Michael Muskulus
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Niels Bohrweg 1
2333 CA Leiden
muskulus@math.leidenuniv.nl

Hans de Waal
Protestantse Theologische Universiteit
Vestiging Leiden
Matthias de Vrieshof 1
2311 BZ Leiden
jadewaal@pthu.nl

Onderzoek

Over luie studenten, groepsdynamica en pokeren

Welke wiskundige theorie kan aanspraak maken inzicht in het menselijk gedrag te geven, biologische fenomenen te verklaren, en onderwijl de optimale strategische keuzes in kansspelen te bepalen? De auteurs geven een beknopt overzicht van de speltheorie gemotiveerd door enkele eenvoudige toepassingen die verrassende inzichten geven. Omdat Nederland sinds enige jaren volledig in de ban is van het pokeren, richten ze hun aandacht vooral op dit gok- en familiespel.

Speltheorie is een interdisciplinaire onderneming met als doel het opstellen en analyseren van intelligent gedrag in situaties waar beslissingen moeten worden genomen. Dit streven opent niet alleen deuren voor belangrijke toepassingen in biologische, economische en sociale contexten [11], maar levert ook interessante *gemotiveerde wiskunde* op [7]. Omdat de grondlagen van de speltheorie met elementaire wiskundige kennis te begrijpen zijn, en de inzichten vaak verrassen, is dit vak ook een ideale aanvulling op de standaard lesstof in het onderwijs. Frank Thuisman's *Spelen en Delen* in de Zebra-reeks is een voorbeeld voor een benadering op vwo-niveau [23], en Edward Packel's *The Mathematics of Games and Gambling* bevat ook een hoofdstuk over speltheorie op vergelijkbaar niveau [21].

Sinds zijn ontstaan wordt speltheorie op kansspelen toegepast. Zo bespreken von Neumann en Morgenstern in hun klassieke *Theory of Games and Economic Behavior* een eenvoudig model voor pokeren [24]. Door de opkomst van het internet en de mogelijkheid online te spelen is de populariteit van pokeren de laatste jaren overal ter wereld erg gestegen. De aandacht van de media is enorm sinds de inzet van online Monte Carloberekeningen van winkansen en miniatuur camera's die onder de kaarten van de spelers kijken. Ook in Nederland is *Texas Hold'Em* poker extreem populair geworden, vooral onder de jonge generatie [1]. De speltheoretische benadering wordt evenwel snel ingewikkeld, maar eenvoudige wiskundige modellen leveren al belangrijke inzichten op.

Filosofische grondlagen

Zoals elke goede theorie is ook de speltheorie filosofisch gemotiveerd [2]. Uitgangspunt is de aanname dat mensen de consequenties van hun handelingen kunnen overzien en beoordelen met betrekking tot hun gewenstheid, en op basis daarvan de voor hun meest voordelige uitkomst kiezen. Het centrale concept in de speltheorie is daarom de wenselijkheid, in het engels *utility* genoemd. De filosoof Jeremy Bentham beschouwde deze als het plezier dat onze handelingen ons geven [8]. In het *utilitarism* van Bentham en John Stuart Mill wordt de maxime van het maximaliseren van de utility toegepast op moreel en politiek vlak. In de economie werd dit idee populair door Léon Walras, die een consument beschouwde als een automaat die probeert een utility functie te maximaliseren onder beperkingen die hem door zijn omgeving opgelegd zijn.

De utility in economische toepassingen is meestal gelijkgesteld aan de monetaire winst omdat geld, tenminste in theorie, een universeel ruilmiddel is. Daardoor ontstaan eenvoudig paradoxen, bijvoorbeeld wanneer wij altruïstisch gedrag willen verklaren [9]. Juist daarom moeten wij utility in zijn oorspronkelijke, ethische dimensie opvatten, namelijk als de winst voor het *goede leven* van een mens [6], temidden van zijn medemensen, waarbij dus ook esthetische, culturele en sociale aspecten een rol spelen.

Strategische spellen

Omdat mensen niet alleen op de wereld zijn, kan niet iedereen zijn utility zomaar maximaliseren: vaak hebben mensen tegenstrijdige belangen, een situatie die door het argeloos klinkende woord *spel* wordt omschreven [3].

Wiskundig wordt een spel gemodelleerd door een verzameling van mogelijke acties voor elke speler, en een pay-off-functie die de utility van de uitkomst voor elke speler beschrijft. Deze functie is afhankelijk van de keuzes van alle spelers. In het geval van een tweepersoons spel kunnen we de pay-off-functie van elke speler als een matrix weergeven, met de mogelijke acties van de eerste speler als rijen, en de acties van de tweede speler als kolommen. Verder wordt aangenomen dat utility numeriek meetbaar is, en de elementen van de matrix reële getallen zijn, zodat hun orde overeenkomt met de orde van voorkeuren die elke speler aan de uitkomsten geeft. De eenheid van de utility wordt ook *util* genoemd.

Het begin van de moderne speltheorie wordt gekarakteriseerd door de uitgave van von Neumann en Morgensterns boek, waarin de auteurs gedetailleerd beschrijven hoe een utility functie geconstrueerd kan worden. Deze methode is verwant met degene die de Bayesianen, voor wie kans een subjectieve uitdrukking van een geloof is, gebruiken om waarschijnlijkheden te bepalen (en die ook in soms wat twijfelachtige tv shows wordt gebruikt). Stel dat wij een keuze A de voorkeur boven B geven, maar dat wij óf A óf B plus wat toegevoegde 'aantrekkelijkheid' X aangeboden krijgen. Hoeveel van deze extra utility is nodig tot het ons niets uitmaakt welke van de twee uitkomsten gerealiseerd wordt? Hoe veel overtuigingskracht is er nodig om iemand een 'indecent proposal' te laten accepteren?

David Kreps' omvattende inleiding in de theorie van de rationale keuze beschrijft deze methode en enkele alternatieven [17]. De moderne, psychologische kant van de beslissingstheorie wordt in het boek van Hastie en Dawes gepresenteerd [13].

Luie studenten

Twee studenten moeten samen een werkstuk voor een college indienen. De afspraak is dat iedereen vandaag in zijn eentje werkt, en dat de volgende dag alleen nog maar de resultaten worden samengevoegd. Elke student wil graag een goed cijfer, maar het liefst zonder hard te werken. Eenvoudig gemodelleerd heeft elke student een keuze tussen twee acties: *hard werken* (H) of helemaal *niets doen* (N). De beste uitkomst voor elk student is dat hij niets doet, maar zijn partner wel. De slechtst mogelijke uitkomst is dat hij hard werkt, maar zijn partner niet, omdat hij niet wil worden uitgebuit. Wat is de rationele keuze voor beide studenten?

De volgende matrix modelleert dit spel dat wij *werken aan een gemeenschappelijk project* zullen noemen, Martin Osborne volgend [20]. Elk element (a, b) van de matrix geeft de utility van de uitkomst voor de eerste speler (a) en de tweede speler (b) aan.

		speler 2	
		Hard werken	**Niets doen**
speler 1	**Hard werken**	$2, 2$	$0, 3$
	Niets doen	$3, 0$	$1, 1$

De wiskundige John Nash, de tragische held van Sylvia Nasars boek *A beautiful mind*, redeneerde als volgt: Stel dat een speler weet wat zijn partner gaat doen. Dan kan hij gebaseerd op deze informatie een *beste antwoord* kiezen. Een *Nashequilibrium* is nu een strategische keuze voor elke speler, zodanig dat de strategie van elke speler het beste antwoord is op de acties van alle andere spelers. Zoals Ken Binmore heeft opgemerkt, verlost een Nash equilibrium ons van de circel die begint met 'ik denk dat hij denkt dat ik denk dat...' [9] en voorziet in een stabiele strategie, die ervaren spelers kiezen.

In het geval van ons voorbeeld, dat ook het *prisoner's dilemma* genoemd wordt, is helaas de strategie (N, N) het unieke Nashequilibrium. Zou dit de reden zijn waarom studenten het vaak zo moeilijk vinden om productief samen te werken?

Gemengde strategieën

De volgende matrix modelleert een eenvoudig spel dat *matching pennies* heet, waarbij twee spelers allebei of *kop* (K) of *munt* (M) kiezen. Als zij hetzelfde zeggen, wint de eerste speler een util van de tweede, en anders wint de tweede een util van de eerste [4].

		speler 2	
		Kop	**Munt**
speler 1	**Kop**	$1, -1$	$-1, 1$
	Munt	$-1, 1$	$1, -1$

Het is duidelijk dat de enige manier voor een speler om niet een heleboel geld te verliezen is, om *onvoorspelbaar* te zijn. De actie die een speler kiest moet dus door een element van toeval bepaald zijn. Wiskundig wordt dit gemodelleerd door een kansverdeling over de acties; wij noemen dit een *gemengde strategie*, in tegenstelling tot de *pure strategieën* (K) en (M). John Nash heeft laten zien dat ook voor gemengde strategieën altijd tenminste één Nash equilibrium bestaat, waarbij de deterministische uitkomst door een verwachting moet worden vervangen.

Stel dat de eerste speler de gemengde strategie $(p, 1-p)$ speelt. Dat wil zeggen dat hij elk keer met een waarschijnlijkheid van $p > 0$ kop kiest, en munt met een kans van $1-p$. De tweede speler speelt een gemengde strategie $(q, 1-q)$. Stel verder dat (p, q) een Nashequilibrium vormen, zodat er voor geen van beide spelers een reden is om van zijn strategie af te wijken. Meer nog, in een Nash equilibrium is de verwachting van de pure strategieën voor elke speler gelijk: anders zou het namelijk beter zijn om voor een van de pure strategieën te kiezen in plaats van de gemengde, als gevolg van de lineariteit van de verwachting. Dit zogenoemde *neutraliteitsargument* leidt tot

$$\begin{aligned} E[K] &= pq - p(1-q) \\ &= (1-p)(1-q) - (1-p)q = E[M], \end{aligned}$$

met als oplossing $q = 1/2$. Op dezelfde manier zien we dat ook $p = 1/2$ optimaal is, en het unieke Nash equilibrium van *matching pennies* is dus $(1/2, 1/2)$, zoals verwacht.

Groepsdynamica

Een niet-triviale toepassing is het volgende spel dat vaak *reporting a crime* of *the good samaritan* genoemd wordt [20]. Er zijn N spelers die allen getuige zijn van een crimineel incident. Iedereen heeft er baat bij dat de politie wordt gebeld omdat daarmee het slachtoffer wordt geholpen. Aan de andere kant geeft iedereen er de voorkeur aan dat iemand anders belt. Elke speler heeft dus de keuze tussen de twee acties *bellen* (B) of *niets doen* (N). De payoff van een speler is 0 als niemand belt, een beloning van $v > 0$ als tenminste één andere speler belt, en een beloning van $v - c > 0$ als tenminste hij belt — en eventueel ook nog iemand anders. Met een neutraliteitsargument kunnen wij, als zoëven, een gemengd Nashequilibrium vinden. Laten we de kans waarmee een van de spelers belt p noemen. De kans dat niemand van de $N-1$ andere spelers belt is $(1-p)^{N-1}$. Dan is

$$\begin{aligned} E[B] &= v - c = E[N] \\ &= v \cdot P[\text{iemand anders belt}] \\ &= v \cdot (1 - P[\text{niemand anders belt}]), \end{aligned}$$

wat uiteindelijk $p = 1 - (c/v)^{1/(N-1)}$ oplevert. We zien dat wanneer het aantal spelers toeneemt, de waarde van p afneemt. De kans dat niemand de politie belt is

$$(1-p)^N = (c/v)^{1+1/(N-1)},$$

en deze neemt asymptotisch af tot een waarde van c/v. Hoe kunnen we dit resultaat interpreteren? Stellen wij bijvoorbeeld $v = 10$ en $c = 1$, dan wordt bij een voldoende aantal spelers in één van tien gevallen de politie *niet* gebeld.

Wat dit in de praktijk voor gevolgen kan hebben, laten wij aan de verbeelding van de lezer over. Het bijbelverhaal over de barmhartige Samaritaan stemt echter hoopvol: drie spelers bleek al voldoende om tot het gewenste resultaat te komen (*Lukas* 10, 30–37).

Optimaal pokeren

De wiskundige analyse van het pokeren heeft met enkele moelijkheden te maken, onder andere veroorzaakt door het feit dat de orde van winkansen van pokerhanden (de verzameling kaarten die tot de beschikking van een speler staan) niet transitief is [5]. Daarom worden er vooral eenvoudige modellen bestudeerd. Hiervan is het voordeel dat deze modellen meestal breed toepasbaar zijn, en ook niet van de pokervariant die gespeeld wordt, afhangen. Juist daarom hoeven wij hier ook niet de regels van poker tot in detail uitleggen (een goede introductie is te vinden in [18]) en werken we met algemene principes.

In het begin van het spel moet elke speler een verplichte inzet doen, de zogenoemde *ante*, pas daarna worden de kaarten uitgedeeld. Daarop volgen een aantal ronden van bieden. Voor het begin van van het bieden kunnen in sommige ronden kaarten gewisseld worden, of komen er kaarten open op tafel bij.

Een speler die aan de beurt is heeft een aantal strategische mogelijkheden. Het is altijd mogelijk om uit het spel te stappen (*fold*) en de verzamelde inzet (de *pot*) aan de resterende spelers over te laten. Als er in een ronde tot nu toe geen bod gedaan is, is het ook mogelijk niets te doen (*check*), of een speler kan een inzet doen (*bet*) die door alle andere spelers moet worden gematched. Maar als er al een bet bestaat, moet deze gematched worden (*call*) om in het spel te blijven, en kan zelfs verhoogd woorden (*raise*). In de *limit poker* varianten zijn deze inzetten aan sterke beperkingen onderworpen, in *no-limit* poker bestaat er geen bovengrens.

Een eerste niet-triviaal inzicht is dat de ante het spel pas mogelijk maakt. Zonder ante zou het veel te gevaarlijk zijn om met iets anders dan de (unieke) beste hand een inzet te doen. Aan de andere kant, als de ante erg hoog is, dan moet een speler bijna elk bod beantwoorden, omdat zijn verwachting van een aandeel uit de pot (zijn *pot odds*) zelfs bij slechte kaarten nog steeds positief is [22].

De aard van het bluffen

De dynamica van pokeren komt voort uit het bestaan van niet-toegankelijke informatie. Omdat een deel van de kaarten van de tegenstanders onbekend zijn, kan een speler niet weten of hij de winnende hand (*the nuts*) heeft, of een verliezende hand (*dead hand*). Als hij dit zou weten, dan zou een speler in eerste instantie alleen maar met de nuts spelen en bieden (*value bets*), en anders folden. Maar deze strategische keuze is voorspelbaar, zodat zijn tegenstanders bij een bod altijd zullen uitstappen, wat een gemiddelde winst van nul oplevert.

Om winst bij poker te maken, moet een speler dus zoveel mogelijk informatie over zijn eigen hand voor de andere spelers verbergen (*information hiding*). Het middel om dit te doen is de *bluff*: af en toe ook met zwakke kaarten inzetten — en daarbij betrapt worden!

Veel mensen overschatten de functie van een *bluff*. Het is niet primair bedoeld om winst mee te maken, maar werkt indirect. In de woorden van Chen en Ankenman [10]: "Bluffing in optimal poker play is often not a profitable play in itself. Instead, the combination of bluffing and value betting is designed to ensure the optimal strategy gains value no matter how the opponent responds. Opponents who fold too often surrender value to bluffs while opponents who call too often surrender value to value bets."

Een voorbeeld zal dit verduidelijken. In dit *headsup clairvoyant half-street* spel nemen wij aan dat speler Y weet of hij de nuts of een dead hand heeft, en hij heeft een keuze tussen een *bet* (met een vaste inzet van S) of een *check* (zonder inzet). Er is maar een tegenstander, speler X, die daarna kan kiezen tussen een *call* of een *fold*. Ook hier komt weer een neutraliteitsargument aan te pas. Laat c de frequentie zijn waarmee X de inzet evenaart, en stel dat Y gebluft heeft. Dan geldt dat

$$\begin{aligned} E[Y \text{ bluffs}] &= (1-c)P - cS \\ &= 0 = E[Y \text{ checks dead}] \end{aligned}$$

moet zijn, waar $P > S$ de waarde van de pot is, die X aan een bluff verliest als hij uitstapt. De optimale calling frequentie is dus $c = P/(P + S)$, wat betekent dat wanneer de pot groter is, X vaker de inzet moet matchen, om de *bluffs* van Y tegen te houden. Als X minder vaak voor een *call* kiest, stijgt de verwachting van Y door zijn *bluffs*.

Aan de andere kant, laat b de frequentie van *bluffs* van Y zijn, als hij de verliezende hand heeft (wat met een waarschijnlijkheid q gebeurt), dan geldt dat

$$\begin{aligned} E[X \text{ calls}] &= -qS + b(1-q)(P+S) \\ &= 0 = E[X \text{ checks}], \end{aligned}$$

wat

$$\begin{aligned} b &= S/(P+S) \cdot q/(1-q) \\ &= (1-c) \cdot q/(1-q) \end{aligned}$$

oplevert.

De totale verwachting van Y is

$$\begin{aligned} E[Y] &= cqS + b(1-q)((1-c)P - cS)) \\ &= q(c^2 S + (1-c)^2 P). \end{aligned}$$

Omdat

$$\mathrm{d}E[Y]/\mathrm{d}c = 2q(-P + c(S+P)),$$

stijgt de verwachting van Y ook als

$$c > P/(P+S).$$

Wij zien verder dat de optimale frequentie van *bluffs* daalt als de pot groter wordt.

Headsup Jam-or-Fold

Een ander eenvoudig model is de *no-limit headsup jam-or-fold* $[0,1]$ spel. Twee spelers X en Y hebben allebei een voorraad S aan chips die hun maximale inzet beperkt. Speler X heeft een ante van een chip ingezet, speler Y een halve chip. We nemen aan dat speler Y, die aan de beurt is, óf alle S chips gaat inzetten (*jam*) óf uitstapt (*fold*). Om op een eenvoudige manier de winstkansen te berekenen, maken wij gebruik van het $[0,1]$ pokermodel, waarbij elke hand gemodelleert wordt als een toevalsvariable uit een uniforme verdeling over $[0,1]$ en een kleiner getal van een grotere getal wint. Dan bestaat er een drempelwaarde $y \in [0,1]$, zodat Y met elke hand die beter dan y is inzet, en anders uitstapt. Voor speler X bestaat een drempelwaarde $x \in [0,1]$, zodat hij met elke hand die beter is dan x de inzet van Y *callt*, en anders uitstapt.

De verwachtingen van Y voor zijn twee strategische keuzes zijn dan

$$\begin{aligned} E[Y \text{ folds}] &= -1/2, \\ E[Y \text{ jams}] &= -xS + (1-x), \end{aligned}$$

waarbij wij gebruik maken van het feit dat ook $x < y$ moet gelden. Uiteraard heeft het geen zin voor speler X om met een slechtere hand dan y met een bod van Y mee te gaan. De waarde $x = 3/(2+2S)$ waar de twee verwachtingen overeenkomen is de optimale calling-frequentie van speler X.

De verwachtingen voor X zijn

$$\begin{aligned} E[X \text{ calls}] &= -S\frac{x}{y} + S\frac{y-x}{y}, \\ E[X \text{ folds}] &= -1 \end{aligned}$$

wat $y = 3S/(1+S)^2$ oplevert.

Voor grote waardes van S kunnen beide spelers alleen maar met de unieke beste hand (twee azen in Hold'Em, met een winkans van rond 85%) spelen. Zelfs met de een na beste hand (twee koningen in Hold'Em, met een winkans van rond 82%) kan niet worden gespeeld, omdat de tegenstander alleen met de beste hand meegaat. Meer nog, als S daalt, is de eerste hand die behalve twee azen kan worden gespeeld een hand met één aas, omdat dit de kans verlaagt dat de tegenstander twee azen heeft. Deze zogenoemde *card removal* effecten maken de analyse van poker juist zo interessant.

Chen en Ankenman bespreken dit model uitgebreid en wijzen op een interessante analogie. De waarde van S kan beschouwd worden als een temperatuur, waarbij $S \to \infty$ het absolute nulpunt representeert, en het spel voor kleinere waardes van S heter wordt. Bij bepaalde waardes van S treden er fasetransities op, namelijk als verdere handen met positieve verwachting gespeeld kunnen worden.

In hun boek presenteren zij tabellen met waardes van S, die aangeven wanneer bepaalde handen kunnen gespeeld worden of juist niet [10], en merken op dat alleen al het gebruik van deze tabellen de aanschafprijs van hun boek ruimschoots vergoedt. En dat dagelijks.

Het gulden getal van Poker

Ook voor de hoogte S van een inzet in no-limit poker bestaat een optimale oplossing volgens de speltheorie. Laat een speler Y met een frequentie $b = 1/(S+1)$ bluffen, zoals wij eerder hebben bepaald (waarbij wij $P = 1$ normaliseren en $q = 1/2$ aannemen), en zijn tegenstander X met een frequentie $c = 1 - b$ callen. Laten wij aannemen dat X in de helft van de gevallen callt, omdat hij zeker is de winnende hand te hebben. De frequentie c' waarmee hij in de rest van de gevallen callt, met een verlies van S, volgt uit

$$\frac{1}{2}c' + \frac{1}{2} = \frac{1}{S+1} = c$$

en is $c' = (1-S)/(1+S)$. De verwachting van Y is dus

$$E[Y] = k \cdot \frac{S(1-S)}{1+S}$$

waarbij k een constante is, die aangeeft hoe vaak dit geval tot stand komt. Maximaliseren van deze verwachting levert de oplossing $S = \sqrt{2} - 1$ op: de optimale waarde van een bet in dit spel.

Omdat de waarde $\sqrt{2} - 1$ vaak in de wiskundige analyse van no-limit poker voorkomt, werd het door Chen & Ankenman ook *het gulden getal van poker* (golden mean of poker) genoemd.

Spellen en evolutie

Nadat wij enkele modellen hebben gepresenteerd die door de lezer makkelijk op zijn of haar eigen spellen kunnen toegepast worden, besluiten we met een uitkijk naar de toekomst.

Wij hebben gezien dat de speltheoretische analyse optimale strategieën kan bepalen, maar zij geeft tot zover geen antwoord op de vraag hoe deze in realistische situaties gerealiseerd worden. De dynamica van herhaalde spellen wordt echter in de *evolutionaire speltheorie* onderzocht, vooral in biologische context [14, 19]. Op het gebied van pokeren is, dankzij de complexiteit van dit spel, nog niet veel onderzoek gedaan (een eenvoudig voorbeeld is [16]; zie ook [25]).

Misschien is de een of andere lezer nu gemotiveerd genoeg, zodat er in de nabije toekomst wel wat afstudeer projecten (of ander onderzoek) in Nederland te verwachten zijn op dit gebied...

Referenties

1. Veel spelers beseffen daarbij niet dat de deelname aan pokertoernooien buiten het aanbod van Holland Casino, bijvorbeeld op internet, illegaal is. Een officiële reden hiervoor is het gevaar van verslaving. Voor meer informatie zie [12].
2. Al in Plato's *Laches* en zijn *Symposium* zijn speltheoretische beschouwingen te vinden wanneer hij de dapperheid van soldaten bespreekt.
3. De RAND Corporation, een Amerikaanse denktank, heeft veel speltheoretische modellen op militair vlak onderzocht. Herman Kahn's studie over de thermonucleaire oorlog is een bekend voorbeeld waarin op enkele pagina's speltheoretische overleggingen aan te pas komen [15]. Zie verder: http://www.rand.org/
4. Een hilarische filosofische benadering van het wezen van het lot door middel van (onder andere) dit spel is te vinden in Tom Stoppard's theaterstuk *Rosenkrantz & Guildenstern are dead* en in de gelijknamige film.
5. Bijvoorbeeld wint AK met rond 62.25% van JT, JT met rond 50.95% van 22, en 22 met rond 52.72% van AK in Texas Hold'Em poker.
6. Aristotle, *The Nicomachean Ethics*, Penguin Books, London, 2004.
7. J.-P. Aubin, *Optima and Equilibria*, Springer-Verlag, New York, 2003.
8. J. Bentham, *An Introduction to the Principles of Morals and Legislation*, Dover Publications, Mineola, 2007.
9. K. Binmore, *Game Theory: A Very Short Introduction,* Oxford University Press, New York, 2007.
10. W. Chen, and J. Ankenman, *The Mathematics of Poker*, ConJelCo, Pittsburgh, 2006.
11. A. M. Colman, *Game Theory & its Applications in the Social and Biological Sciences*, Routledge, London, 1999.
12. J. Franssen, E.-J. Koning, and C. Kolar. *Het gezicht van Poker. Onderzoek naar Poker in Nederland*, College van toezicht op de kansspelen, Den Haag, 2007.
13. R. Hastie, and R. M. Dawes, *Rational Choice in an Uncertain World*, Sage Publications, Thousand Oaks, 2001.
14. J. Hofbauer, and K. Sigmund, *Evolutionary Games and Population Dynamics*, Cambridge University Press, New York, 1998.
15. H. Kahn, *On Thermonuclear War*, Princeton University Press, Princeton, 1960.
16. G. Kendall, and M. Willdig, 'An Investigation of an Adaptive Poker Player', in: J. G. Carbonell, and J. Siekmann, editors, AI 2001: *Advances in Artificial Intelligence*, LNCS 2256, pp 217–229, 2001.
17. D. M. Kreps, *Notes on the Theory of Choice*, Westview Press, Boulder, 1988.
18. M. Malmuth, and L. Loomis, *Fundamentals of Poker*, Two Plus Two Publishing, Henderson, 1999.
19. J. Maynard Smith, *Evolution and the Theory of Games*, Cambridge University Press, New York, 1982.
20. M. J. Osborne, *An Introduction to Game Theory*, Oxford University Press, New York, 2004.
21. E. Packel, *The Mathematics of Games and Gambling*, The Mathematical Association of America, Washington, 2006.
22. D. Sklansky, *Theory of Poker*, Two Plus Two Publishing, Henderson, 1999.
23. F. Thuijsman, *Spelen en Delen*, Epsilon Uitgaven, Utrecht, 2005.
24. J. von Neumann, and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, 1944.
25. http://www.cs.ualberta.ca/~games/poker