Hessel N. Pot
Tournoysveld 67
3443 ER Woerden
h.n.pot@hetnet.nl

Onderwijs

Wat reeksen zijn, is niet te zeggen

Het onderwerp reeksen is altijd een smakelijk onderdeel van het eerstejaarsprogramma van studenten in de bètavakken. Hessel Pot beweert dat een begrip reeks niet goed te definiëren valt. Heeft hij hierin gelijk? Hessel Pot is wis- en natuurkundige en was een aantal jaren eindredacteur van het tijdschrift Pythagoras.

Haast ieder calculusboek bevat een hoofdstuk over 'reeksen'. Echter, de manier van definiëren van die term wijkt nogal af van wat we in de wiskunde gewend zijn. De betekenis van 'rij' is geen probleem, bij elke auteur is dat: een functie op de natuurlijke getallen. Maar bij 'reeks' is het geven van een nette definitie onmogelijk, domweg omdat die term in minstens drie verschillende betekenissen door elkaar gebruikt wordt! (Behalve bij een auteur die in navolging van Cauchy, eenvoudigweg elke oneindige getallenrij aanduidt met: série/reeks.) Ik zag nog nooit ergens een definitie in de recht-toe-recht-aan-vorm: Onder *een reeks* verstaan we een ....

De gangbare praktijk

Het aan veel Nederlandse universiteiten gebruikte calculusboek van James Stewart geeft de volgende 'definitie':

If we try to add the terms of an infinite sequence $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ we get an expression of the form

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

which is called an **infinite series** (or just a **series**).

Glashelder, ... of toch eigenlijk niet helemaal?

> An infinite series is often defined to be 'an expression of the form $\sum_1^\infty a_n$'. It is recognised that this has many defects. In order to avoid some of these, we adopt the following definition: "An infinite series of real numbers is a pair of real sequences $\{a_n\}$ and $\{A_n\}$ whose terms are connected by ...". (B.Creighton Buck; *Advanced calculus*, 1956).

Drie verschillende betekenissen

De aanduiding

$$\text{de reeks } a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$
$$(\text{of: de reeks } \textstyle\sum a_n)$$

moet bij de meeste auteurs gelezen als

- ofwel de rij a_1, a_2, a_3, enz. (als het gaat over z'n som, of over z'n termen),
- ofwel de rij a_1, $a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 + a_3$, enz. (als het gaat over z'n convergentie),
- ofwel noch 1, noch 2 (als het gaat over z'n absolute convergentie).

Echte ongelukken ten gevolge van die meervoudige betekenis van 'reeks' blijven uit, zolang auteurs dat woord uitsluitend gebruiken in een beperkt aantal standaardzinnetjes waarvan de betekenis vast te leggen is met het bekende begrip 'rij'. Zulke reekszinnetjes zijn:

- de reeks $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ convergeert / divergeert
- de reeks $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ heeft som S
- de reeks $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ is absoluut convergent
- de reeks $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ is relatief convergent.

Echter, zo gauw 'reeks' of 'reeksen' gebruikt wordt op een manier waarbij de suggestie wordt gewekt dat er welbepaalde wiskundige objecten mee worden bedoeld (zoals bijvoorbeeld in een hoofdstuktitel als 'Rijen en reeksen'), dan moet de lezer weten dat dat nooit het geval is.
REEKSEN BESTAAN NIET! (tenzij de term gebruikt is als synoniem voor 'oneindige rij').

Problemen, veroorzaakt door het niet-gedefinieerd zijn van 'reeks', komen onder meer aan het licht waar sprake is van *reeksontwikkelingen* (waar staat wat dit voor dingen zijn?), en van *tweezijdig oneindige reeksen* en *dubbelreeksen*. (Bij zulke rijachtige dingen met een index die loopt van $-\infty$ tot $+\infty$, of bij matrixachtige dingen met twee onafhankelijke indices van 1 tot ∞, is niet zonder meer duidelijk op welke manier de partiële sommen gevormd moeten worden. Waardoor het, bij een mix van positieve en negatieve termen, onmogelijk is om te zeggen of zo'n 'reeks' al dan niet convergent is.)

De oorsprong van de mist rond reeksen

De Fransman Cauchy was in 1821 de eerste die precies omschreef wat hij bedoelde met 'de som van een oneindige getallenrij': de limiet van z'n (oneindige) rij partiële sommen. Dus de rij $1, -1, 1, -1, 1, \cdots$ had volgens Cauchy geen 'som'. In Google staat onder *Cauchy Cours d'analyse* de originele Franse tekst; zie met name de eerste zinnen van Ch.VI. Helaas koos Cauchy voor een wat curieuze, om misverstand vragende, terminologie: hij noemt een rij met een termenlimiet *convergerend*, en een rij met ook nog een partiële sommenlimiet *convergent*! Hij presenteerde *convergent* als een nieuwe vakterm, naast het (voor hem) spreektaal-werkwoord *convergeren*. Dit

> In de gedrukte versie van het *Kollege Integraalrekening* door H.B.A. Bockwinkel (1932) staat op p.3 een kritische bespreking van reeks-definities van enige anderen, met als conclusie: gewoonlijk blijft men min of meer in 't vage omtrent dat begrip.

> On appelle *série* une suite indéfinie de quantités
> $$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \&c\ \ldots$$
> qui dérivent les unes des autres suivant une loi déterminée. (Cauchy, 1821, 1823, 1827, 1829)

The statement that $\{a_n\}$ is, or is not, summable is conventially replaced by the statement that the series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ does, or does not, converge. This terminology is somewhat peculiar, because …. (Michael Spivak, *Calculus* (edities van 1967 tot 2006))

A pair of sequences $\{a_n\}$ and $\{s_n\}$ such that …is called a series. (*Encyclopaedia of mathematics*, Vol.8, 1992)

nogal subtiele verschil is door latere auteurs maar heel beperkt overgenomen (misschien ook vaak niet opgemerkt?). Haast altijd wordt gekozen voor constructies met 'reeks' waarin dat woord niet te vervangen is door 'oneindige rij'; formuleringen die als geheel een welbepaalde betekenis hebben, echter zonder dat eenduidig te zeggen is waar het losse woord 'reeks' voor staat.

Mogelijke remedie

Het betekenisloze 'reeks' is met een kleine aanpassing van het woordgebruik als volgt te vermijden:

- noem een rij *sommeerbaar* als die een (Cauchy-)som heeft;
- noem een rij *absoluut sommeerbaar* als z'n absolute term-waarden sommeerbaar zijn;
- en vermijd het woord 'reeks' overal waar het niet synoniem is met 'oneindige rij'.

Kan het eenvoudiger?

In Google is te zien dat summable/sommable/summierbar echt gebruikt worden. En de benaming 'absoluut sommeerbaar' wordt bijvoorbeeld ook gebruikt door Arnoud van Rooij (Nijmegen).

Onderwijs

Overigens zal in onderwijssituaties natuurlijk wel gewezen moeten worden op de meerduidige betekenis van het woord 'reeks' bij een groot aantal auteurs. Naast de al genoemde betekenissen 'rij' en 'de rij partiële sommen van de rij ...' staat de term ook nog vaak voor enkele speciale manieren van schriftelijk noteren van een rij.

Voorbeeld:

De rij van partiële sommen van de harmonische rij $n \to 1/n$ kan genoteerd worden als

$$1,\ 3/2,\ 11/6,\ 25/12,\ 137/60,\ \cdots$$

Deze manier van weergeven zou je een *begintermen-vorm* kunnen noemen. Om duidelijker het onderliggende rij-voorschrift te laten uitkomen zul je die rij vaak bij voorkeur 'als reeks' (in een *reeks-vorm*) schrijven, een vorm waarin de verschillen tussen de termen direct zichtbaar zijn. Dan kan in de *grote-sigma-vorm*.

$\sum 1/k$ (evt. met nog iets onder en boven de sigma),

of in de *plussen-en-puntenvorm*

$$1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + \cdots$$

(evt. met $+1/k + \cdots$).

Het taalgebruik ten aanzien van reeksen is traditioneel slecht. (N.G. de Bruijn, Eindhoven, 1978: *Bijlage college Taal en Struktuur van de Wiskunde*, deel V-21)

De rij-met-somrij definitie

Al minstens een halve eeuw zijn er auteurs van calculusboeken die de betekenis van de term 'reeks' beschrijven als: de (geordende) combinatie van een rij en z'n rij partiële sommen. Ik vond dit bij: Creighton Buck 1956, Zamansky 1958, Apostol 2nd ed. 1974, K. Maurin 1976, Protter & Morrey 1977, Encycl. of Mathematics (uit het Russisch) 1992, Gaughan 1998, Boos 2000, Edward Azoff 2005.

Diezelfde benadering is ook te vinden in de internetencyclopedie Wikipedia waar het trefwoord 'reeks' in een tiental talen besproken wordt. De manier van 'definiëren' van dat trefwoord verschilt onderling sterk, de Engelse, Franse en Italiaanse versies hebben juistgenoemde koppelvorm. In de Nederlandse tekst gaat het niet om een koppel van rijen, maar om een rij van koppels.

Nu is het inderdaad mogelijk om af te spreken wat te verstaan is onder de termen, het convergeren, het absoluut-convergeren, en de som van zo'n rij-somrijkoppel. ('Een reeks noemen we *convergent* als het tweede lid van het koppel een convergente rij is,' en 'onder de *termen* van een reeks verstaan we de termen van de rij in z'n eerste lid,' etc.) Ook is af te spreken dat eerdergenoemde grote-sigmavormen en plussen-enpuntenvormen eigenlijk staan voor zulke speciale rij-somrijkoppels. Op het eerste gezicht lijkt een en ander het courante gebruik van de term 'reeks' in calculusteksten wel te kunnen legitimeren. Ik acht deze kunstgreep echter zo kunstmatig en vergezocht dat ik er bij het formuleren van de rest van dit stukje, inclusief de titel, geen rekening mee hield. Want het is weinig duidelijk in welk opzicht het bij een rij-somrijcombinatie om een wezenlijk ander

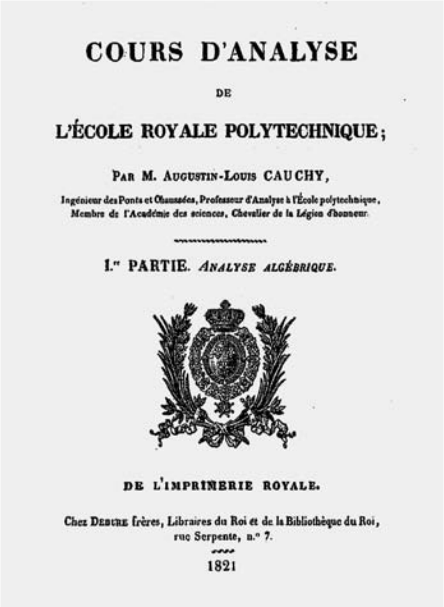
In de reclametekst op de achterflap van het Epsilonboekje *Analyse voor beginners* van Arnoud van Rooij, wordt de uitvoerige behandeling van rijen en reeksen geprezen. Dit ondanks het feit dat de auteur het gebruik van het woord reeks in de tekst van het boekje met opzet volledig heeft vermeden.

ding zou gaan dan bij een rij-zonder-meer. Bij elke rij ligt toch al automatisch vast wat z'n somrij is? Je zou evengoed kunnen definiëren dat je onder 'een reeks' verstaat: de combinatie van een rij a en de maan; en dat je zo'n rij-maankoppel 'convergent' noemt als de partiële sommen van die rij a convergeren. (Allemaal onder de voorwaarde dat het om rijen met optelbare termen gaat.)

Slot

De nu en dan oplaaiende discussie rond het gebruik van het woord reeks heeft veel, zo niet alles te maken met het feit dat Cauchy in 1821 op blz. 123 van zijn *Cours d'analyse* koos voor het adjectief *convergente* in plaats van *sommable*. Ik blijf erbij dat het het eenvoudigst is om de woorden rij en reeks gewoon als synoniemen te zien, en het alleen te hebben over *sommeerbare* rijen naast *convergente/convergerende* rijen. (Zo wordt het ook in schoolboeken haast altijd gedaan, voorzover het onderwerp daar aan de orde komt.)

Met betrekking tot het gebruik van de benaming 'oneindig product' geldt iets dergelijks.


COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École polytechnique, Membre de l'Académie des sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

I.re PARTIE. ANALYSE ALGÉBRIQUE.

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Chez DEBURE frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi, rue Serpente, n.° 7.

1821

Cours d'analyse, 1821, Augustin-Louis Cauchy