame onze lachspieren in beweging, wanneer we in de bladen van de nieuwe wereld lezen, dat het vruchteloos zoeken naar de oplossing van het spel sommigen



— 428 —

blanke hullen en teekent tot op den achtergrond alles zoo goed af, dat het een hartstochtelijk impressionist bekeeren zou.

Acht naaisters op haar winkel, de oude naaimoeder aan de tafel, patronen knippend! Wat is er aan? Ach, ja, wat is er aan? Wat is er aan twintig schutters of zelfs aan zes regentessen? De kunstenaar zal het u zeggen. Hij zegt het u zwijgend, maar welsprekend, door een schuttersstuk of een naaiwinkel te schilderen en in lijnen en tonen u te wijzen — wat er aan is. Er is dit aan. Elk hoekje werkelijkheid kan onder zulk een licht gebracht worden, dat het de moeite van het beschouwen waard is, en er kan zulk een liefde in worden gelegd, dat er u louter poëzie uit tegenstraalt.

## WISKUNDIGE VERPOOZINGEN.

DOOR

Dr. P. H. SCHOUTE.

De Chineesche Ringen.

Het speeltuig, dat de franschen kennen onder den naam van baguenaudier (of meer volgens de afleiding baguenodier van bague en noeud »ringenknooper"), staat bij ons als ik mij niet sterk vergis onder den naam van het chineesche ringenspel bekend. Of het bijvoegsel chineesch hier de afkomst, den hoogen ouderdom of de wonderbaarlijkheid van het voorwerp moet aanduiden, dit laat ik daarbij in het midden.

Fig. 1.

Het bedoelde werktuig is in fig. 1 afgebeeld. Voorloopig merken we op, dat het in hoofdzaak bestaat uit een van een handvat voorzien gedeelte, dat wij de spoel (fransch, *la navette*) zullen noemen en uit een stelsel ringen, dat men door verschillende achtereenvolgende bewerkingen van de spoel moet losmaken. In den handel komt het werktuig met 7, 8 of 9 ringen voor; wijl het aantal bewerkingen verdubbelt bij het vermeerderen van het aantal ringen met een zou het aanbrengen van een grooter aantal ringen het spel eenvoudig minder aantrekkelijk maken. Straks zullen we zien, dat men meer dan acht honderd duizend millioen jaar zou moeten werken aan het onttakelen van een ringenspel met 64 ringen.

Het ringenspel is ongetwijfeld van oude dagteekening. In geschriften vindt men er het eerst melding van gemaakt bij Cardanus; in zijn werk »*De subtilitate libri XXI*", 21 boeken over spitsvondigheden, dat in 1550 te Neurenberg verscheen, komt het voor in het 15de boek, dat over de spitsvondigheden zonder direct nut handelt. Nadat hij een beschrijving van het werktuig gegeven heeft, zegt hij: Hoewel dit werktuig uit den aard geen direct nut oplevert, zou men het als kunstslot bij koffers kunnen gebruiken. En volgens verzekering van den wiskundige Broch, oud-minister van Noorwegen, moet het daar werkelijk als zoodanig dienst doen.

Het leven van den italiaan Hieronymus Cardanus, die in 1501 te Pavia geboren werd, is een der buitengewoonste, waarvan de geschiedenis der wetenschappen melding maakt; het is een weefsel van buitensporigheden, van onsamenhangende, lage en dikwijls misdadige handelingen, getuige het vermoorden van iemand die hem bij het spel bestolen had. Scaliger getuigde van hem dat hij hooger stond dan het geheele menschdom, maar dikwijls lager daalde dan kleine kinderen en Leibnitz, die hem voor zinneloos en gek verklaarde, bewonderde daarom evenwel niet minder zijn verhevenheid van geest.

Cardanus vond het eerst de oplossing der derdemachtsvergelijkingen in de formule, die thans nog zijn naam draagt; hij vond een werktuig uit, dat tegenwoordig bij de marine nog algemeen in gebruik is, bij het ophangen van het kompas, en is waarschijnlijk ook de schepper van het raderwerk, dat onder den naam van universaalkoppeling bekend staat.

In zijn geboorteplaats Pavia legde hij zich achtereenvolgens op de redekunde, de bovennatuurkunde en de wiskunde toe; van 1529 tot 1550 oefende hij te Milaan de geneeskunde uit; na Engeland en Schotland, Nederland en Duitschland doorreisd te hebben keerde hij naar Milaan terug, waar hij den verderen tijd van zijn leven tusschen den arbeid, het spel en den drank verdeelde. Zijn oudste zoon, die even als hij geneesheer was, vergiftigde zijn vrouw en werd onthoofd; zijn tweeden zoon, die een ongeregeld leven leidde, liet hij meermalen gevangen zetten, een oor afsnijden en daarna het huis uitjagen. Eindelijk eindigde hij zijn ongelukkig bestaan te Rome, in den ouderdom van 75 jaar, nadat hem reeds door paus Gregorius XIII een pensioen verleend was. Daar hij zelf jaar en dag van zijn dood vooruit bepaald had, liet hij zich volgens Scaliger, om zijn voorspelling te doen uitkomen, tegen dien tijd doodhongeren. De belangstellende lezer vindt in de *Nouvelle Biographie générale* (nieuwe algemeene levensbeschrijving) een zeer lezenswaardige en uitvoerige levensbeschrijving van dezen zonderling, die geleverd is door den ook in ons land niet geheel onbekénden tooneeldichter Victorien Sardou. Aan zijn artikel zijn eenige der hier vermelde bijzonderheden ontleend.

De tweede schrijver, die ons omtrent het ringenspel heeft ingelicht, is de beroemde engelsche wiskunstenaar Wallis (1616—1703), die in een naar hem genoemde formule een merkwaardige uitdrukking gegeven heeft voor de verhouding tusschen den omtrek van den cirkel en diens middellijn; welke uitdrukking o. a. kan strekken tot bewijs, dat het onmogelijk is een vierkant te construeeren, waarvan de inhoud gelijk is aan dien van een gegeven cirkel, een vraagstuk, dat door de ouden onder den naam van den »kwadratuur van den cirkel" naast dat van den steen der wijzen gesteld werd en waarvan volgens Arago het aantal vermeende oplossingen in voor- of najaar, als de bladen zich ontplooien of afvallen, grooter is dan op andere tijden van het jaar. Hij werd in 1649 hoogleeraar in de meetkunde te Oxford en bezat zulk een bewonderenswaardige memorie, dat hij 's avonds uit het hoofd den vierkantswortel trok uit een getal van vijftig cijfers en dien dan den volgenden morgen dicteerde. In het tweede deel van zijn »Treatise of algebra" (verhandeling over stelkunde) komt bladzijde 472 de beschrijving van het ringenspel voor met een groote menigte zeer goede figuren.

Maar met betrekking tot het ringenspel is het meeste licht ontstoken in 1872 door iemand uit Lyon, die zich voorgaf een klerk van een notaris, maar later gebleken is een raadsheer aan het hof van appel te Lyon te zijn, den heer L. Gros. Zijn brochure van slechts zestien bladzijden begint aldus: »Door zijn tentoonstelling trekt Lyon op dit oogenblik aller aandacht tot zich, wat elk inwoner der groote stad bewegen moet iets voort te brengen wat

**Figuur 2** Chinese Ringen

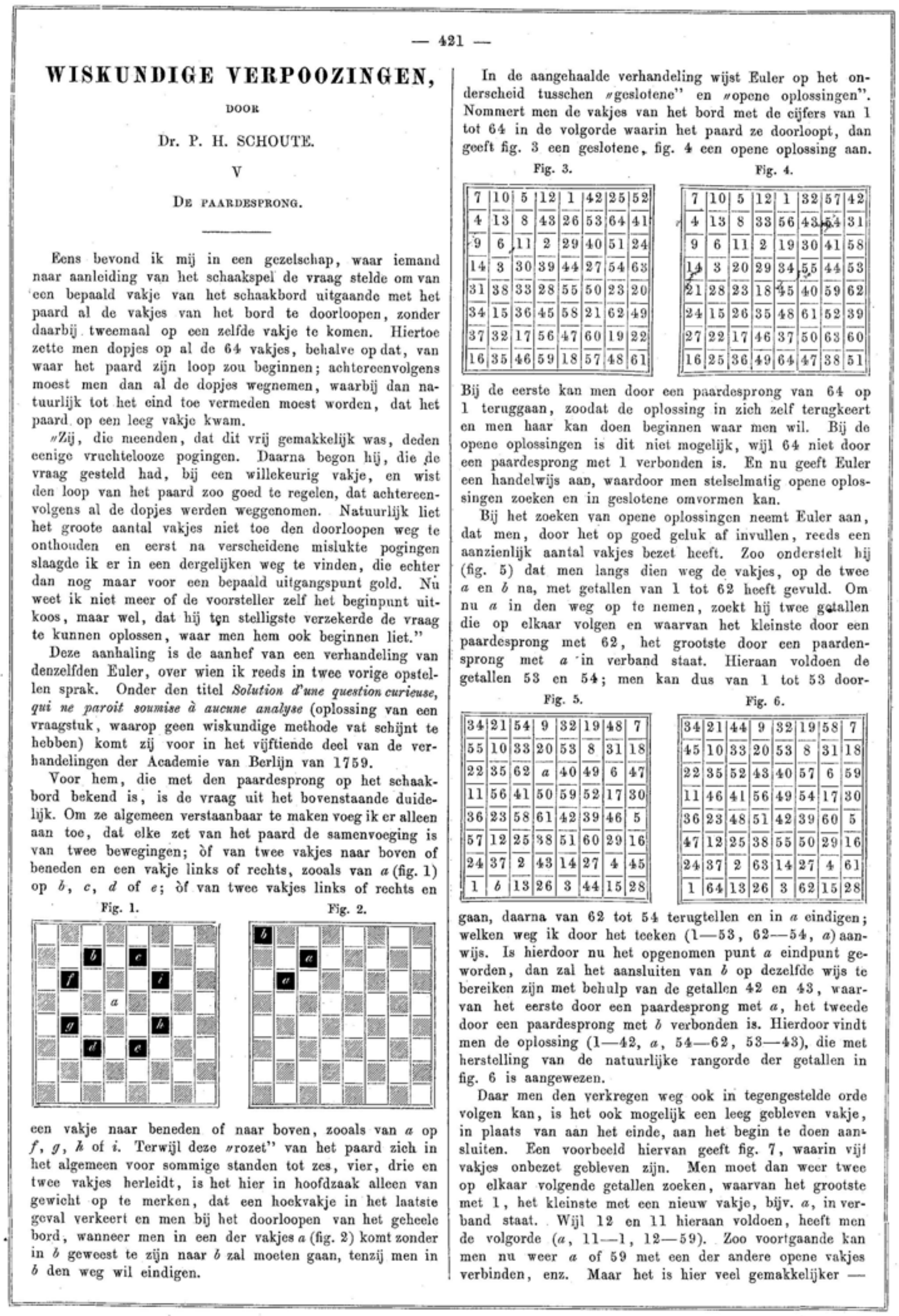
het verstand beneveld heeft, — iets wat m.i. een twijfelachtige aanbeveling voor een spel genoemd mag worden, — zeker is het, dat het menigeen eenige uren hoofdbrekens heeft gekost.” Schoute beschrijft hoe de oplossing van de puzzel gevonden kan worden, en bewijst (door een invariant, het teken, aan te geven) dat precies de helft van alle mogelijke beginstanden door schuiven tot de natuurlijke oplossing (met een leeg vakje aan het eind) gebracht kan worden. In het vervolg van dit artikel bespreekt hij vele varianten (van rechthoeken tot meer bizarre vormen opgebouwd uit vierkante blokjes), en eindigt met “Deze eindspelen voeren tot het moeielijkste der wiskundige vraagstukken, die met ons spel in verband staan. Dit bestaat in het bepalen van den stand der blokjes waarbij het kleinste aantal zetten, dat men ter verkrijging der natuurlijke volgorde noodig heeft, zoo groot mogelijk is.” Deze laatste opmerking legt een prachtig verband met een soortgelijke puzzel, die honderd jaar later tot een soortgelijke rage en soortgelijke wiskundige vragen zou leiden: Rubiks kubus!

### Brahma en Correspondentie

De laatste Verpoozing, die weer in twee afleveringen verscheen, gaat over de ‘Ringen van Brahma’. Het gaat hier om een mystificatie van Lucas, die zo het spel introduceerde dat later als de ‘Torens van Hanoi’ bekend werd: acht schijven van aflopende grootte op een staafje, die verplaatst moeten worden naar één van twee lege staafjes, door ze stuk voor stuk te verplaatsen, zonder ooit een schijf op een kleinere te plaatsen. Generaties studenten wiskunde en informatica wordt hiermee tegenwoordig algoritmisch en recursief denken bijgebracht, namelijk voor het beantwoorden van de vraag hoeveel verplaatsingen van schijven er minimaal nodig zijn om de taak te volbrengen. Dat de stukken van Schoute ook gelezen werden, is voor ons alleen af te leiden uit de rubriek Correspondentie, waarin Schoute ‘volgaarne de zeer aardige vinding van mevr. S.B. uit Amsterdam’ weergeeft, over het *Vijftienspel*. Bovendien worden enige correcties aangebracht.

### Schoute en Lucas

Schoute was duidelijk een bewonderaar van Lucas. Ze hebben elkaar ongetwijfeld getroffen bij de jaarlijkse bijeenkomsten van de Franse vereniging voor de bevordering van wetenschappen (l’AFAS), waaraan Schoute, net als Lucas, in de loop der jaren een fiks aantal bijdragen heeft geleverd, soms wel drie per bijeenkomst, blijkens de (inmiddels geheel gedigitaliseerde) verhandelingen. Bij vergelijking valt op hoe dicht Schoute in de eerste drie Verpoozingen bij het origineel uit het in 1882 verschenen eerste deel van de Récréations Mathématiques blijft. Sommige stukken zijn letterlijke vertalingen, soms dikt Schoute het origineel wat in, en een enkele keer voegt hij wat toe. Over magische vierkanten, onderwerp van de vierde Verpoozing, schrijft Lucas pas in het veel later verschenen deel IV, maar er waren al wel voorstudies in tijdschriften verschenen. Over dit onderwerp sprak Schoute zelf op het AFAS-congres in Grenoble van 1885. De verhandelingen over koninginnen op het schaakbord, solitaire en het tweetallig stelsel, de Chinese ringen, en de schuifpuzzel, corresponderen weer met Récréations vier tot en met acht van Lucas. Het AFAS-congres van 1891 had als hoofdthema ‘hygiëne’. Tijdens het slotbanket werd Lucas in het gezicht geraakt door een scherf van een bord dat een serveerster liet vallen. Hij



— 421 —

**WISKUNDIGE VERPOOZINGEN,**

DOOR

Dr. P. H. SCHOUTE.

V

DE PAARDESPRONG.

Eens bevond ik mij in een gezelschap, waar iemand naar aanleiding van het schaakspel de vraag stelde om van een bepaald vakje van het schaakbord uitgaande met het paard al de vakjes van het bord te doorloopen, zonder daarbij tweemaal op een zelfde vakje te komen. Hiertoe zette men dopjes op al de 64 vakjes, behalve op dat, van waar het paard zijn loop zou beginnen; achtereenvolgens moest men dan al de dopjes wegnemen, waarbij dan natuurlijk tot het eind toe vermeden moest worden, dat het paard op een leeg vakje kwam.

„Zij, die meenden, dat dit vrij gemakkelijk was, deden eenige vruchtelooze pogingen. Daarna begon hij, die de vraag gesteld had, bij een willekeurig vakje, en wist den loop van het paard zoo goed te regelen, dat achtereenvolgens al de dopjes werden weggenomen. Natuurlijk liet het groote aantal vakjes niet toe den doorloopen weg te onthouden en eerst na verscheidene mislukte pogingen slaagde ik er in een dergelijken weg te vinden, die echter dan nog maar voor een bepaald uitgangspunt gold. Nu weet ik niet meer of de voorsteller zelf het beginpunt uitkoos, maar wel, dat hij ten stelligste verzekerde de vraag te kunnen oplossen, waar men hem ook beginnen liet."

Deze aanhaling is de aanhef van een verhandeling van denzelfden Euler, over wien ik reeds in twee vorige opstellen sprak. Onder den titel *Solution d'une question curieuse, qui ne paroit soumise à aucune analyse* (oplossing van een vraagstuk, waarop geen wiskundige methode vat schijnt te hebben) komt zij voor in het vijftiende deel van de verhandelingen der Academie van Berlijn van 1759.

Voor hem, die met den paardesprong op het schaakbord bekend is, is de vraag uit het bovenstaande duidelijk. Om ze algemeen verstaanbaar te maken voeg ik er alleen aan toe, dat elke zet van het paard de samenvoeging is van twee bewegingen; òf van twee vakjes naar boven of beneden en een vakje links of rechts, zooals van *a* (fig. 1) op *b*, *c*, *d* of *e*; òf van twee vakjes links of rechts en

Fig. 1. Fig. 2.

een vakje naar beneden of naar boven, zooals van *a* op *f*, *g*, *h* of *i*. Terwijl deze „rozet" van het paard zich in het algemeen voor sommige standen tot zes, vier, drie en twee vakjes herleidt, is het hier in hoofdzaak alleen van gewicht op te merken, dat een hoekvakje in het laatste geval verkeert en men bij het doorloopen van het geheele bord, wanneer men in een der vakjes *a* (fig. 2) komt zonder in *b* geweest te zijn naar *b* zal moeten gaan, tenzij men in *b* den weg wil eindigen.

In de aangehaalde verhandeling wijst Euler op het onderscheid tusschen „geslotene" en „opene oplossingen". Nommert men de vakjes van het bord met de cijfers van 1 tot 64 in de volgorde waarin het paard ze doorloopt, dan geeft fig. 3 een geslotene, fig. 4 een opene oplossing aan.

Fig. 3.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 10 | 5 | 12 | 1 | 42 | 25 | 52 |
| 4 | 13 | 8 | 43 | 26 | 53 | 64 | 41 |
| 9 | 6 | 11 | 2 | 29 | 40 | 51 | 24 |
| 14 | 3 | 30 | 39 | 44 | 27 | 54 | 63 |
| 31 | 38 | 33 | 28 | 55 | 50 | 23 | 20 |
| 34 | 15 | 36 | 45 | 58 | 21 | 62 | 49 |
| 37 | 32 | 17 | 56 | 47 | 60 | 19 | 22 |
| 16 | 35 | 46 | 59 | 18 | 57 | 48 | 61 |

Fig. 4.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 10 | 5 | 12 | 1 | 32 | 57 | 42 |
| 4 | 13 | 8 | 33 | 56 | 43 | 54 | 31 |
| 9 | 6 | 11 | 2 | 19 | 30 | 41 | 58 |
| 14 | 3 | 20 | 29 | 34 | 55 | 44 | 53 |
| 21 | 28 | 23 | 18 | 45 | 40 | 59 | 62 |
| 24 | 15 | 26 | 35 | 48 | 61 | 52 | 39 |
| 27 | 22 | 17 | 46 | 37 | 50 | 63 | 60 |
| 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 47 | 38 | 51 |

Bij de eerste kan men door een paardesprong van 64 op 1 teruggaan, zoodat de oplossing in zich zelf terugkeert en men haar kan doen beginnen waar men wil. Bij de opene oplossingen is dit niet mogelijk, wijl 64 niet door een paardesprong met 1 verbonden is. En nu geeft Euler een handelwijs aan, waardoor men stelselmatig opene oplossingen zoeken en in geslotene omvormen kan.

Bij het zoeken van opene oplossingen neemt Euler aan, dat men, door het op goed geluk af invullen, reeds een aanzienlijk aantal vakjes bezet heeft. Zoo onderstelt hij (fig. 5) dat men langs dien weg de vakjes, op de twee *a* en *b* na, met getallen van 1 tot 62 heeft gevuld. Om nu *a* in den weg op te nemen, zoekt hij twee getallen die op elkaar volgen en waarvan het kleinste door een paardesprong met 62, het grootste door een paardensprong met *a* in verband staat. Hieraan voldoen de getallen 53 en 54; men kan dus van 1 tot 53 door-

Fig. 5.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 34 | 21 | 54 | 9 | 32 | 19 | 48 | 7 |
| 55 | 10 | 33 | 20 | 53 | 8 | 31 | 18 |
| 22 | 35 | 62 | *a* | 40 | 49 | 6 | 47 |
| 11 | 56 | 41 | 50 | 59 | 52 | 17 | 30 |
| 36 | 23 | 58 | 61 | 42 | 39 | 46 | 5 |
| 57 | 12 | 25 | 38 | 51 | 60 | 29 | 16 |
| 24 | 37 | 2 | 43 | 14 | 27 | 4 | 45 |
| 1 | *b* | 13 | 26 | 3 | 44 | 15 | 28 |

Fig. 6.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 34 | 21 | 44 | 9 | 32 | 19 | 58 | 7 |
| 45 | 10 | 33 | 20 | 53 | 8 | 31 | 18 |
| 22 | 35 | 52 | 43 | 40 | 57 | 6 | 59 |
| 11 | 46 | 41 | 56 | 49 | 54 | 17 | 30 |
| 36 | 23 | 48 | 51 | 42 | 39 | 60 | 5 |
| 47 | 12 | 25 | 38 | 55 | 50 | 29 | 16 |
| 24 | 37 | 2 | 63 | 14 | 27 | 4 | 61 |
| 1 | 64 | 13 | 26 | 3 | 62 | 15 | 28 |

gaan, daarna van 62 tot 54 terugtellen en in *a* eindigen; welken weg ik door het teeken (1—53, 62—54, *a*) aanwijs. Is hierdoor nu het opgenomen punt *a* eindpunt geworden, dan zal het aansluiten van *b* op dezelfde wijs te bereiken zijn met behulp van de getallen 42 en 43, waarvan het eerste door een paardesprong met *a*, het tweede door een paardesprong met *b* verbonden is. Hierdoor vindt men de oplossing (1—42, *a*, 54—62, 53—43), die met herstelling van de natuurlijke rangorde der getallen in fig. 6 is aangewezen.

Daar men den verkregen weg ook in tegengestelde orde volgen kan, is het ook mogelijk een leeg gebleven vakje, in plaats van aan het einde, aan het begin te doen aansluiten. Een voorbeeld hiervan geeft fig. 7, waarin vijf vakjes onbezet gebleven zijn. Men moet dan weer twee op elkaar volgende getallen zoeken, waarvan het grootste met 1, het kleinste met een nieuw vakje, bijv. *a*, in verband staat. Wijl 12 en 11 hieraan voldoen, heeft men de volgorde (*a*, 11—1, 12—59). Zoo voortgaande kan men nu weer *a* of 59 met een der andere opene vakjes verbinden, enz. Maar het is hier veel gemakkelijker —

**Figuur 3** Paardesprong

liep een infectie op, kreeg wondroos aan zijn wang en stierf enkele dagen later op 49-jarige leeftijd.

### Wie was Schoute?

Biografisch materiaal over Schoute is te vinden in een artikel van Struik [3], en in necrologiën van Korteweg voor de KNAW [4] en in het Nieuw Archief voor Wiskunde [5]. Het werd ook samengevat door Irene Polo [6], die een proefschrift schreef over de collectie meetkundige modellen in Groningen, grotendeels aangeschaft voor en door Schoute.

Pieter Hendrik Schoute, geboren in Wormerveer op 21 januari 1846, studeerde civiele techniek in Delft, en promoveerde in 1870 in Leiden op een meetkundig onderwerp *Over homographie, toegepast op de oppervlakken van den tweeden graad*. Hij werd leraar in Nijmegen en Den Haag, en daarna van 1881 tot zijn dood in 1913 hoogleraar 'elementaire Wiskunde en Analytische, Beschrijvende en Hogere Meetkunde' in Groningen. Schoute wordt omschreven als een typische *geometer*, aanvankelijk in de 19de eeuwse vorm van projectieve en enumeratieve meetkunde van kwadrieken en krommen, maar later maakte hij vooral naam met zijn meetkunde van de vier- en hoger-dimensionale euclidische ruimte, en reguliere polytopen daarin. Deze belangstelling deelde hij met Alice Boole Stott, waarmee hij ook samen ging publiceren. Zij staat ook op een van de twee foto's die ik ken waarop Schoute is afgebeeld; er is ook een geschilderd portret in het Groninger Universiteitsmuseum. Vermeldenswaard is verder misschien nog dat hij (volgens John Stillwell) in zijn standaardwerk *Mehrdimensionale Geometrie* als eerste het woord simplex lijkt te hebben gebruikt (in de zin van de algebraïsche topologie). Schoute was jarenlang redacteur van het Nieuw Archief, en vanaf het begin hoofdredacteur van de ook door het Wiskundig Genootschap uitgegeven *Revue Semestrielle des Publications Mathématiques*, een soort voorloper van de *Current Mathematical Publications* met korte beschrijvingen van recent verschenen artikelen. Hij werd in 1886 lid van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Een volledige bibliografie lijkt niet te bestaan; in de bibliotheek van het Korteweg-de Vries Instituut in Amsterdam trof ik tot mijn verrassing wel *Verzamelde Werken* aan, maar dat bleek letterlijk genomen te moeten worden: het waren twee ordners met overdrukken. Schoute trouwde in 1872 met Mathilde Pekelharing, telg uit een ander Zaans geslacht [7]. Eén van haar broers, Baltus Hendrik, werd een vooraanstaand jurist. Hij had vanaf 1892 twee jaar zitting in een Staatscommissie inzake de afsluiting van de Zuiderzee; Schoute publiceerde in 1893 in *The Geographical Journal* over 'The reclamation of the Zuiderzee'.

### Eigen Haard?

Het bovenstaande laat wel zien welke bijdrage Schoute in zijn rubriek heeft geleverd aan de wiskundige literatuur. Maar het verklaart nog niet wat de rubriek deed in Eigen Haard. Wat was dat eigenlijk voor blad, en verschenen er meer wiskundige bijdragen in? Het antwoord op de laatste vraag is relatief gemakkelijk: voor zover ik heb kunnen nagaan waren de bijdragen van Schoute de enige wiskundige artikelen die in het blad zijn verschenen. Vragen over aard en de opzet van dit blad zijn lastiger, en laten zich slechts ten dele beantwoorden door een het lezen van *Eigen Haard* zelf. Gelukkig zijn er enkele recente bronnen die wat meer inzicht verschaffen [8,9,10]. In het laatste kwart van de 19e eeuw ontstonden er tientallen geïllustreerde tijdschriften in Eu-


**Figuur 4** Eigen Haard

ropa. Dat werd mogelijk door technologische vorderingen en lagere kosten, en tegelijkertijd nam de belangstelling mede door toenemende welvaart en vrije tijd sterk toe. De diversiteit werd versterkt door de verzuiling in Nederland, waar katholieken, protestanten, en vrijdenkenden hun eigen verenigingen en organen kregen. Bovendien nam de belangstelling voor onderwijs, wetenschap en technologie toe: Nederland ging optimistisch de tijd tegemoet die wel de Tweede Gouden eeuw (in de natuurwetenschappen) wordt genoemd. Er werd in de bladen een sterk vooruitgangsgeloof beleden, gekoppeld aan trots op de Nederlandse prestaties in het verleden. *Eigen Haard* afficheerde zich als progressief liberaal, modernistisch protestant (hetgeen vooral moet worden opgevat als niet-katholiek) en stelde zich expliciet een beschavend opvoedkundig doel, door informatie te bieden over wetenschap, techniek, kunst en cultuur. De oplage van het weekblad (dat ongeveer zestien pagina's in twee kolommen besloeg) steeg tot ongeveer zesduizend rond de tijd waarin Schoute er in schreef. Het blad onderging toen juist een modernisering, nadat het was overgedaan door de oprichter, Kruseman, ook de grondlegger van de Maatschappij tot Nut van het Algemeen in Nederland. Concurrent De Katholieke Illustratie was overigens bijna tien keer zo populair, en een vergelijkbaar blad als *Die Gartenlaube* in Duitsland had wel 400.000 abonnees! *Eigen Haard* liep voorop bij de toepassing van nieuwe druktechnieken voor illustraties: de gravure in diverse vormen, en kort na de tijd van Schoute de eerste foto's, en nog later kleurenfoto's. Regelmatig werden losse prenten toegevoegd aan het blad. De moderne lezer valt onmiddellijk het nagenoeg ontbreken van humor en ironie op, en van politieke onderwerpen. Misschien zijn de bladen nog het best te vergelijken met de tegenwoordige weekendbijlagen over cultuur en wetenschap van kwaliteitskranten. Hoewel je zou hopen dat daarin, net als in *Eigen Haard*, ook eens geëxperimenteerd zou worden met het loslaten van het ridicule taboe op formules en wiskundige redeneringen, biedt het achterwege blijven van enige navolging van de 'Wiskundige Verpoozingen' in de 19de (of 20ste!) eeuw daartoe weinig perspectief.

### Schoutes bewijs

Mijn aanvankelijke oordeel dat het niet zinvol was de originele tekst van Schoute over de Torens van Hanoi op te zoeken, bleek om twee redenen fout. In de eerste plaats heb ik veel plezier beleefd aan deze speurtocht. Maar bovendien bleek Hinz een foutief oordeel over het werk van Schoute gegeven te hebben; hij schrijft (in mijn vertaling van zijn Engels) dat het oorspronkelijke probleem van de Torens van Hanoi "in essentie was opgelost in het eerste jaar na het verschijnen", en wel in drie artikelen, waaronder dat van Schoute in Eigen Haard, "door de constructie van een recursieve oplossing en het analyseren hiervan, maar verrassenderwijs, is een volledig bewijs van de minimaliteit van die oplossing niet eerder dan in 1981 (door Wood) gegeven!" Bij herlezing van wat Schoute schrijft blijkt dat onzin te zijn: zijn oplossing en analyse laten "uit theoretisch opzicht niets te wensen over"!

## Referenties


1 Andreas M. Hinz, 'The tower of Hanoi', *l'Enseignement Mathématique* 35 (1989), 289–321.

2 M. Kraitchik, *Mathématique des Jeux, ou Récréations Mathématique*, Ch. XIII, Bruxelles, 1930.

3 *Dictionary of Scientific Biography*, New York: Scribner, 1970–1990, 213.

4 *Zittingsverslagen KNAW 1913*, 1036–1040.

5 *Nieuw Archief voor Wiskunde*, Amsterdam: Wiskundig Genootschap, tweede reeks, deel 10, 1912/13.

6 *Biografisch Woordenboek van Nederlandse Wiskundigen*, www.bwnw.nl

7 Jan Maarten Pekelharing, *Zaanse zonen, De wereld van mijn voorouders*, Zutphen: Walburg Pers 2007.

8 Barbara Allart, *De wetenschap heeft 't uitgemaakt. Wetenschapsbeelden in de Nederlandse Publiekstijdschriften 1840–1900*, proefschrift, Enschede 2003.

9 Peter J.H. van den Berg, *Welkom in 't leven. Een beschrijving van het geïllustreerde tijdschrift Eigen Haard 1875–1941*, Amsterdam: Otto Cramwinckel, 2003. Publieksversie van proefschrift aan de Universiteit van Tilburg.

10 Marieke van Delft, Nel van Dijk, Reinder Storm, *Magazine! 150 jaar Nederlandse publiekstijdschriften* , Zwolle: Waanders/Den Haag: Koninklijke Bibliotheek, 2006.

11 Joan Hemels, Renée Vegt, *Het geïllustreerde tijdschrift in Nederland. Bron van kennis en vermaak, lust voor het oog*, Bibliografie, Amsterdam: Cramwinckel, 1993/1997 (2 dln).

12 Irene Polo Blanco, *Theory and History of Geometric Models*, Groningen: Academic Press Europe, 2007 (proefschrift Rijksuniversiteit Groningen).

13 P.H. Schoute, 'Wiskundige Verpoozingen I. De overvaart', *Eigen Haard* 8 (1882), 160–162.

14 P.H. Schoute, 'Wiskundige Verpoozingen II. De bruggen over den Pregel', *Eigen Haard* 8 (1882), 248–251.

15 P.H. Schoute, 'Wiskundige Verpoozingen III. Het doolhof', *Eigen Haard* 8 (1882), 286–288.

16 P.H. Schoute, 'Wiskundige Verpoozingen IV. De toovervierkanten', *Eigen Haard* 8 (1882), 345–348.

17 P.H. Schoute, 'Wiskundige Verpoozingen V. De paardesprong', *Eigen Haard* 8 (1882), 421–424.

18 P.H. Schoute, 'Wiskundige Verpoozingen VI. De acht koninginnen op het schaakbord', *Eigen Haard* 8 (1882), 580–582, 592–594.

19 P.H. Schoute, 'Wiskundige Verpoozingen. VII. Het eenzaamheidsspel', *Eigen Haard* 9 (1883), 200–203, 212–215.

20 P.H. Schoute, 'Wiskundige Verpoozingen. Het tweetallig stelsel', *Eigen Haard* 9 (1883), 345–348.

21 P.H. Schoute, 'Wiskundige Verpoozingen. De Chineesche Ringen', *Eigen Haard* 9 (1883), 428–431.

22 P.H. Schoute, 'Wiskundige Verpoozingen. Het Vijftienspel', *Eigen Haard* 9 (1883), 540–543, 588–591.

23 P.H. Schoute, 'Correspondentie en Verbeteringen', *Eigen Haard* 9 (1883), 604.

24 P.H. Schoute, 'De ringen van Brahma', *Eigen Haard* 10 (1884), 274–276, 286–287.

25 zie ook: www.math.ru.nl/˜bosma/schoute